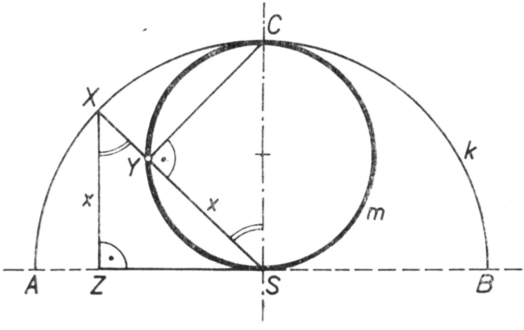
[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

VI. Množiny všech bodů dané vlastnosti

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 258–289.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405292

50. Je dána polokružnice k se středem S a průměrem AB. Označme x vzdálenost libovolného bodu X polokružnice k od přímky AB. Na polopřímce SX sestrojte bod Y tak, aby platilo $SY = x$. Vyšetřte množinu všech bodů Y.



Obr. 82

Řešení (obr. 82). Nejprve provedeme odhad hledané množiny. Označme $k = (S; r = 1)$ danou polokružnici s průměrem AB a dále bod C této polokružnice, který má sobě rovné vzdálenosti od bodů A, B, takže $SC \perp AB$. Poloměr r jsme zvolili rovný jednotkové úsečce; je totiž zřejmé, že velikost poloměru nemá vliv na způsob a výsledek řešení.

Zvolíme několik poloh bodu X a sestrojíme příslušné body Y.

Při volbě různých poloh bodu X postupujeme systematicky. Zvolíme např. nejdříve bod $X = C$; pak je $Y = X = C$. Pak volíme postupně body X na oblouku blíže bodu A a snadno uhodneme, že je-li $X = A$, je $Y = S$. Proto body C a S patří určitě do hledané množiny. Konstrukcí dalších několika bodů Y, které odpovídají bodům $X \neq A$, $X \neq C$, snadno dospějeme k domněnce, že body Y padnou na kružnici m sestrojenou nad úsečkou SC jako průměrem.

Nyní nejprve dokážeme, že každý bod Y leží na kružnici m.

1. O bodech Y odpovídajících bodům $X = A$, $X = B$ a $X = C$ to zřejmě platí.

2. Nechť bod X polokružnice k je různý od bodů A, B, C. Potom vznikne pravoúhlý trojúhelník SXZ, kde Z je pata kolmice vedené bodem X k přímce AB, takže $XZ \parallel SC$. Trojúhelníky SXZ, CSY jsou potom shodné podle věty *sus*, protože se shodují ve stranách $d(SX) = d(CS) = 1$, $d(XZ) = d(SY) = x$ a v úhlech $\sphericalangle SXZ = \sphericalangle CSY$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami XZ, SC). Je tedy $\sphericalangle SYC = \sphericalangle XZS = 90°$, a proto bod Y leží na Thaletově kružnici m sestrojené nad úsečkou SC jako průměrem.

Dokážeme ještě obráceně, že každý bod Y kružnice m má vlastnost požadovanou textem úlohy, tj. že platí $d(YS) = x$ a Y leží na polopřímce SX:

Nechť tedy bod Y leží na kružnici m (můžeme předpokládat, že Y je různý od bodů S, C, pro něž jsou podmínky úlohy samozřejmě splněny). Označme X průsečík polopřímky SY s polokružnicí k a Z patu kolmice vedené bodem X k přímce AB. Potom trojúhelníky SCY a XSZ jsou shodné podle věty *usu*, protože $d(SC) = d(XS) = 1$, $\sphericalangle CSY = \sphericalangle SXZ$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami SC, XZ), $90° = \sphericalangle CYS = \sphericalangle SZX$, a tedy i $\sphericalangle SCY = \sphericalangle XSZ$. Je tedy $d(YS) = d(XZ) = x$; body Y, X leží zřejmě na téže polopřímce s počátkem S.

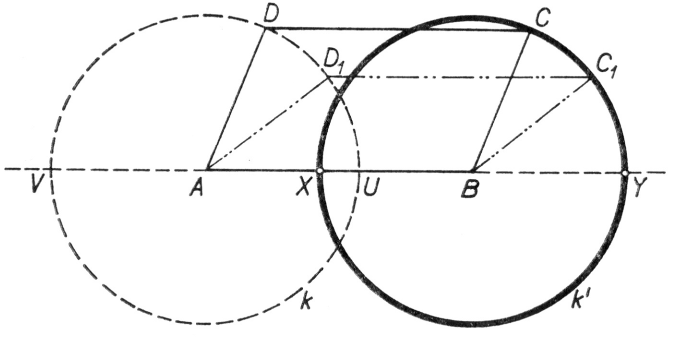
Závěr. Hledaná množina všech bodů Y je kružnice m sestrojená nad úsečkou SC jako průměrem, kde C je společný bod polokružnice k a osy úsečky AB.

Poznámka. Všimněte si pozorně dvojího kroku v důkazu a promyslete si, proč jsou oba kroky nutné.

V prvním kroku jsme vlastně dokázali, že body Y nemohou ležet někde jinde než v odhadnuté množině, neboť úhly CYS jsou pravé. Máme tedy zaručeno, že náš odhad je dost široký a hledaná množina je jeho částí.

Druhý krok nám poví, zda náš odhad nebyl příliš široký a zda skutečně každý bod kružnice m může být považován za bod Y.

51. Je dána úsečka $AB = 7$ cm. Představte si, že sestrojíte všechny možné rovnoběžníky $ABCD$, pro něž je $d(AD) = 4$ cm.



Obr. 83

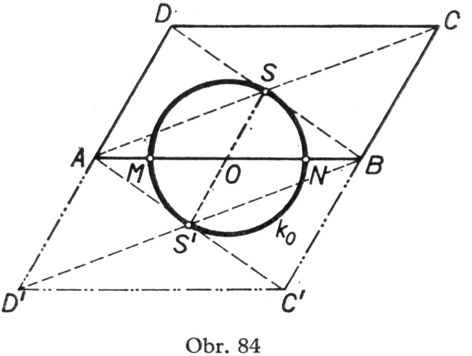
Vyšetřte množinu všech

a) vrcholů C;

b) středů S všech rovnoběžníků $ABCD$.

Řešení. a) Na obr. 83 je narýsován jeden z rovnoběžníků s pevnou stranou AB a stranou AD délky 4 cm. Možné vrcholy D opisují kružnici $k = (A, d(AD) = 4 \text{ cm})$ a obdobně vrcholy C kružnici $k = (B; 4 \text{ cm})$. Odpovídající si vrcholy D, C, resp. D_1, C_1 apod., leží na přímce rovnoběžné s AB. Průsečíky U, V kružnice k a X, Y kružnice k' s přímkou AB nemohou být vrcholy uvažovaných rovnoběžníků, neboť by se v tom případě redukovaly na úsečku.

