[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

Předmluva

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 5–10.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405280

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Předmluva

Dáváme do rukou českým i slovenským čtenářům nové rozšířené a přepracované vydání sbírky řešených soutěžních úloh *matematické olympiády kategorie Z,* tj. úloh určených pro žáky nejvyšších ročníků základních škol.

Při přípravě tohoto nového vydání jsme uvážili zejména to, že nynější žáci 7. a 8. ročníku ZŠ jsou aspoň o rok mladší než žáci dřívějšího nejvyššího ročníku ZDŠ, a tedy jejich matematický fond je podstatně menší. Nejde jenom o matematické vědomosti, ale i o znalost postupů řešení a všeobecně o zkušenosti v řešení úloh. Proto jsme přidali do sbírky hlavně jednodušší úlohy a v řešení jsme se snažili napovídat čtenářům aspoň částečně postup řešení naznačením odpovědí na otázku »*jak na to*«. Zdá-li se vám tato pomoc nedostatečná, uvažte, že jsme byli vázáni zpracovat v podstatě jen úlohy, *které prošly soutěží* a pokud možno je neměnit. Proto jsme upravovali hlavně řešení, v nichž jsme se snažili vyhnout se trikům, kde některé kroky »padají z nebe« a které mohou čtenáře znechucovat. Náš názor je, že k řešení úlohy se má dospět postupem »přirozeným«, ne pomocí umělých obratů. K přirozenému postupu patří - zvláště na úrovni kategorie *Z - zkoušení, experimentování, vyšetřování speciálních případů, sestavování tabulek.* Velmi často se při řešení tzv. *slovních úloh* podaří pomocí jednoduché tabulky nalézt výrokovou formu potřebnou pro řešení úlohy.

To se osvědčuje zvláště tehdy, když jde o přechod od slovního vyjádření k vyjádření algoritmickému (pomocí matematických symbolů, tzv. sestavování rovnic). Např. máme úlohu s textem:

Jsem dnes tak stár, jako byl můj strýc tehdy, když byl dvakrát tak stár, jako jsem byl já. Jak je dnes stár strýc?

Použijeme pomocné tabulky pro počty let:

	dnes	dříve
já	$2x$	x
strýc		$2x$

Rozdíl stáří strýcova a mého je podle druhého sloupce $2x - x = x$; do prázdného okénka je tedy třeba vepsat $3x$. Úloha má neomezený počet řešení, daný např. tabulkami:

30	15
45	30

nebo

40	20
60	40

nebo

20	10
30	20

Musíme uvážit, že žáky zajímají takové úlohy, k jejichž řešení jim sice vystačí jejich školské vědomosti, ale jejichž výsledek jim není předem znám, na který mohou být zvědavi. Uvedeme dvě ukázky toho druhu.

I. Ke každému přirozenému číslu x lze určit jednociferné číslo $\bar{x}$ takto:

Sestrojíme posloupnost přirozených čísel, jejíž první člen je číslo x a každý další člen je ciferný součet předcházejícího čísla; poslední člen posloupnosti je jednociferné číslo $\bar{x}$.

Např. $x = 21\,594$; $21\,594 \to 2 + 1 + 5 + 9 + 4 = 21 \to \to 2 + 1 = 3$, $\bar{x} = 3$.

Nebo $x = 835\,696$; $835\,696 \to 8 + 3 + 5 + 6 + 9 + 6 = = 37 \to 10 \to 1$, $\bar{x} = 1$. Toto číslo $\bar{x}$ budeme nazývat stručně zbytek.

Budeme zkoumat vztah zbytků dvou činitelů ke zbytku jejich součinu. Je např. $354 \,.\, 61 = 21\,594$, $\overline{354} = 3$*), $\overline{61} = 7$, $\overline{21\,594} = 3$, $\overline{3 \,.\, 7} = \overline{21} = 3$. Jiný příklad: $754 \,.\, 96 = 72\,384$, $\overline{754} = 7$, $\overline{96} = 6$, $\overline{72\,384} = 6$, $\overline{7 \,.\, 6} = \overline{42} = 6$. Další příklad: $83 \,.\, 50 = 4150$, $\overline{83} = 2$, $\overline{50} = 5$, $\overline{4150} = 1$, $\overline{2 \,.\, 5} = \overline{10} = 1$.

Příklady tohoto druhu nás vedou k domněnce, že platí obecně:

Vypočteme zbytek z_1 součinu dvou čísel;
vypočteme zbytky z_2, z_3 obou činitelů;
vypočteme zbytek z_4 součinu $z_2 \,.\, z_3$;

pak platí

$$z_1 = z_4.$$

Pokuste se vyslovit tuto domněnku slovy. Můžete ji objasnit ještě na dalších číselných příkladech.

