[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

IV. Úlohy s výpočty

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 215–246.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405290

IV. Úlohy s výpočty

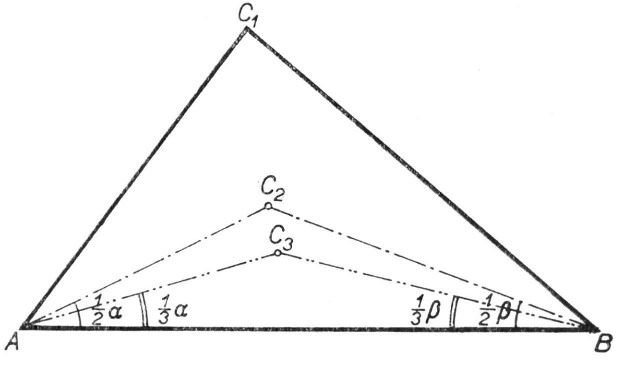
33. V trojúhelníku ABC_1 označme úhly $\sphericalangle C_1AB = \alpha$, $\sphericalangle ABC_1 = \beta$, $\sphericalangle BC_1A = \gamma$.

Uvnitř trojúhelníka ABC_1 leží bod C_n takový, že platí

$$\sphericalangle C_nAB = \frac{1}{n}.\alpha, \quad \sphericalangle ABC_n = \frac{1}{n}.\beta,$$

kde n je dané přirozené číslo větší než 1.

Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle AC_nB$ pomocí úhlu γ.



Obr. 63

Řešení. Na obr. 63 jsou trojúhelníky ABC_1, ABC_2, ABC_3. Výpočet úhlu $\sphericalangle AC_2B$ je jednoduchý:

$$\sphericalangle AC_2B = 180° - \frac{1}{2}\,\alpha - \frac{1}{2}\,\beta = 180° - \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta).$$

Protože platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, je

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma \tag{1}$$

čili

$$\sphericalangle AC_2B = 180° - \frac{1}{2}\,(180° - \gamma) = 90° + \frac{1}{2}\,\gamma.$$

Obdobně bychom vypočítali velikost úhlu $\sphericalangle AC_3B = \gamma_3$ a obecně pak úhlu $\sphericalangle AC_nB = \gamma_n$:

$$\gamma_n = 180° - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} = 180° - \frac{1}{n}\,(\alpha + \beta) \tag{2}$$

Dosadíme-li z (1) do (2), dostaneme

$$\gamma_n = 180° - \frac{1}{n}\,(180° - \gamma)$$

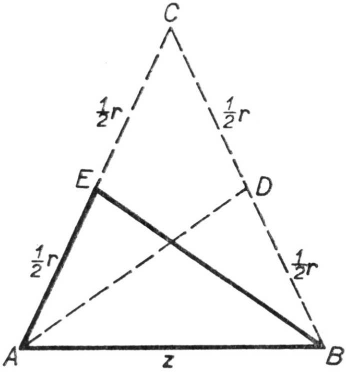
nebo po další úpravě

$$\gamma_n = 180° \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\,\gamma.$$

Toto vyjádření velikosti úhlu γ_n závisí na přirozeném čísle n, velikosti úhlu γ a konstantě 180°, jak vyžadoval text úlohy.

34. Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB má obvod 50 cm. Označte D střed strany BC a E střed strany AC. Obvod trojúhelníka ABE je o 8 cm větší než obvod trojúhelníka ACD.

Vypočítejte velikosti stran trojúhelníka ABC.



Obr. 64

Řešení (obr. 64). Označme $z = d(AB), r = d(CA) = d(CB)$ v rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB. Protože body E, D jsou středy ramen, platí podle věty *sus* zřejmě

$$\triangle AEB \cong BDA. \tag{1}$$

Podle podmínek úlohy je

$$d(AB) + d(BE) + d(AE) - 8\text{ cm} = d(AD) + d(CD) + d(AC). \tag{2}$$

Protože podle (1) je $AD \cong BE$, dostaneme po dosazení do (2) rovnici

$$z + \frac{1}{2} r - 8\text{ cm} = \frac{1}{2} r + r$$

čili

$$z - r = 8\text{ cm}. \tag{3}$$

Z podmínky pro obvod trojúhelníka ABC plyne druhá rovnice pro neznámé z, r:

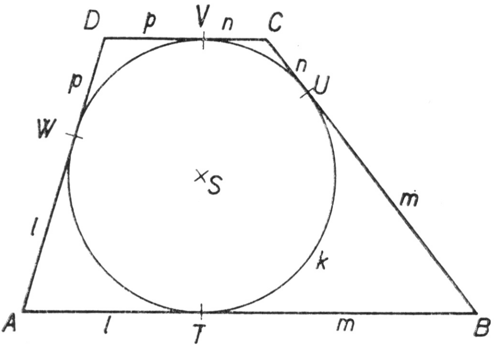
$$z + 2r = 50\text{ cm} \tag{4}$$

Řešením soustavy (3), (4) dostaneme $r = 14$ cm, $z = 22$ cm, tj. $d(AB) = 22$ cm, $d(CA) = d(CB) = 14$ cm.