Zvolíme-li na kružnici k' libovolný bod $C_1 \neq X, C_1 \neq Y$, je $d(C_1B) = 4$ cm a na kružnici k najdeme příslušný bod D_1 tak, že ABC_1D_1 je uvažovaný rovnoběžník.



Obr. 84

Závěr. Hledanou množinou všech bodů C je tedy kružnice $k' = (B; 4 \text{ cm})$ bez bodů X, Y, která vznikne z kružnice k posunutím.

b) Označme písmenem S střed jednoho uvažovaného rovnoběžníka $ABCD$ (obr. 84) a písmenem O střed úsečky AB. Pak úsečka OS je střední příčkou v trojúhelníku ABD a platí

$$OS \parallel AD,\ d(OS) = \frac{1}{2}\, d(AD).$$

Protože bod O je pevný a $\frac{1}{2}d(AD) = 2$ cm je pevné číslo, leží body S na kružnici $k_0 = (O;\, 2\text{ cm})$; tím jsme provedli odhad hledané množiny a zároveň první část důkazu.

Aby kružnice k_0 byla hledanou množinou všech bodů S, musíme ještě dokázat, že každý její bod je středem rovnoběžníka daných vlastností. Zřejmě průsečíky M, N kružnice k_0 s přímkou AB do hledané množiny bodů nepatří, neboť střed rovnoběžníka nemůže ležet na přímce obsahující jeho stranu.

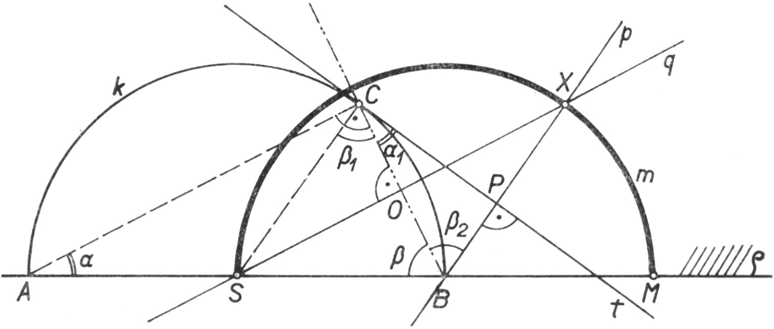
Zvolme nyní bod S' na k_0 různý od bodů M, N a proveďme konstrukci bodů C, D tak, aby vznikl rovnoběžník požadovaných vlastností. Na prodloužení úsečky AS' za bod S' naneseme úsečku AS'; dostaneme tak bod C'. Obdobně sestrojíme bod D' na přímce BS'. Protože úhlopříčky AC' a BD' se půlí, je čtyřúhelník $ABC'D'$ rovnoběžník. Protože úsečka délky $d(OS') = 2$ cm je střední příčkou v trojúhelníku ABD', je $d(AD') = 2 . d(OS') = 4$ cm, jak vyžaduje text úlohy ($d(AB) = 7$ cm bylo použito při konstrukci).

Závěr. Kružnice $k_0 = (O;\, 2\text{ cm})$ až na body M, N je tedy množinou středů S všech rovnoběžníků $ABCD$ daných textem úlohy.

52. Je dána polokružnice o průměru AB a středu S. Na polokružnici zvolme bod C různý od bodů A, B a sestrojme v něm k polokružnici tečnu t. Bodem B veďme kolmici p

k přímce t a bodem S kolmici q k přímce BC. Označme X průsečík přímek p, q.

Vyšetřte množinu všech bodů X, jestliže bod C probíhá danou polokružnicí.



Obr. 85

Řešení (viz označení z obr. 85). Označme ϱ polorovinu (s hranicí AB), v které leží daná polokružnice k. Provedeme odhad hledané množiny. Při konstrukci bodu X se pokusíme najít vzájemné vztahy, které se při volbě různých bodů C nemění. Tím vlastně provádíme první krok důkazu.

Zvolme tedy bod C a hledejme k němu bod X. Podle textu úlohy je $p \perp t$, $q \perp BC$; paty těchto kolmic označme po řadě P, O. O středu S polokružnice k platí

$$d(SA) = d(SB) = d(SC) = r. \tag{1}$$

Označme α, β úhly při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhelníka ABC (bod C leží totiž na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem). Proto o úhlech vyznačených v obr. 85 platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

(ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku ABC),

$$\beta_1 = \beta$$

(trojúhelník SBC podle (1) je rovnoramenný se základnou BC),

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ, \text{ tj. } \alpha_1 = \alpha \text{ (je } SC \perp t\text{)},$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 90^\circ, \text{ tj. } \beta_2 = \beta$$

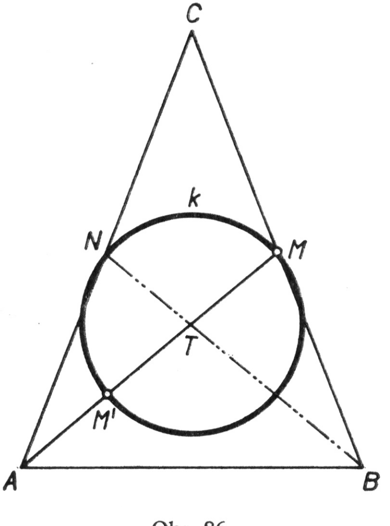
(součet velikostí ostrých úhlů v trojúhelníku BCP, kde $\sphericalangle P = 90^\circ$). Přímka BC tedy půlí úhel $\sphericalangle SBX$, přičemž je $BC \perp q$; je tedy BSX rovnoramenný trojúhelník s rameny BS, BX a vzhledem k (1) platí $r = d(BS) = d(BX)$. Je tedy $\sphericalangle SBX$ dutý a bod X padne dovnitř poloroviny ϱ na polokružnici m, která má střed B a průměr SM. Tím jsme nejen provedli odhad hledané množiny, ale i dokázali, že každý bod X, sestrojený podle textu úlohy, padne na polokružnici m (její krajní body k ní nepatří).

Poznámka. Trojúhelníky SBC, BSX mají kolmé základny BC, SX, které se navzájem půlí, proto je $SBXC$ rovnostranný rovnoběžník (čtverec nebo kosočtverec) a polokružnice k, m vzniknou jedna z druhé posunutím o délku SB ve směru SB (nebo opačném).