Mnohé z čtenářů bude asi zajímat odpověď na otázku, *zdali* ta věta opravdu obecně platí a *proč*, tj. otázka odůvodnění věty. Jistě si vzpomenou na aritmetiku, kde ciferný součet souvisí

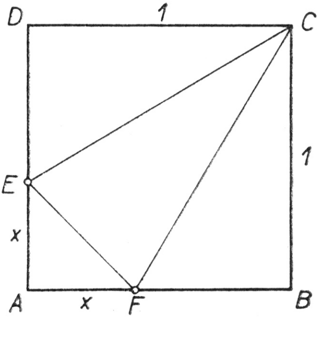
*) Zápis $\overline{354}$ znamená zbytek čísla 354.

úzce s kritériem dělitelnosti devíti. Nebudeme větu dokazovat, prozradíme jen, že důkaz se opírá o vzorec

$$x = \bar{x} + 9n,$$

kde x je přirozené číslo, $\bar{x}$ jednociferné číslo, $9n$ vhodný násobek devíti; je tedy $\bar{x}$ zbytek při dělení čísla x devíti.

II. Druhá ukázka je z geometrie. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1 (obr. 1). Jemu je vepsán rovnoramenný trojúhelník EFC ($CE = CF$). Tím se rozdělí čtverec $ABCD$ na čtyři trojúhelníky. Rozdělení je takové, že tři pravoúhlé trojúhelníky AEF, CDE, CBF mají obsahy sobě rovné. Jaký obsah má trojúhelník CEF?



Obr. 1

Tato úloha je problém s algebraickými výpočty. Označíme délky $AE = AF = x$ a vyjádříme obsahy:

$$\triangle\, AEF = \tfrac{1}{2}\, x^2, \quad \triangle\, CDE = \triangle\, CBF = \tfrac{1}{2}\,(1 - x).$$

Z požadavku úlohy $\triangle AEF = \triangle CDE$ dostaneme pro délku x rovnici:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Na levé straně provedeme *úpravu, která stojí za zapamatování:*

$$(\star) \qquad (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 1 = 0$$

a dále

$$(\star\star) \qquad x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Obsah $\triangle CEF$ dostaneme ze vztahu

$$\triangle CEF = 1 - \tfrac{3}{2}x^2,$$

když do něj dosadíme za x ze vztahu (**).

Úloha je ukázka složitější úpravy algebraických výrazů. Úprava (*) málo přesahuje rámec školské matematiky; ale nezapomeňte, že cíl *MO* není jen soutěžit, ale také se něčemu ne příliš složitému navíc přiučit. Uvažte ještě, že matematika není jen *řešení úloh,* ale je třeba také se seznámit se základními poznatky (pojmy a větami), *které tvoří tzv. teorii.*

Především jsme se však snažili zdůraznit, vyložit a rozvést pracovní metody a postupy, neboť ty jsou pravým klíčem ke studiu matematiky.

Ve sbírce jsme ponechali s malými úpravami rozčlenění na kapitoly podle témat. Má tedy toto vydání 12 kapitol s tímto obsahem:

- Úlohy z aritmetiky přirozených čísel
- Úlohy z algebry
- Úlohy logického charakteru

- Úlohy z reality
- Úlohy na konstrukce čar vzniklých pohybem bodů
- Úlohy na výpočet velikostí obrazců a ploch
- Důkazové úlohy v geometrii
- Geometrické úlohy s výpočty
- Nerovnosti v geometrii
- Úlohy na množiny všech bodů dané vlastnosti
- Konstrukční úlohy
- Stereometrické úlohy

Budou-li se zdát čtenářům některé úlohy příliš těžké, ať uváží, že sbírka je určena žákům, kteří mají zvláštní zájem o matematiku a jisté, třeba minimální schopnosti pro ni. Úlohy rázu školských cvičení by takovým žákům nic nedaly. Jak už jsme řekli, je třeba, aby soutěžní úlohy splnily i své studijní poslání - aby se řešitelé naučili něčemu novému, aspoň pokud jde o způsoby řešení úloh.

Nakonec ještě jedna poznámka k označování (symbolice). V tomto novém vydání byly přizpůsobeny zápisy novému způsobu zavedenému do škol. To se týká hlavně geometrie; tak např. Pythagorův vzorec se místo dřívějšího

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

píše

$$(d(AC))^2 + (d(BC))^2 = (d(AB))^2.$$

Postiženy jsou zejména výpočty týkající se délky úsečky, neboť pro délku úsečky se vyskytují v různých knihách znaky AB, $\overline{AB}$, $|AB|$, $d(AB)$. Velikosti úhlu se tyto změny nedotkly.

Autoři