Zkouška. a) $d(AB) + d(CA) + d(CB) = 22\text{ cm} + 2 . 14\text{ cm} = 50\text{ cm}$, což je podmínka úlohy.

b) Vypočítáme $d(AB) + d(BE) + d(AE) - (d(AC) + d(DC) + d(AD))$. Protože podle (1) je $AD \cong BE$, dostaneme $d(AB) + d(AE) - d(AC) - d(DC) = 22\text{ cm} + 7\text{ cm} - 14\text{ cm} - 7\text{ cm} = 8\text{ cm}$, jak žádá text úlohy.

35. Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož střední příčka má délku 1 a jemuž lze vepsat kružnici. Vypočtěte jeho obvod.



Obr. 65

Řešení (obr. 65). Kružnice k vepsaná lichoběžníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB, BC, CD, DA v bodech, které označíme po řadě T, U, V, W. Podle známé vlastnosti tečen vedených z bodu ke kružnici platí $AW \cong AT$, $BT \cong BU$, $CU \cong$ $\cong CV$, $DV \cong DW$. Délky těchto úseček označíme l, m, n, p. Podíváme-li se pozorně na obr. 65, vidíme, že součet délek obou základen je

$$l + m + n + p \tag{1}$$

a že témuž číslu se rovná i součet délek obou ramen. Obvod lichoběžníka je tedy

$$2(l + m + n + p). \tag{2}$$

Nyní využijeme podmínky, že střední příčka má délku 1.

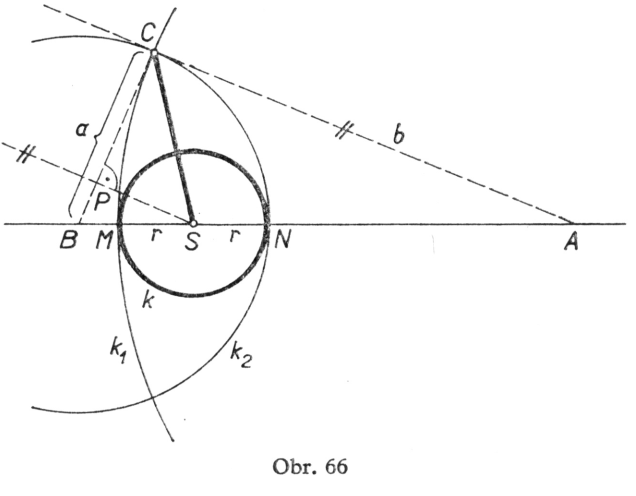
Délka střední příčky se rovná polovině součtu obou základen, tj. podle (1)

$$\tfrac{1}{2}(l + m + n + p) = 1.$$

Dosadíme-li do výrazu (2), dostáváme, že obvod daného lichoběžníka se rovná číslu 4.

36. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC o stranách délek $d(AC) = b = 12$ cm, $d(BC) = a = 5$ cm. Sestrojte kružnici $k = (S; r)$, která se dotýká uvnitř každé z kružnic $k_1 = (A; b)$, $k_2 = (B; a)$ a má střed na AB.

Vypočtěte poloměr r a vzdálenost CS.



Obr. 66

Řešení. Při rýsování obrázku využijeme toho, že úhel ACB je pravý; celá konstrukce je patrna z obr. 66. Dotykový bod kružnic k a k_1 označíme M. Kružnice k a k_2 mají dotykový bod N.

a) Nejprve vypočítáme délku přepony c v centimetrech:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,(\text{cm})$$

Z polohy bodů na přímce AB vyplývá, že

$$c = d(BM) + d(MN) + d(NA)$$

čili

$$c = (a - 2r) + 2r + (b - 2r),$$

takže platí

$$c = a + b - 2r.$$

Proto dostaneme

$$2r = a + b - c = 5\text{ cm} + 12\text{ cm} - 13\text{ cm} = 4\text{ cm}.$$

Odpověď. Poloměr kružnice k je $r = 2$ cm.

b) Úsečka CS je přeponou pravoúhlého trojúhelníka CSP, kde bod P je patou kolmice vedené bodem S na přímku CB. Trojúhelníky BSP a BAC jsou podle věty *uu* podobné; toho využijeme k určení délek odvěsen trojúhelníka CSP. Platí

$$\frac{d(BS)}{d(SP)} = \frac{d(BA)}{d(AC)}$$

čili

$$\frac{3\ \text{cm}}{d(SP)} = \frac{13\ \text{cm}}{12\ \text{cm}},$$

takže

$$d(SP) = \frac{36}{13}\ \text{cm}. \tag{4}$$

Protože $CP = CB - PB$, vypočteme nejprve délku PB. Platí

$$\frac{d(PB)}{d(BS)} = \frac{d(CB)}{d(BA)}$$

čili

$$\frac{d(PB)}{3\ \text{cm}} = \frac{5\ \text{cm}}{13\ \text{cm}},$$

takže

$$d(PB) = \frac{15}{13}\ \text{cm}$$

a

$$d(CP) = 5\ \text{cm} - \frac{15}{13}\ \text{cm} = \frac{50}{13}\ \text{cm}. \tag{5}$$