Obráceně, je-li X bod uvnitř oblouku SM (polokružnice m), sestrojíme rovnostranný rovnoběžník $SBXC$; je $SC \cong SB$, tj. bod C padne dovnitř oblouku AB (polokružnice k), a najdeme-li k bodu C příslušné přímky p, q, je jejich průsečíkem zvolený bod X.

Závěr. Množinou všech bodů X jsou body polokružnice $m = (B; \frac{1}{2}d(AB))$ ležící v polorovině ϱ, a to bez obou jejích krajních bodů S, M.

53. V rovině je dána úsečka AM. Určete množinu středů ramen AC všech rovnoramenných trojúhelníků ABC se základnou AB, v nichž je úsečka AM těžnicí.



Obr. 86

Řešení. a) Budiž T těžiště trojúhelníků ABC, tj. T je bod úsečky AM, pro který platí $AT = 2TM$. Označme N střed ramena AC (obr. 86); pak BN je těžnice trojúhelníka ABC.

Poněvadž trojúhelník ABC je rovnoramenný, je $AM \cong BN$, a tedy $TM \cong TN$. Bod N leží tedy na kružnici k se středem T a poloměrem TM.

b) Nyní ještě musíme zjistit, zda ke každému bodu kružnice k existuje rovnoramenný trojúhelník požadovaných vlastností.

Označme M' střed úsečky AT (který je také bodem kružnice k). Zvolme libovolný bod N kružnice k, různý od M, M'. Dokážeme, že existuje rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB a těžnicemi AM, BN. Na polopřímce opačné k polopřímce TN sestrojíme bod B tak, aby platilo $TB = 2TN$. Dále sestrojíme bod C souměrně sdružený s bodem B podle bodu M. Poněvadž $N \neq M, M'$, leží bod B mimo přímku AM, body B, C jsou odděleny přímkou AM, a tudíž body A, B, C neleží v přímce a jsou vrcholy trojúhelníka ABC.

Protože AM je těžnice trojúhelníka ABC (neboť $BM \cong CM$) a protože $AT = 2TM$, je T těžiště trojúhelníka ABC. Protože T je těžiště trojúhelníka ABC, leží jeho těžnice z vrcholu B v přímce BT, a protože $BT = 2TN$, je N středem strany AC. Protože těžnice AM, BN trojúhelníka ABC mají stejnou délku, je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB.

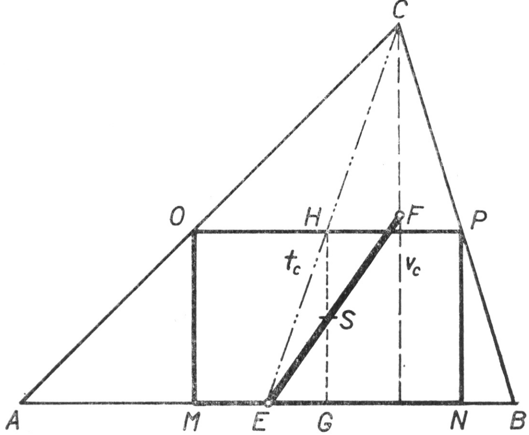
Závěr. Hledaná množina bodů je kružnice k bez bodů M, M'.

Poznámka 1. Kdyby platilo $N = M$ nebo $N = M'$, ležely by sestrojené body A, B, C v přímce.

Poznámka 2. Trojúhelník ABC je rovnostranný, právě když $\sphericalangle MTN = 120°$.

54. Do ostroúhlého trojúhelníka ABC je vepsán obdélník $MNPO$ tak, že vrcholy M, N leží na straně AB, vrchol P na straně BC a vrchol O na straně CA.

Vyšetřte množinu středů všech obdélníků $MNPO$.



Obr. 87

Řešení. Sestrojíme jeden obdélník $MNPO$ splňující podmínky úlohy a jeho střed S (obr. 87). Bod S jako střed obdélníka $MNPO$ je středem jeho střední příčky HG, kde H je střed strany OP a G střed strany MN. Zřejmě $HG \perp AB$.

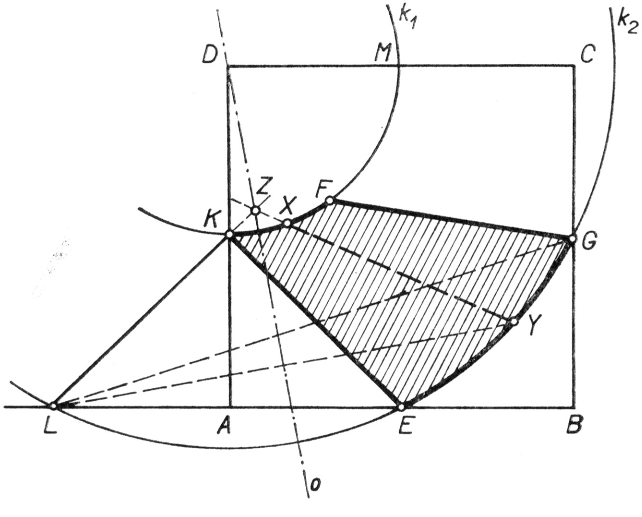
Bod H je střed příčky OP trojúhelníka ABC, která je rovnoběžná se stranou AB, a proto bod H leží na těžnici $t_c = EC$ trojúhelníka ABC. Obráceně snadno zjistíme, že každý vnitřní bod H' těžnice $EC = t_c$ je středem strany $O'P'$ jistého obdélníka $M'N'P'O'$ splňujícího podmínky úlohy. Docházíme tedy k jiné formulaci úlohy:

Určete množinu středů S všech úseček HG, kde bod H probíhá vnitřek úsečky $EC = t_c$, G leží na AB a $HG \perp AB$. Lze tedy zřejmě vyslovit závěr úlohy takto:

Závěr. Množinou všech středů S je tedy vnitřek úsečky EF, kde F je střed výšky v_c z bodu C na stranu AB, což platí i v případě, že t_c splývá s v_c, tj. je-li $AC \cong BC$.

55. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a; K je střed strany AD, L je bod polopřímky BA, pro který platí $d(BL) = \frac{3}{2}a$. Označme o takovou přímku procházející bodem D, že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY? Narýsujte obrázek a vyšrafujte tento útvar.



Obr. 88

Řešení. Danou situaci znázorňuje obr. 88. Protože body K, X jsou souměrně sdruženy podle osy o, která prochází vrcholem D, platí

$$DK \cong DX.$$

Bod X leží tedy na kružnici k_1 se středem D a poloměrem $d(DK) = \frac{a}{2}$, ovšem jenom na tom oblouku kružnice k_1, který leží na čtverci $ABCD$ (je to čtvrtkružnice KM).

