ŘEŠENÍ ÚLOH

1. Rozklad čísla 1 000 000 na prvočinitele je $2^6 5^6$. Trojice, jejichž počet hledáme, se tedy skládají právě z čísel, která mají rozklad na prvočinitele

$$x = 2^a 5^p, \quad y = 2^b 5^q, \quad z = 2^c 5^r,$$

kde a, b, c, p, q, r jsou nezáporná celá čísla, pro něž

$$a + b + c = 6, \quad p + q + r = 6.$$

Prozkoumáme-li systematicky všechny možnosti, najdeme 28 uspořádaných trojic nezáporných celých čísel se součtem 6. Hledaný počet je tedy $28 . 28 = 784$.

2. Všechny uspořádané trojice, jejichž součet je 78, dostaneme takto: První číslo p zvolíme libovolně mezi 1 a 76, druhé číslo q zvolíme libovolně mezi 1 a $78 - p - 1$ a třetí číslo je pak určeno jednoznačně - je to $78 - p - q$. Při pevně zvoleném p dostaneme $78 - p - 1$ takových trojic, a protože p probíhá čísla $1, 2, \ldots, 76$, máme celkem

$$76 + 75 + \ldots + 1 = (76 + 1) + (75 + 2) + \ldots + \\ + (39 + 38) = 38 . 77 = 2926$$

uspořádaných trojic přirozených čísel, jejichž součet je 78. V jediném rozkladu $26 + 26 + 26$ jsou všechny tři sčítance stejné. Rozkladů, ve kterých jsou právě dva sčítance stejné, je celkem 37 - jsou to rozklady $1 + 1 + 76$, $2 + 2 + 74$, ..., $38 + 38 + 2$ s výjimkou rozkladu $26 + 26 + 26$. Každý takový rozklad se mezi našimi trojicemi vyskytuje třikrát. Každý rozklad v tři navzájem různé sčítance se mezi našimi trojicemi vyskytuje šestkrát, je jich tedy

$$\frac{2\,926 - 1 - 3 \,.\, 37}{6} = 469.$$

Hledaný počet rozkladů je $1 + 37 + 469 = 507$.

3. Sčítanců je $6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 720$. Na místě jednotek je každá z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 120 sčítancích, číslice na místě jednotek tedy k součtu přispějí číslem

$$120\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 120 \,.\, 21 = 2520.$$

Analogicky je tomu i u ostatních řádů. Hledaný součet je

$$2520 \,.\, 111\,111 = 279\,999\,720.$$

4. Před n-tou jedničkou je $n - 1$ jedniček a

$$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

nul, tedy n-tá jednička stojí na

$$n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2}\text{-tém místě.}$$

Snadno zjistíme, že největší přirozené číslo n, pro které je

$$\frac{n(n+1)}{2} \leqq 1\,000\,000,$$

je 1413. V našem čísle je tedy 1413 jedniček a poslední je na

$$\frac{1413 \,.\, 1414}{2} = 998\,991\text{-tém místě.}$$

5. Ať si vezmeme kterýkoli z uvažovaných výrazů, můžeme vždy postupně provést úpravy naznačené závorkami a dospět k výrazu tvaru

$$u - v \,\mathrm{A}\, x \,\mathrm{B}\, y \,\mathrm{C}\, z,$$

kde každý ze symbolů A, B, C znamená buď + nebo —. Výrazů tohoto tvaru existuje 8. Ukážeme, že každý z nich může vzniknout popsaným způsobem:

$$u - v + x + y + z = u - (v - x - y - z),$$

$$u - v + x + y - z = u - (v - x - y) - z,$$

$$u - v + x - y + z = u - (v - x) - (y - z),$$

$$u - v + x - y - z = u - (v - x) - y - z,$$

$$u - v - x + y + z = u - v - (x - y - z),$$

$$u - v - x + y - z = u - v - (x - y) - z,$$

$$u - v - x - y + z = u - v - x - (y - z),$$

$$u - v - x - y - z = (u - v) - x - y - z.$$

Pro jakoukoliv pětici čísel x, y, z, u, v nabývají tedy všechny výrazy popsané v úloze nejvýše 8 různých hodnot. Přitom existují pětice, pro něž uvedených 8 výrazů nabývá 8 různých hodnot, např. $u = v = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Hledaný počet je 8.