Podle Pythagorovy věty pak dostaneme

$$d(CS) = \sqrt{(d(CP))^2 + (d(SP))^2}\ \text{cm} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,500}{13^2} + \frac{1\,296}{13^2}}\ \text{cm} =$$

$$= \frac{1}{13}\sqrt{3\,796}\ \text{cm} \doteq \frac{1}{13}\,.\,61{,}61\ \text{cm} = 4{,}74\ \text{cm}.$$

Odpověď. Vzdálenost $CS \doteq 4{,}74$ cm.

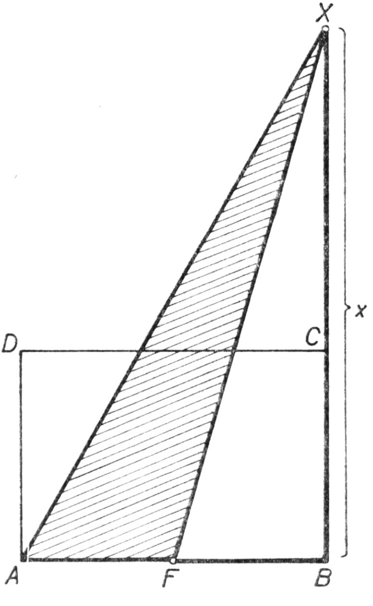
37. Obdélník $ABCD$ má rozměry $d(AB) = 6\frac{3}{5}$ cm, $d(BC) = 4\frac{2}{3}$ cm; označte F střed strany AB. Výpočtem řešte úlohu: Na polopřímce BC určete takový bod X, aby obsah trojúhelníka AFX byl roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníka $ABCD$. (Vypočtěte délku x úsečky BX.)

Řešení (obr. 67). Obsah P obdélníka $ABCD$ je

$$P = 6\frac{3}{5}\,.\,4\frac{2}{3}\ \text{cm}^2.$$

$\frac{5}{8}$ obsahu P je

$$6\,\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}\ \mathrm{cm}^2. \tag{1}$$



Obr. 67

Trojúhelník AFX má stranu AF délky

$$d(AF) = 6\,\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}\ \mathrm{cm} \tag{2}$$

a délku příslušné výšky v centimetrech označíme x; obsah tohoto trojúhelníka je

$$\frac{1}{2} \,.\, d(AF) \,.\, x \text{ cm}^2.$$

Dosaďme sem za $d(AF)$ ze vztahu (2); dostaneme

$$\frac{1}{2} \,.\, 6\frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, x \text{ cm}^2.$$

Toto číslo má být rovno číslu (1); tím dostaneme rovnici (v cm^2)

$$\frac{1}{2} \,.\, 6\frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, x = \frac{5}{8} \,.\, 6\frac{3}{5} \,.\, 4\frac{2}{3} \,.$$

Znásobme tuto rovnici číslem převráceným k číslu $\frac{1}{2} \,.\, 6\frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{2}$; pak se na pravé straně zkrátí $6\frac{3}{5}$ a dostaneme pro x v centimetrech

$$x = \frac{5}{8} \,.\, 4\frac{2}{3} \,.\, 4 \text{ cm};$$

odtud postupně dostáváme

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3}\ \mathrm{cm},$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3}\ \mathrm{cm},$$

$$x = \frac{35}{3}\ \mathrm{cm},$$

$$x = 11\ \frac{2}{3}\ \mathrm{cm}.$$

Odpověď. Délka úsečky BX je $11\frac{2}{3}$ cm.

Zkouška. Obsah T trojúhelníka AFX je (v cm^2)

$$T = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11\frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 33 \cdot 1 \cdot 35}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{4}.$$

Pro obsah P obdélníka $ABCD$ dostáváme (v cm^2)

$$P = 6\ \frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{33}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{154}{5}.$$

Vypočteme $\frac{5}{8}$ jeho obsahu

$$\frac{5}{8}\ P = \frac{154}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{77}{4},$$

a to je skutečně obsah T trojúhelníka AFX v cm^2.

Poznámka. Promyslíte-li si text úlohy, uvážíte-li, které údaje jsou pro řešení úlohy podstatné, a nebudete-li hned dosazovat numerické údaje, zjednoduší se celý výpočet takto:

Označme $d(AB) = a$, $d(AF) = \frac{1}{2}\,a$, $d(BC) = b$, $d(BX) = x$.