Protože body L, Y jsou souměrně sdruženy podle osy o, která prochází vrcholem D, je

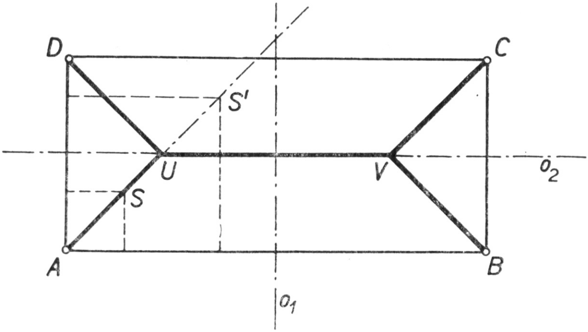
$$DL \cong DY.$$

Bod Y leží tedy na kružnici k_2 se středem D a poloměrem $d(DL) = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, jak snadno vypočteme podle Pythagorovy věty z trojúhelníka ADL. Kružnice k_2 prochází středem G strany BC; bod Y leží ovšem jen na tom oblouku kružnice k_2, který leží ve čtverci $ABCD$. Tento oblouk je omezen středy E, G stran AB, BC.

Budiž Y libovolný bod oblouku EG; dokážeme, že vznikne jako souměrně sdružený bod s bodem L podle vhodné osy o procházející bodem D. Tuto osu o sestrojíme jako osu úsečky LY; určíme průsečík Z přímek o, KL a dále průsečík X přímky YZ s obloukem KM kružnice k_1. Úsečka XY je souměrně sdružená s KL podle osy o. Je-li $Y = G$, je $X = F$.

Závěr. Proměnná úsečka XY vyplní vyšrafovanou část mezikruží (k_1, k_2) omezenou obloukem EG kružnice k_2, obloukem KF kružnice k_1 a úsečkami KE, FG.

56. Je dán obdélník $ABCD$, v němž je $AB > CD$. Sestrojte množinu středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se dvou jeho sousedních stran nebo dvou jeho protějších stran.



Obr. 89

Řešení (viz obr. 89). Označme a velikost strany AB a b velikost strany BC.

a) Hledejme množinu M_1 středů všech kružnic, které se dotýkají stran AD a BC a leží uvnitř obdélníka $ABCD$. Každá kružnice, jež se dotýká zároveň přímek AD a BC, má poloměr $\frac{1}{2}a$ a její střed leží na ose o_1 stran AB a CD. Každá taková kružnice tedy vytíná na přímce o_1 tětivu délky a. Avšak $a > b$, a proto M_1 je prázdná množina.

b) Hledejme množinu M_2 středů všech kružnic, které se dotýkají stran AB a CD a leží uvnitř obdélníka $ABCD$. Každá kružnice, která se dotýká přímek AB a CD, má poloměr $\frac{1}{2}b$ a její střed leží na ose o_2 stran AD a BC.

Označme U vnitřní bod obdélníka $ABCD$, který leží na přímce o_2 a jehož vzdálenost od AD je rovna $\frac{1}{2}b$. Obdobně V je bod, který leží uvnitř obdélníka $ABCD$ na přímce o_2 a jehož vzdálenost od BC je $\frac{1}{2}b$. Zřejmě každý bod úsečky UV je středem kružnice o poloměru $\frac{1}{2}b$, která se dotýká stran AB a CD a leží v obdélníku $ABCD$. Body přímky o_2 ležící vně úsečky UV už tuto vlastnost nemají, neboť každá kružnice se středem v takovém bodu a mající poloměr $\frac{1}{2}b$ obsahuje aspoň jeden bod ležící vně rovnoběžkového pásu přímek AD a BC. Množinou M_2 je tedy úsečka UV.

c) Hledejme množinu M_3 středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se jeho stran AB a AD. Velikost úhlu UAB je $45°$, a proto střed každé kružnice, která se dotýká strany AB a strany AD, leží v polopřímce AU. Zřejmě $A \notin M_3$ a $U \in M_3$.

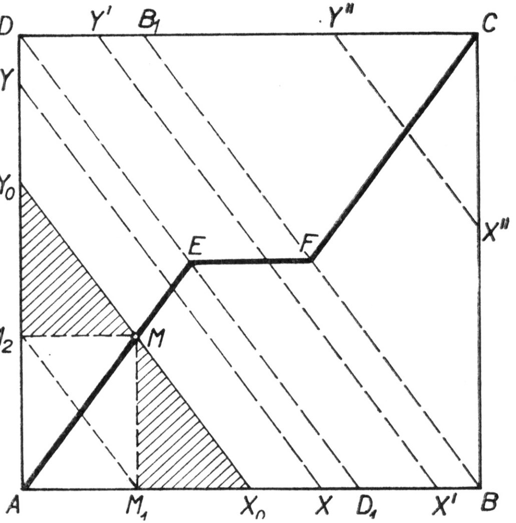
Nechť S je libovolný bod ležící mezi A a U. Protože $AS < AU$, je vzdálenost bodu S od strany AB menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice o středu S, která se dotýká AB a AD, leží v daném obdélníku, tj. $S \in M_3$.

Nechť S' je libovolný bod ležící na prodloužení úsečky AU za bod U. Pak $AS' > AU$, a proto vzdálenost bodu S' od přímky AB je větší než $\frac{1}{2}b$ a vzdálenost od přímky CD menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice se středem S', jež se dotýká přímek AB a AD, neleží v daném obdélníku, tj. $S' \notin M_3$.

Množina M_3 je tedy množinou všech bodů úsečky AU s výjimkou bodu A.

Závěr. Hledaná množina bodů je sjednocení úsečky UV a úseček AU, DU, BV a CV s výjimkou bodů A, B, C, D.

57. Je dán čtverec, jehož strana má délku 6 cm. Bod M má od obou sousedních stran čtverce vzdálenosti 15 mm a 20 mm. Sestrojte lomenou čáru procházející bodem M, která tvoří množinu středů všech úseček XY navzájem rovnoběžných, jejichž krajní body leží na stranách daného čtverce. Vypočtěte její délku.



Obr. 90

Řešení. Sestrojíme čtverec $ABCD$ o straně délky 6 cm. Nechť bod M má vzdálenost 20 mm od strany AB a 15 mm od strany AD (obr. 90).

Bod M sám musí být středem jedné takové úsečky XY, o nichž mluví text úlohy, a proto bod M musí být vnitřním bodem čtverce $ABCD$.

Nejprve budeme řešit dílčí úlohu.