6. Nejprve dokážeme, že můžeme dostat součty

$$-1978, -1976, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 1974, 1976.$$

Součet tvaru $-2k$ pro $k = 989, 988, \ldots, 1$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1 - \underbrace{(1 + 1) - (1 + 1) - \ldots - (1 + 1)}_{k \text{ párů závorek}} - 1 + 1 - \ldots +$$

$$+ 1 - 1.$$

Součet tvaru $2k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 988$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1 - (1 + 1 - \underbrace{(1 + 1) - (1 + 1) - \ldots - (1 + 1)}_{k + 1 \text{ párů závorek}}) - 1 +$$
$$+ \ldots + 1 - 1.$$

Ještě dokážeme, že jiné hodnoty dostat nemůžeme. Po doplnění závorek dostaneme výraz, který lze upravit na výraz bez závorek s 1980 členy, který se bude od původního lišit jen znaménky členů. Je-li v něm a znamének $+$ a b znamének $-$, je jeho součet $a - b$, a je tedy sudý, protože $a + b = 1980$. První člen má vždy kladné a druhý záporné znaménko, takže součty -1980 ani 1980 vzniknout nemohou. Součet zřejmě nemůže v absolutní hodnotě přesáhnout 1980. Zbývá dokázat, že nemůže vzniknout ani součet 1978.

a) Má-li po odstranění závorek čtvrtý člen znaménko $-$, pak alespoň dva členy (druhý a čtvrtý) mají znaménko $-$ a součet nemůže přesáhnout 1976.

b) Má-li čtvrtý člen znaménko $+$, znamená to, že leží uvnitř závorky, před kterou je znaménko $-$. V této závorce leží i třetí člen a ten pak má v upraveném výrazu znaménko $-$. Opět tedy alespoň dva členy mají znaménko $-$ a součet nemůže přesáhnout 1976.

7. Počet účastníků biologické, fyzikální a matematické olympiády označme b, f, m. Dále označme p_1 počet žáků, kteří dělají právě jednu olympiádu, a a_1, resp. a_2, počet žáků, kteří dělají alespoň jednu, resp. alespoň dvě olympiády. Podle úlohy je

$$f = 2\,m, \quad m = 3\,b, \quad p_1 = 12, \quad a_2 = 4.$$

Zřejmě

$$a_1 = p_1 + a_2 = 12 + 4 = 16.$$

Dále je

$$f \leqq a_1 \leqq b + f + m$$

čili

$$6b \leqq 16 \leqq 10b.$$

Této nerovnici vyhovuje jediné celé číslo b, totiž $b = 2$. Je tedy $b = 2$, $m = 6$, $f = 12$.

8. Označme a, b, c, d počty rekreantů přihlášených na jednotlivé rekreace a p_1, p_2, p_3, p_4 počet lidí přihlášených na právě jednu, právě dvě, právě tři a právě čtyři rekreace. V součtu $a + b + c + d$ je každý rekreant započítán tolikrát, na kolik rekreací se hlásí, platí tedy

$$a + b + c + d = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4. \tag{1}$$

Je dáno $a = 195$, $b = 203$, $c = 106$, $d = 329$, $p_2 = 267$, $p_3 = 0$, $p_4 = 2$. Po dosazení do (1) vyjde $p_1 = 291$.

9. Počet prvků konečné množiny $\mathbf{M}$ označme $|\mathbf{M}|$. V naší úloze je

$$|\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3| = |\mathbf{M}_1| + |\mathbf{M}_3| = m_1 + m_3,$$

$$|\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4| = |\mathbf{M}_2| + |\mathbf{M}_4| = m_2 + m_4,$$

protože v obou případech jde o disjunktní množiny. Zřejmě

$$|\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3| \leqq |\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4|, \qquad (1)$$

$$|\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4| \leqq |\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4|. \qquad (2)$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leqq 2s,$$

což jsme měli dokázat. Rovnost zde nastane, právě když nastane v obou nerovnostech (1), (2), což bude, právě když

$$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_4 = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4 .$$

10. Označme ještě p počet prvků průniku všech tří uvažovaných množin. Ve sjednocení všech tří množin leží p prvků, z nichž každý je ve všech třech uvažovaných množinách, a $s - p$ prvků, z nichž každý leží aspoň v jedné a nejvýše ve dvou z uvažovaných množin. Platí tedy nerovnosti

$$3p + s - p \leqq m_1 + m_2 + m_3 \leqq 3p + 2(s - p),$$

neboli

$$s + 2p \leqq m_1 + m_2 + m_3 \leqq p + 2s.$$

a) Je-li

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqq 2s + 1,$$

je

$$p \geqq m_1 + m_2 + m_3 - 2s \geqq 1.$$

b) Je-li $p \geqq 1$, je

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqq s + 2p \geqq s + 2.$$

Pro množiny $\mathbf{M}_1 = \{a, b\}$, $\mathbf{M}_2 = \{b, c\}$, $\mathbf{M}_3 = \{a, c\}$ je $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, $s = 3$ a splňují tedy podmínku

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqq s + 2.$$

Přesto je $p = 0$.