Podle textu úlohy má platit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,a \,.\, x = \frac{5}{8}\,a \,.\, b.$$

Po výpočtu x dostaneme

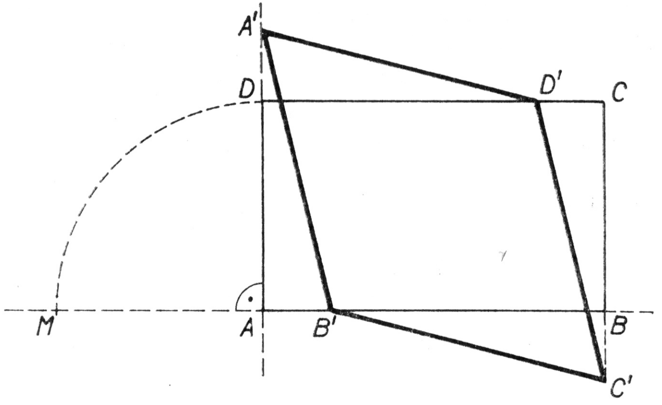
$$x = \frac{5}{2}\,b$$

a po dosazení za $b = 4\,\frac{2}{3}\ \mathrm{cm} = \frac{14}{3}\ \mathrm{cm}$ (za a není třeba dosazovat) je

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3}\ \mathrm{cm} = \frac{35}{3}\ \mathrm{cm} = 11\,\frac{2}{3}\ \mathrm{cm}.$$

38. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $d(AB) = a$, $d(BC) = b$, $a > b$. Na polopřímkách BA, CB, DC, AD sestrojte po řadě body B', C', D', A' tak, aby platilo $AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD'$ a aby $A'B'C'D'$ byl kosočtverec.

Vypočtěte nejprve délku úseku $d(AA') = x$, a pak kosočtverec sestrojte.



Obr. 68

Řešení. Budiž $A'B'C'D'$ kosočtverec (obr. 68). Označme $d(AA') = d(BB') = d(CC') = d(DD') = x$. Pak je $d(AB') = d(CD') = |a - x|$ (nevíme, zda je $a > x$ nebo $x > a$); obdobně je $d(BC') = d(DA') = |b - x|$. Podle Pythagorovy věty a z toho, že $A'B'C'D'$ je kosočtverec, je

$$\begin{aligned} (d(BB'))^2 + (d(BC'))^2 &= (d(B'C'))^2, \\ (d(CC'))^2 + (d(CD'))^2 &= (d(C'D'))^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože je $B'C' \cong C'D'$, plyne z (1)

$$(d(BB'))^2 + (d(BC'))^2 = (d(CC'))^2 + (d(CD'))^2,$$

protože je $d(BB') = d(CC') = x$, dostáváme

$$|b - x|^2 = |a - x|^2. \tag{2}$$

Základy druhých mocnin v rovnici (2) jsou absolutní hodnoty, tedy nezáporná čísla, a proto můžeme každou ze stran rovnice (2) odmocnit a dostaneme správnou rovnici

$$|a - x| = |b - x|. \tag{3}$$

Připustíme-li možnosti jednak $a > x$ nebo $a < x$, jednak $b > x$ nebo $b < x$, dostaneme po odstranění absolutních hodnot dvě rovnice

$$a - x = b - x, \tag{I}$$

$$a - x = x - b. \tag{II}$$

První rovnice je vyloučena, poněvadž je $a > b$. Z druhé rovnice plyne

$$x = \frac{1}{2}(a + b). \tag{4}$$

Obrácením postupu zjistíme, že $A'B'C'D'$ je při takto zvoleném x skutečně kosočtverec. Vzorec (4) zároveň ukazuje, že je

$$b < x < a,$$

tj. body C', A' leží vně obdélníka, B', D' na jeho stranách (viz obr. 68).

Konstrukce. Na polopřímce opačné k AB sestrojíme bod M tak, aby bylo $d(AM) = b$. Pak je $d(BM) = a + b$ a B' je středem úsečky BM, neboť je $d(BB') = \frac{1}{2} d(BM) = \frac{1}{2}(a + b)$. Další body A', C', D' snadno doplníme.

Poznámka. Předpokládáme-li, že na obr. 68 je znázorněno řešení úlohy, zjistíme, že

$$\triangle B'BC' \cong \triangle C'CD'$$

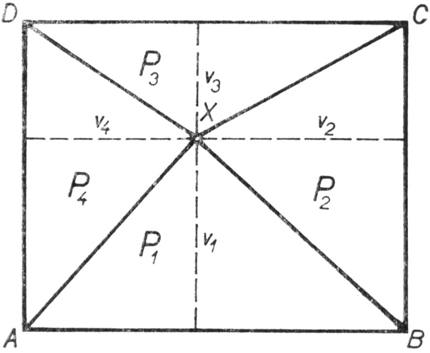
(podle věty *Ssu*, neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí $d(B'B) = d(C'C) = x$, $d(B'C') = d(C'D')$, kde $B'C' > B'B$). Proto je

$$BC' \cong CD',$$

tj. $|a - x| = |b - x|$ a obdobnou úvahou jako v uvedeném řešení zjistíme platnost vzorce (4).