Na obvodu čtverce $ABCD$ sestrojte body X_0, Y_0 tak, aby bod M byl středem úsečky X_0Y_0.

Jsou-li X_0, Y_0 takové body, potom

a) neleží na téže straně čtverce $ABCD$, neboť bod M je vnitřním bodem čtverce $ABCD$;

b) neleží na rovnoběžných stranách čtverce $ABCD$, neboť bod M neleží ani na jedné ze středních příček čtverce $ABCD$;

c) neleží na stranách AB a BC, BC a CD, neboť M je vnějším bodem trojúhelníka ABC a trojúhelníka BCD.

Zbývají tedy dvě možnosti: X_0 a Y_0 leží po řadě na stranách AB a AD nebo AD a DC.

Uvažujme případ, že X_0 je bodem strany AB a Y_0 je bodem strany AD. Označme M_1 patu kolmice spuštěné z bodu M na AB a M_2 patu kolmice spuštěné z bodu M na AD. Potom zřejmě X_0 je bodem úsečky M_1B a Y_0 je bodem úsečky M_2D. Platí

$$\triangle M_1X_0M \cong \triangle M_2MY_0, \tag{1}$$

neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, $\sphericalangle M_1X_0M = \sphericalangle M_2MY_0$ a $X_0M \cong MY_0$. Tudíž platí

$$d(M_1X_0) = 15 \text{ mm}, \quad d(M_2Y_0) = 20 \text{ mm}. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že strana čtverce $ABCD$ má délku 6 cm, body X_0, Y_0 splňující podmínky (2) leží uvnitř úseček M_1B a M_2D, tj. na obvodu čtverce $ABCD$.

Jsou-li X_0 a Y_0 body ležící po řadě na úsečkách M_1B, M_2D, přičemž splňují podmínky (2), pak platí (1), a tudíž M je středem úsečky X_0Y_0.

Uvažujeme-li možnost, že X_0, Y_0 leží po řadě na stranách AD, DC, potom stejnou úvahou, jakou jsme právě užili pro strany AB a AD, zjistíme, že takové body X_0 a Y_0 na obvodu čtverce $ABCD$ neexistují.

Řešením dílčí úlohy máme určen směr úseček XY.

Veďme rovnoběžky s úsečkou X_0Y_0 vrcholy D a B. Označme body D_1 a B_1 podle obrázku. Nechť E je střed úsečky DD_1 a F je střed úsečky BB_1. Hledaná lomená čára je $AEFC$, neboť

1. AE je těžnice trojúhelníka AD_1D, která je množinou středů všech úseček $XY \parallel D_1D$, jejichž krajní body leží na straně AD_1 a na straně AD (dokáže se z podobnosti trojúhelníka AD_1D a trojúhelníka AXY);
2. EF je střední příčka rovnoběžníka D_1BB_1D, a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel DD_1$, jejichž krajní body leží na stranách D_1B a DB_1;
3. FC je těžnice trojúhelníka BCB_1, a je tedy množinou středů všech úseček $XY \parallel BB_1$, jejichž krajní body leží na stranách BC a B_1C.

Zbývá určit délku lomené čáry $AEFC$. Bod F leží na střední příčce čtverce $ABCD$, a proto $FC \cong FB$. Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj. $FC \cong FB \cong ED_1$. Trojúhelník AD_1D je pravoúhlý, E je střed jeho přepony, a proto $DE \cong AE$. Z předchozích úvah plyne, že

$$d(AE) + d(FC) = d(DD_1).$$

Délku úsečky DD_1 určíme pomocí podobnosti trojúhelníků M_1X_0M a AD_1D. Platí

$$d(DD_1) = d(MX_0) \cdot \frac{d(DA)}{d(MM_1)} = 3 \,.\, d(MX_0).$$

Užijeme-li pro trojúhelník M_1X_0M Pythagorovu větu, dostáváme, že $d(MX_0) = 2{,}5$ cm, tj.

$$d(DD_1) = d(AE) + d(FC) = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Čtyřúhelník D_1BFE je rovnoběžník, tj.

$$EF \cong D_1B;$$

dále platí

$$d(D_1B) = d(AB) - d(AD_1).$$

Z podobnosti trojúhelníků M_1X_0M a AD_1D plyne, že

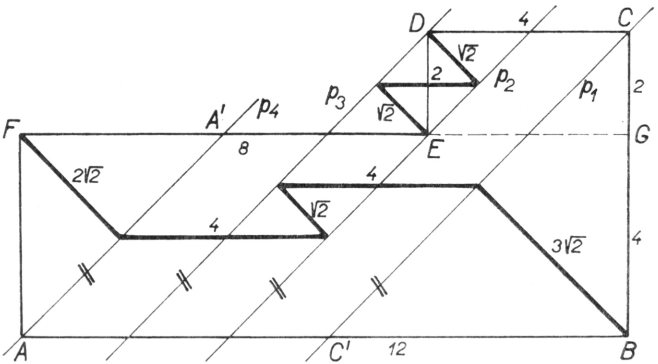
$$d(AD_1) = 1{,}5 \,.\, \frac{6}{2} \text{ cm} = 4{,}5 \text{ cm},$$

tj.

$$d(EF) = 1{,}5 \text{ cm}.$$

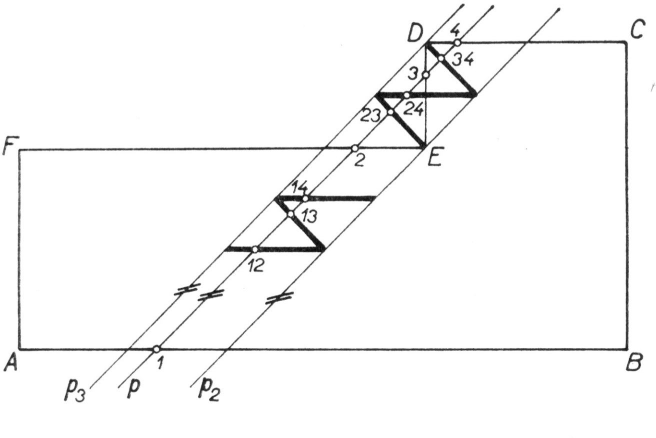
Odpověď. Délka lomené čáry $AEFC$ je 7,5 cm + 1,5 cm = = 9 cm.

58. Je dán šestiúhelník $ABCDEF$ složený z obdélníka $ABGF$ o rozměrech $d(AB) = 12$ cm, $d(AF) = 4$ cm a z obdélníka $CDEG$ o rozměrech $d(CD) = 4$ cm, $d(CG) = 2$ cm (viz obr. 91). Narýsujte tento šestiúhelník a zakreslete množinu středů všech úseček kolmých k BE, jejichž krajní body leží na obvodu šestiúhelníka. Množina se skládá z osmi úseček; vypočtěte součet jejich délek.