39. Je dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $d(AB) = 2$ m, $d(AD) = 1{,}6$ m. Uvnitř tohoto obdélníka leží bod X; přitom jsou obsahy trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX po řadě úměrné číslům 5, 6, 3, 2.

a) Vypočtěte obsah každého z těchto čtyř trojúhelníků.
b) Vypočtěte vzdálenost bodu X od přímek AB, BC, CD, DA.
c) Sestrojte obdélník $ABCD$ v měřítku 1 : 20 a v něm bod X, který vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 69

Řešení (obr. 69). a) Je $d(AB) = 20$ dm, $d(BC) = 16$ dm. Obsah P daného obdélníka $ABCD$ je 320 dm². Označme P_1, P_2, P_3, P_4 obsahy (v decimetrech čtverečných) trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX. Podle textu úlohy platí

$$P_1 = 5d,\ P_2 = 6d,\ P_3 = 3d,\ P_4 = 2d, \tag{1}$$

kde číslo $d > 0$ musíme vypočítat. Platí

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

neboli (v dm²)

$$320 = 5d + 6d + 3d + 2d;$$

odtud postupně dostaneme

$$16d = 320,$$

$$d = \frac{320}{16},$$

$$d = 20.$$

Ze vztahů (1) pak dostáváme

$$P_1 = 100 \text{ dm}^2, P_2 = 120 \text{ dm}^2, P_3 = 60 \text{ dm}^2, P_4 = 40 \text{ dm}^2. \quad (2)$$

Čísla P_1, P_2, P_3, P_4 jsou zřejmě úměrná číslům 5, 6, 3, 2, jak se přesvědčíme násobením čísel (2) číslem $\frac{1}{20}$. Součet $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 320 \text{ dm}^2$.

b) Označme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4 vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC, CD, DA neboli výšky trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX. Platí po řadě (délky úseček v decimetrech, obsahy v decimetrech čtverečných):

$$P_1 = \frac{1}{2} . AB . v_1, \qquad P_2 = \frac{1}{2} . BC . v_2,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} . CD . v_3, \qquad P_4 = \frac{1}{2} . DA . v_4$$

neboli

$$100 = \frac{1}{2} . 20 . v_1, \qquad 120 = \frac{1}{2} . 16 . v_2,$$

$$60 = \frac{1}{2} . 20 . v_3, \qquad 40 = \frac{1}{2} . 16 . v_4.$$

Po zkrácení a záměně stran rovnic dostáváme

$$10v_1 = 100,\ 8v_2 = 120,\ 10v_3 = 60,\ 8v_4 = 40.$$

Násobme obě strany každé z rovnic po řadě čísly $\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}$; dostaneme

$$v_1 = 10,\ v_2 = \frac{120}{8},\ v_3 = \frac{60}{10},\ v_4 = \frac{40}{8}$$

neboli v decimetrech

$$v_1 = 10 \text{ dm},\ v_2 = 15 \text{ dm},\ v_3 = 6 \text{ dm},\ v_4 = 5 \text{ dm}.$$

Zřejmě platí $v_1 + v_3 = d(BC)$, tj. 16 dm, dále $v_2 + v_4 = d(AB)$, tj. 20 dm.

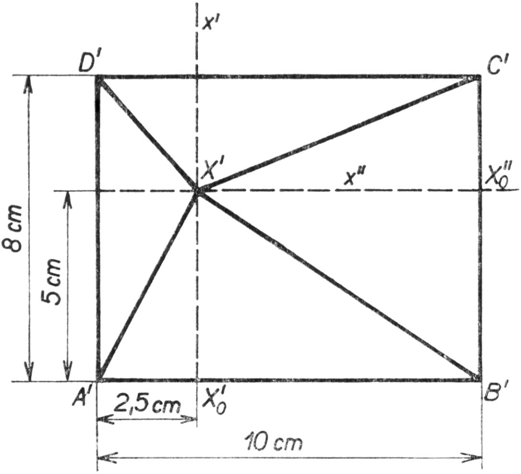
c) (Délky úseček udáváme v decimetrech; obr. 70 zmenšen.) Obdélník $ABCD$ znázorníme obdélníkem $A'B'C'D'$ v měřítku 1 : 20, tj.

$$d(A'B') = \frac{1}{20}\, d(AB),\ d(B'C') = \frac{1}{20} d(BC)$$

neboli

$$d(A'B') = \frac{1}{20} . 20 \text{ dm} = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm},$$

$$d(B'C') = \frac{1}{20} . 16 \text{ dm} = \frac{8}{10} \text{ dm} = 8 \text{ cm}.$$



Obr. 70

Sestrojení obdélníka $A'B'C'D'$ je z vypočítaných rozměrů zřejmé.