Obr. 91

Řešení. Na obr. 91 je narýsován daný šestiúhelník. Vrcholy C, E, D, A vedeme po řadě přímky p_1, p_2, p_3, p_4 kolmé k BE. Část hledané množiny **M**, která leží v polorovině p_1B, je výška rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka BCC' (C' je průsečík p_1, AB). Obdobně je tomu v polorovině p_4F, kde příslušná část množiny **M** je výška rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka AFA' (A' je průsečík p_4, FG). V pásech (p_1p_2) a (p_3p_4) jsou příslušné části množiny **M** úsečky; leží v osách souměrnosti dvojice rovnoběžek AB, CD a AB, EF. Nejsložitější je situace v pásu (p_2p_3). Na obr. 92 je zakreslena přímka p tohoto pásu kolmá k přímce BE. Čísly **1, 2, 3, 4** jsou označeny její průsečíky s obvodem šestiúhelníka $ABCDEF$; dvojicemi 12, 13, ..., 34 je označeno šest středů dvojic vybraných ze čtyř bodů 1, 2, 3, 4. Probíhá-li přímka p pás (p_2p_3), dostaneme úsečky tlustě vytažené na obr. 92. Na obr. 91 jsou připsány k jednotlivým úsečkám délky (bez pojmenování cm). Sjednocením těchto úseček je vyšetřovaná množina.



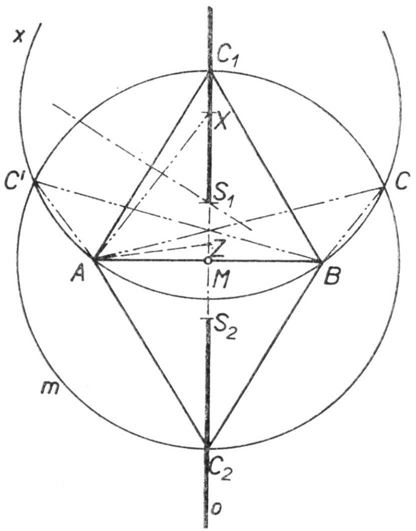
Obr. 92

Odpověď. Součet délek úseček je $10\,\text{cm} + 8 \,.\, \sqrt{2}\,\text{cm} \doteq$ $\doteq 21{,}3\,\text{cm}$.

59. Je dána úsečka AB a kružnice m opsaná kolem středu M úsečky AB poloměrem větším než je polovina délky úsečky AB. Nechť S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC.

a) Vyšetřte množinu všech bodů S, když bod C probíhá kružnici m.

b) Jakou množinu dostaneme, když poloměr kružnice m bude rovný polovině délky úsečky AB?



Obr. 93

Řešení. a) Středy kružnic, opsaných trojúhelníkům ABC, musí ležet na ose o úsečky AB, která je společnou stranou všech uvažovaných trojúhelníků (obr. 93).

Je otázka, zda obráceně každý bod přímky o patří hledané množině, kterou nazveme **G**. Do **G** patří body S_1, S_2, které jsou středy kružnic opsaných rovnoramenným trojúhelníkům ABC_1 a ABC_2 (kde C_1, C_2 jsou průsečíky přímky o s kružnicí m).

Každý bod X vnitřku úsečky S_1C_1 (popř. S_2C_2) je středem kružnice $x = (X; d(AX))$, která protne kružnici m ve dvou bodech (vzniknou tak dokonce dva uvažované trojúhelníky). Z trojúhelníka AS_1X plyne $AX > AS_1$. Protože $AS_1 \cong S_1C_1$ a $S_1C_1 > XC_1$, je $AX > XC_1$. Kružnice x tedy protíná kružnici m.

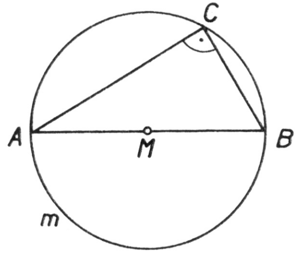
Proto bod X patří do **G**. Také každý bod Y prodloužení úsečky S_1C_1 za bod C_1 (popř. S_2C_2 za bod C_2) patří do **G**, neboť kružnice $y = (Y, d(AY))$ protne vždy kružnici m.

Naproti tomu bod M do **G** nepatří, neboť kružnice m a $(M; d(MA))$ se neprotnou.

Je-li Z bod vnitřku úsečky MS_1 (popř. MS_2), pak z trojúhelníka AZS_1 plyne $AZ < AS_1$. Dále platí $AS_1 \cong C_1S_1$ a $C_1S_1 < ZC_1$. Proto je $AZ < ZC_1$, takže kružnice m a $z =$ $= (Z, d(AZ))$ se neprotnou. Bod Z tedy do **G** nepatří.

b) Je-li poloměr kružnice m roven $\frac{1}{2} d(AB)$, splyne kružnice m s kružnicí opsanou každému trojúhelníku ABC. Pak **G** obsahuje jediný bod - střed M kružnice m.

Závěr. V případě a) tvoří množinu **G** body polopřímek S_1C_1 a S_2C_2 (viz obr. 93). V případě *b*) obsahuje množina **G** jediný bod M (obr. 94).



Obr. 94

60. Je dán trojúhelník ABC. Vyšetřte množinu všech bodů X tohoto trojúhelníka, pro něž platí

$$AX \geqq BX \geqq CX. \tag{1}$$

Pomocí délek stran a velikostí úhlů trojúhelníka ABC vyjádřete podmínky pro to, aby

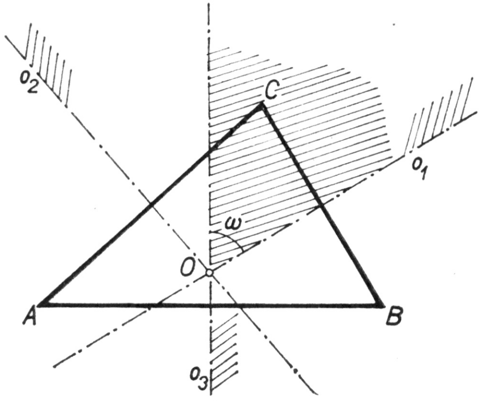
a) množinou všech bodů X byl pětiúhelník;

b) množinou všech bodů X byl šestiúhelník;

c) množina všech bodů X obsahovala právě jeden bod;

d) množina všech bodů X byla prázdná.