Nyní platí

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \frac{v_2}{v_4} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}. \tag{3}$$

Úsečku $A'B'$ délky 1 dm rozdělíme v poměru 3 : 1 [viz (3)]. Provedeme to tak, že ji rozdělíme na 4 rovné díly: délka jednoho dílu je $\frac{1}{4} . d(A'B') = \frac{1}{4}$ dm; části budou $\frac{3}{4}$ dm, $\frac{1}{4}$ dm. Označme X_0' bod úsečky $A'B'$, pro nějž platí $d(A'X_0') = \frac{1}{4}$ dm neboli $d(B'X_0') = \frac{3}{4}$ dm (tj. $d(A'X_0') = 2{,}5$ cm).

Úsečku $B'C'$ délky 0,8 dm = 8 cm rozdělíme v poměru 5 : 3. Provedeme to takto: Rozdělíme ji na 8 rovných dílů: délka jednoho dílu je $\frac{1}{8}\, d(B'C') = \frac{1}{8} . 0{,}8$ dm = 0,1 dm, tj. 1 cm. Části budou:

$$0{,}1 \text{ dm} . 5 = 0{,}5 \text{ dm};\ 0{,}1 \text{ dm} . 3 = 0{,}3 \text{ dm}.$$

Na úsečce $B'C'$ sestrojíme bod X_0'' tak, aby platilo $d(B'X_0'') = 0{,}5$ dm neboli $d(C'X_0'') = 0{,}3$ dm (tj. $d(C'X_0'') = 3$ cm).

Nyní sestrojíme bodem X_0' přímku $x' \parallel B'C'$, bodem X_0'' přímku $x'' \parallel A'B'$. Průsečík přímek x', x'' je bod X'. Tím je celá úloha rozřešena.

40. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ má větší základna AB délku 4 cm; úhlopříčky lichoběžníka jsou navzájem kolmé a dělí se v poměru 2 : 1.

Vypočtěte poloměr kružnice lichoběžníku opsané.

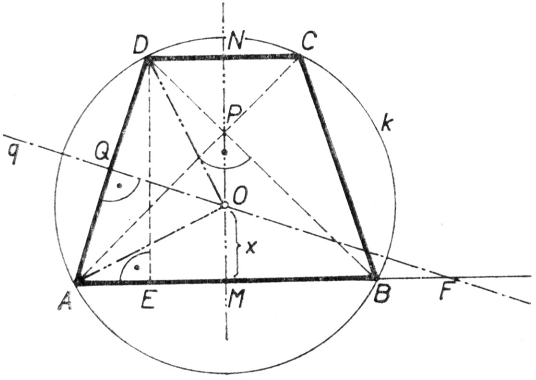
Řešení. V této i v každé jiné geometrické úloze, kterou řešíme početně, velmi záleží na pořízení zřetelného obrázku, na jeho vhodném označení i postupném doplňování dosaženými výsledky nebo na vhodném uplatňování známých geometrických vět.

Na obrázku lichoběžníka $ABCD$, o němž předpokládáme, že má dané vlastnosti (obr. 71), označíme P průsečík úhlopříček a M, N po řadě středy úseček AB, CD. Přímka MN je osou souměrnosti lichoběžníka a dělí i úhel APB na dva shodné úhly, takže $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPM = 45°$. Proto pravoúhlý trojúhelník AMP ($\sphericalangle AMP = 90°$) je rovnoramenný a platí

$$d(AM) = d(MP) = 2\,\text{cm}; \quad d(AP) = 2\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Pak podle podmínky úlohy je $d(PC) = \sqrt{2}$ cm a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků AMP a CNP vyplývá, že $d(PN) = 1$ cm, takže $d(MN) = 3$ cm a dále $d(NC) = 1$ cm, takže $d(DC) = 2$ cm.

Střed O kružnice opsané lichoběžníku leží na přímce MN a např. na ose q strany AD. Dokážeme-li, že průsečík přímek MN a q padne dovnitř úsečky MN tak, jak nám vyšlo na obrázku, pak budeme moci při výpočtu poloměru $r = d(AO) = d(DO)$ použít trojúhelníky AMO a DNO.