Řešení (obr. 95). Množinou všech bodů X, pro něž platí např. $AX \geqq BX$, je polorovina o_3B, kde o_3 je osa úsečky AB. Obdobně množinou všech bodů X, pro které platí $BX \geqq CX$, je polorovina o_1C, kde o_1 je osa úsečky BC. Protože se osy stran trojúhelníka ABC protínají v jediném bodě O, tvoří množinu všech bodů X, splňujících podmínku (1), dutý úhel ω, který je společnou částí polorovin o_3B a o_1C. Hledaná množina je tedy průnikem trojúhelníka ABC a úhlu ω.



Obr. 95

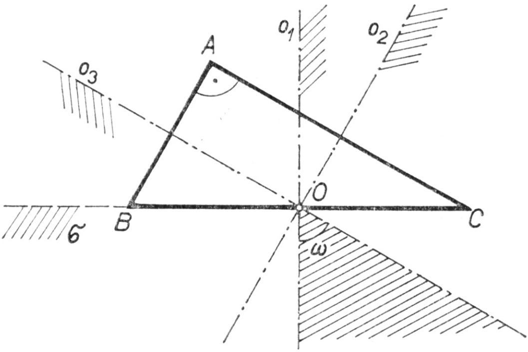
Víme, že poloha vrcholu O, tj. středu opsané kružnice, vzhledem k přímce BC závisí na tom, zda úhel BAC je tupý, pravý nebo ostrý. Rozlišujeme proto tyto dva případy:

1. Úhel BAC je tupý. Pak O leží v té polorovině σ vyťaté přímkou BC, která neobsahuje bod A. Protože i obě ramena úhlu ω leží v polorovině δ, leží celý úhel ω v polorovině σ, takže hledaná množina neobsahuje žádný bod.

2. Úhel BAC je pravý. Bod O pak leží na straně BC, obě ramena jsou opět v polorovině σ. Bod O je proto jediným bodem hledané množiny (obr. 96).

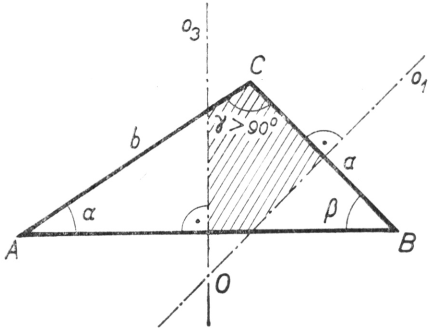
3. Úhel $BAC = \alpha$ je ostrý. Pak bod O leží v té polorovině vyťaté přímkou BC, která obsahuje vrchol A. Hledaná množina pak obsahuje střed S strany BC a další body blízké k bodu S, tedy alespoň dva různé body. Odtud již plyne, že případ d) v úloze nastane, právě když $\alpha > 90°$, a případ c) nastane, právě když $\alpha = 90°$. Abychom našli řešení v případech a) a b), všim-

něme si, kdy společná část libovolného trojúhelníka a libovolného dutého úhlu je pětiúhelník a kdy šestiúhelník. Protože strany této části, pokud je to mnohoúhelník, jsou částí tří stran trojúhelníka a dvou ramen úhlu, je těchto stran nejvýše pět. Nikdy tedy nevznikne šestiúhelník. Pětiúhelník vznikne právě když jeden vrchol trojúhelníka leží uvnitř úhlu, zbylé dva vně úhlu tak, že úsečka je spojující protne obě ramena úhlu.



Obr. 96

Vraťme se k případu ostrého úhlu BAC. Protože ω je společná část polorovin o_1C a o_3B a protože B není v o_1C, A není v o_3B, nastane případ a) právě když C je v o_3B čili $a < b$ (C je vždy v o_1C) a strana AB protne obě ramena úhlu ω (obr. 97). Strana AB protne rameno obsažené v o_3, právě když O leží v té polorovině vyťaté přímkou AB, která neobsahuje bod C. Pak však už AB protne i druhé rameno. Nastane tedy případ a), právě když úhel γ je tupý a když úhel α je menší než β, neboť $a < b$ (α je pak skutečně ostrý).



Obr. 97

Závěr. Podmínky, kdy nastanou jednotlivé případy, jsou:
a) $\gamma > 90°$, $\alpha < \beta$;
b) nikdy;
c) $\alpha = 90°$;
d) $\alpha > 90°$.

61. V rovině je dána úsečka AB. Vyšetřte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC dané roviny, pro jejichž vnitřní úhly (při obvyklém značení) platí

$$\alpha \geqq \beta > \gamma. \tag{1}$$

Řešení. Platí-li pro vnitřní úhly trojúhelníka ABC nerovnosti (1), pak pro jeho strany je

$$a \geqq b \text{ a zároveň } b > c. \tag{2}$$

Také obráceně z nerovností (2) plynou nerovnosti (1).

Při vyšetřování množiny vrcholů C docházíme k těmto třem závěrům:

(a) Množina všech bodů C, pro něž platí

$$d(BC) = a \geqq b = d(AC),$$

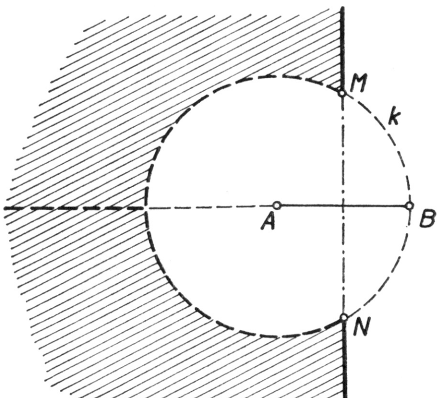
je uzavřená polorovina π, jejíž hranicí (obr. 98) je osa o úsečky AB a jež obsahuje bod A.

(b) Množina všech bodů C, pro které je

$$d(AC) = b > c = d(AB),$$

je vnější oblast kružnice k se středem A a poloměrem $c = d(AB)$.

(c) Bod C je vrcholem trojúhelníka ABC, a proto bod C neleží na přímce AB.