Obr. 71

Nejprve tedy početní ověření polohy bodu O mezi body M, N: Střed úsečky AD označme Q; bod Q přímky q leží tedy uvnitř polorovin MNA, AMN a NDA. Označme dále E patu kolmice bodem D k přímce AB; tu je $d(AE) = d(AM) -$

$- d(ME) = 2$ cm $- 1$ cm $= 1$ cm. V pravoúhlém trojúhelníku ADE o přeponě AD pak podle Pythagorovy věty platí:

$$(d(AD))^2 = (d(AE))^2 + (d(DE))^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \text{ (v cm}^2)$$

čili

$$d(AD) = \sqrt{10}\,\text{cm}; \; d(AQ) = \frac{1}{2}\sqrt{10}\,\text{cm}.$$

Protože z trojúhelníku AED vyplývá, že úhel DAE je ostrý, protnou se přímky q a AE v bodě F a vytvoří rovněž pravoúhlý trojúhelník AQF. Trojúhelníky AED a AQF jsou podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků podobné, a platí pak např.

$$\frac{d(AE)}{d(AD)} = \frac{d(AQ)}{d(AF)};$$

odtud po dosazení za $d(AE) = 1$ cm, $d(AD) = \sqrt{10}$ cm a $d(AQ) = \frac{1}{2}\sqrt{10}$ cm dostaneme

$$d(AF) = 5 \text{ cm}.$$

Avšak $d(AB) = 4$ cm, takže bod F padne do poloroviny MNB; bod Q leží v polorovině opačné. Potom bod O úsečky QF leží uvnitř poloroviny ABD, a tedy i uvnitř úsečky MN.

Nyní už vypočteme poloměr $r = d(AO) = d(DO)$ opsané kružnice z trojúhelníků AMO a DNO. Pomocně označíme $d(MO) = x$, takže je $d(NO) = 3 - x$ (oba údaje jsou v centimetrech). Podle Pythagorovy věty pro uvedené pravoúhlé trojúhelníky dostaneme:

$$(d(AM))^2 + (d(MO))^2 = r^2, \ (d(ON))^2 + (d(ND))^2 = r^2$$

(vše v cm²) neboli

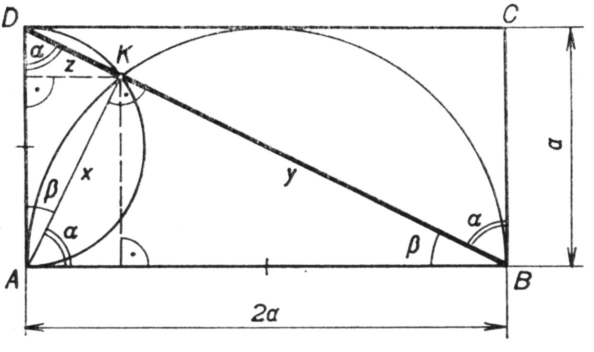
$$4 + x^2 = r^2, \ \ (3 - x)^2 + 1^2 = r^2. \qquad (1)$$

Porovnáním obou vyjádření r^2 dostaneme rovnici

$$4 + x^2 = 9 - 6x + x^2 + 1$$

a z ní vypočteme $x = 1$, což značí, že bod O je středem úsečky MP. Dosazením do (1) dostaneme $r^2 = 5$ (v cm²) čili $r = \sqrt{5}$ cm $\doteq$ 2,24 cm.

Odpověď. Hledaný poloměr opsané kružnice je $r = \sqrt{5}$ cm.



Obr. 72

41. Je dán obdélník $ABCD$, v němž $d(AB) = 2a$, $d(BC) = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K.

a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD.

b) Vypočtěte vzdálenosti bodu K od vrcholů A, B, D.

Řešení. a) Poněvadž podle Thaletovy věty (viz obr. 72) je

$$\sphericalangle AKD = 90° \text{ a zároveň } \sphericalangle AKB = 90°,$$

leží body B, K, D v přímce, tj. na úhlopříčce BD daného obdélníka.

b) Označme (v centimetrech)

$$d(AK) = x,\ d(BK) = y,\ d(BD) = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABK plyne

$$x^2 + y^2 = 4a^2,$$

a podobně z pravoúhlého trojúhelníka ADK plyne

$$x^2 + (a\sqrt{5} - y)^2 = a^2.$$

Upravujeme druhou rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ay\sqrt{5} + 5a^2 = a^2.$$

Dosadíme z první rovnice

$$4a^2 - 2ay\sqrt{5} + 4a^2 = 0$$

a odtud

$$y = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad x = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Nakonec ještě dostaneme (v centimetrech)

$$d(DK) = a\sqrt{5} - y = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Jiné řešení. Označme $d(DK) = z$ (v centimetrech). Z podobnosti $\triangle AKB \sim \triangle DKA$ (věta *uu*) plyne

$$z : x = x : y.$$

Dosadíme-li

$$z = a\sqrt{5} - y, \tag{1}$$

dostáváme

$$ay\sqrt{5} - y^2 = x^2,$$

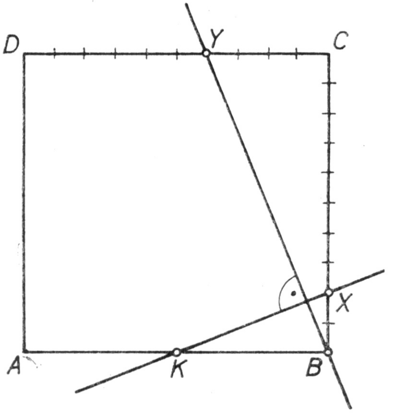
odtud s použitím vztahu

$$x^2 + y^2 = 4a^2 \tag{2}$$

plyne $y = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$. Z (1) pak určíme z. Z (2) můžeme určit x. Rychleji lze x určit z podobnosti $\triangle ABK \sim \triangle DBA$ (věta *uu*), odkud plyne

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

42. Je dán čtverec $ABCD$ o straně $a = 10$ cm. Každá ze stran BC, CD je rozdělena devíti body na deset shodných úseček. Střed K strany AB je spojen s dělicím bodem X strany BC a vrchol B je spojen s dělicím bodem Y strany CD. Které dělicí body X, Y musíme vybrat, aby přímky KX, BY byly navzájem kolmé?



Obr. 73

Řešení. Dělicí bod na straně BC označme X a dělicí bod na straně CD označme Y (obr. 73). Aby přímky KX, BY byly k sobě kolmé, musí platit

$$\triangle KBX \sim \triangle BCY.$$

Odtud máme

$$d(BX) : d(BK) = d(CY) : d(BC), \tag{1}$$

ale

$$d(BK) = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm},$$

$$d(BC) = a = 10 \text{ cm}.$$

Dále ještě označme

$$d(BX) = \alpha,$$

$$d(CY) = \beta,$$

kde pro přirozená čísla α, β (v centimetrech) platí

$$0 < \alpha < 10, 0 < \beta < 10.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

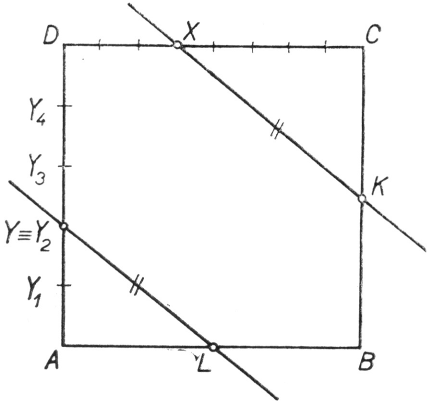
$$\alpha : \frac{a}{2} = \beta : a,$$

$$\beta = 2\alpha.$$

Vyhovují tyto hodnoty:

α	1	2	3	4
β	2	4	6	8

Úloha má podle toho čtyři různá řešení.



Obr. 74

43. Je dán čtverec $ABCD$. Stranu CD rozdělte na n shodných dílů tak, aby na ní existoval dělicí bod X takový, že

$$KX \parallel YL. \qquad (1)$$

K je střed strany BC, L je střed strany AB a Y je dělicí bod na straně AD, která je rozdělena na 5 shodných dílů.

Určete nejmenší n této vlastnosti.

Řešení (obr. 74). Ze vztahu (1) plyne

$$\triangle ALY \sim \triangle CXK,$$

tj.

$$\frac{d(AY)}{d(AL)} = \frac{d(CK)}{d(CX)}. \tag{2}$$

Označíme-li délku strany čtverce a, potom rovnost (2) nabývá tvaru

$$\frac{r \cdot \frac{a}{5}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{s \cdot \frac{a}{n}}, \tag{3}$$

kde r, s jsou přirozená čísla vyhovující nerovnostem

$$1 \leqq r < 5,\ 1 \leqq s < n. \tag{4}$$

Vztah (3) po úpravě zní

$$4rs = 5n. \tag{5}$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že n je násobkem 4. Nejmenší takové n jsou 4. Pro $n = 4$ dává (5)

$$rs = 5,$$

což však nelze splnit čísly r, s vyhovujícími nerovnostem (4). Pro $n = 8$ rovnost (5) zní

$$rs = 10.$$

Této nerovnosti vyhovují čísla $r = 2$, $s = 5$, která také splňují nerovnosti (4). Potom $d(AY) = \frac{2}{5}a$, $d(CX) = \frac{5}{8}a$. V tomto případě skutečně platí (1).

Závěr. Nejmenší n požadované vlastnosti je $n = 8$.

Jiné řešení. Označme Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 dělicí body na straně AD (viz obr. 74). Ze vztahu (2) plyne

$$d(CX) = \frac{d(CK).d(AL)}{d(AY)} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{d(AY)}.$$

Pro Y_1 platí

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{a} = \frac{5}{4}a, \text{ tj. } X \text{ by nebyl bodem úsečky } DC;$$

pro Y_2 je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{2a} = \frac{5}{8}a, \text{ tj. } n = 8;$$

pro Y_3 je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{3a} = \frac{5}{12} a, \text{ tj. } n = 12;$$

pro Y_4 je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{5}{16} a, \text{ tj. } n = 16.$$

Závěr. Nejmenší n požadované vlastnosti je tedy $n = 8$.