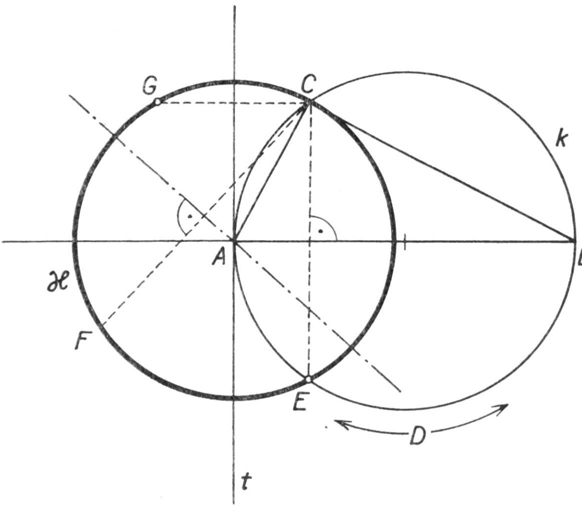


Obr. 98

Závěr. Hledaná množina je tedy průnikem uzavřené poloroviny π a vnější oblasti kružnice k bez bodů přímky AB. Průsečíky M, N kružnice k a osy úsečky AB k hledané množině ovšem nepatří.

62. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Ke každému bodu D kružnice opsané trojúhelníku ABC $(D \neq A, D \neq B)$ sestrojíme bod E souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB a bod F souměrně sdružený s bodem C podle přímky AD.

Vyšetřte množinu a) všech bodů E; b) všech bodů F.



Obr. 99

Řešení. a) Trojúhelník ABC je pevně dán (obr. 99), a proto bod souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB je právě jeden. Množina všech bodů E je jednoprvková.

b) Označme $\mathbf{M}$ hledanou množinu všech bodů F. Bod F je souměrně sdružen s bodem C podle osy AD, a proto $AF \cong AC$, kde AC je pevná úsečka. Proto každý bod F leží na kružnici $\varkappa = (A, r = d(AC))$. Platí tedy $\mathbf{M} \subset \varkappa$.

Dále musíme zjistit, zda každý bod kružnice $\varkappa$ náleží do hledané množiny $\mathbf{M}$. Zvolme na kružnici $\varkappa$ libovolný bod F. Nejdříve budeme hledat osu o dvojice bodů C a F. Je vhodné rozlišit dva případy:

α) Nechť $F \neq C$. Body F a C leží na kružnici $\varkappa$, a proto osa o této dvojice bodů prochází bodem A. Bod F bude náležet množině $\mathbf{M}$, právě když přímka o bude mít s kružnicí k společný bod D, různý od bodu A a od bodu B. Je tomu tak, právě když přímka o není ani přímkou AB, ani tečnou t kružnice k v bodě A. Tedy $F \in \mathbf{M}$, právě když $F \neq E$ a $F \neq G$, kde bod G je souměrně sdružený s bodem C podle přímky t.

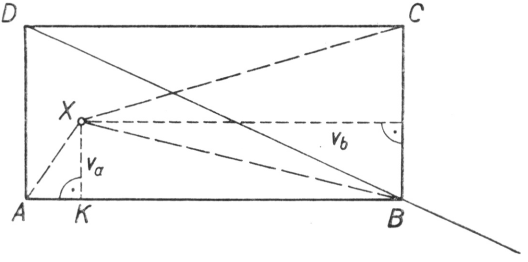
β) Nechť $F = C$. Pak je bod F souměrně sdružený s bodem C podle každé přímky, která prochází bodem C, tedy také podle přímky AC. V tomto případě je tedy $D = C$ a uvažovaný bod F (tj. C) náleží do množiny $\mathbf{M}$.

Závěr. Hledanou množinou všech bodů F je množina

$$\mathbf{M} = \varkappa \setminus \{E, G\}.$$

63. Je dán pravoúhelník $ABCD$. Najděte množinu všech takových bodů X pravoúhelníka $ABCD$, kde pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle ABX = \triangle BCX < \triangle ADX.$$



Obr. 100

Řešení. Označme $\mathbf{M}_1$ množinu všech bodů X pravoúhelníku $ABCD$, pro něž je $\triangle ABX = \triangle BCX$ a $\mathbf{M}_2$ množinu všech bodů X daného pravoúhelníku, pro které platí $\triangle BCX <$ $< \triangle ADX$. Potom hledaná množina je průnik

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2. \tag{1}$$

Začněme hledáním množiny $\mathbf{M}_1$. Nechť bod $X \in \mathbf{M}_1$ (viz obr. 100). Pak bod X neleží ani na AB, ani na BC. Označme v_a, v_b vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC. Potom

$$\frac{1}{2}\, d(AB)\,.\,v_a = \frac{1}{2}\, d(BC)\,.\,v_b, \tag{2}$$

tj.

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{d(BC)}{d(AB)}. \tag{3}$$

Označme K patu výšky z bodu X na přímku AB. Pak z rovnosti (3) plyne

$$\frac{d(KX)}{d(KB)} = \frac{d(AD)}{d(AB)}, \tag{4}$$

tj. pravoúhlé trojúhelníky ABD a KBX jsou podobné. Úhly $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle KBX$ jsou tedy shodné. Body D a X leží v téže polorovině určené přímkou AB, takže bod X leží na polopřímce BD.

Obráceně se snadno dokáže, že pro každý bod X, jenž leží na úhlopříčce BD, přičemž $X \neq B$, platí (4), tj. podle (3) a (2) obsahy trojúhelníků ABX a BCX se sobě rovnají.

Zjistili jsme tedy, že množinou $\mathbf{M}_1$ je úhlopříčka BD bez bodu B.

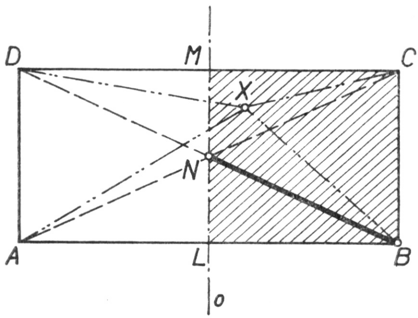
Množina $\mathbf{M}_2$ se najde snadno (obr. 101). V pravoúhelníku $ABCD$ je $AD \cong BC$, a proto nerovnost

$$\triangle BCX < \triangle ADX$$

platí, právě když vzdálenost bodu X od přímky BC je menší (avšak nenulová) než vzdálenost bodu X od přímky AD. Tyto dvě podmínky splňuje bod X, právě když neleží na přímce BC a zároveň leží uvnitř poloroviny oB, kde přímka o je osou rovnoběžkového pásu určeného přímkami AD a BC. Označme L, M průsečíky osy o a přímek AB a CD. Potom množina $\mathbf{M}_2$ je sjednocením vnitřku pravoúhelníku $LBCM$ a vnitřků úseček BL a CM.

Nyní už můžeme určit hledanou množinu, tj. průnik (1). Je jím vnitřek úsečky BN, kde N je průsečík úhlopříček pravoúhelníku $ABCD$.

Závěr. Hledanou množinu všech bodů X tvoří body úsečky BN bez bodů B, N.



Obr. 101