11. Mějme tři konečné množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$. Označme m_1, m_2, m_3, s, p počty prvků těchto tří množin, jejich sjednocení a průniku. Stejně jak v předešlé úloze dokážeme, že pro tato čísla platí nerovnost

$$s + 2p \leqq m_1 + m_2 + m_3 \leqq p + 2s.$$

Je tedy

$$m_1 + m_2 + m_3 - 2s \leqq p \leqq \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 - s). \quad (1)$$

Vezmeme-li za množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ množiny lidí, kteří nakoupili textil, knihy a desky, bude $s = 100$, $m_1 = 80$, $m_2 = 70$

a $m_3 = 55$. Dosadíme-li do (1), dostaneme pro počet lidí, kteří nakoupili ode všeho trojího zboží,

$$5 \leqq p \leqq 52.$$

Ukážeme ještě, že obou hranic může být dosaženo. Koupilo-li si 5 lidí výrobky všech tří druhů, 45 lidí jen textil a knihy, 30 lidí jen textil a desky a 20 lidí jen knihy a desky, jsou podmínky úlohy splněny. Jsou splněny i v případě, kdy si 52 osoby koupily trojí zboží, 27 osob jen textil, 18 osob jen knihy a 2 osoby jen desky a 1 osoba jen textil a desky.

12. Z rovností $365 = 7 . 52 + 1$ a $366 = 7 . 52 + 2$ je vidět, že nepřestupný rok končí stejným dnem v týdnu jako začal, zatímco přestupný rok končí dnem v týdnu bezprostředně následujícím po dnu, kterým začal. Sestavíme tabulku dnů, jimiž začínají jednotlivé roky:

1905	Ne	1912	Po	1919	St	1926	Pá
1906	Po	1913	St	1920	Čt	1927	So
1907	Út	1914	Čt	1921	So	1928	Ne
1908	St	1915	Pá	1922	Ne	1929	Út
1909	Pá	1916	So	1923	Po	1930	St
1910	So	1917	Po	1924	Út	1931	Čt
1911	Ne	1918	Út	1925	Čt	1932	Pá

Rok 1933 pak začíná nedělí stejně jako před 28 lety. Protože číslo 28 je dělitelné čtyřmi, bude se situace po 28 letech opakovat. Pro léta 1933—1960, 1961—1988, 1989—2016 bude rozložení dnů, na které připadne Nový rok, stejné jako v letech 1905—1932. Z let, která začínají nedělí, zbývá vybrat jen ty roky, které nejsou přestupné. Dostaneme roky 1905, 1911, 1922, 1933, 1939, 1950, 1961, 1967, 1978, 1989 a 1995.

13. Nejprve si všimněme, jak jdou za sebou dny, na které připadá Nový rok, uvnitř jednotlivých staletí. Nepřestupný rok má $365 = 7.52 + 1$ a přestupný $366 = 7.52 + 2$ dnů. Označíme-li A, B, C, D, E, F, G prvních sedm dní r. 1601, můžeme tak sestavit tabulku, na které dny připadl Nový rok v dalších letech 17. století:

1601 *A*	1608 *B*	1615 *D*	1622 *F*
1602 *B*	1609 *D*	1616 *E*	1623 *G*
1603 *C*	1610 *E*	1617 *G*	1624 *A*
1604 *D*	1611 *F*	1618 *A*	1625 *C*
1605 *F*	1612 *G*	1619 *B*	1626 *D*
1606 *G*	1613 *B*	1620 *C*	1627 *E*
1607 *A*	1614 *C*	1621 *E*	1628 *F*

Nový rok 1629 připadl na den A, a protože číslo 28 je dělitelné čtyřmi, po 28 letech se vždy situace opakuje. Naše tabulka tedy platí i pro další 28letá období 1629—1656, 1657—1684 a začátek tabulky pro posledních 16 let 1685 až 1700. Zjistíme tak, že ze sta Nových roků 1601—1700 jich připadlo po 14 na dny A, C, E, F, G a po 15 na dny B, D. Prozkoumáme ještě přechod do dalšího staletí. Nový rok 1700 připadl na den E, a protože rok 1700 nebyl přestupný, Nový rok 1701 připadl na den F. Za sto let 1601—1701 se tedy Nový rok posunul o pět dnů, z A na F. Stejně velká změna nastane i v dalších staletích, než ji naruší 29. únor 2000.

Nový rok 1801 připadl tedy na den D a Nový rok 1901 na den B. Posuneme-li o pět dnů výsledky ze 17. století, zjistíme, že v letech 1701—1800 připadá Nový rok 14krát na dny F, A, C, D, E a 15krát na dny G, B, v letech 1801—1900 14krát na dny D, F, A, B, C a 15krát na dny E, G a v letech 1901—2000 14krát na dny B, D, F, G, A a 15krát na dny C, E. Celkem tedy v letech 1601—2000 připadá Nový rok 56krát na dny A, F, 57krát na dny C, D a 58krát na dny B, E, G.

Zbývá zjistit, který den jsme označili A. Určíme-li Nový rok třeba právě probíhajícího roku pomocí naší tabulky a výsledek srovnáme se skutečností, zjistíme, že symbolu A odpovídá pondělí.

14. Mezi dvěma po sobě následujícími 29. únory většinou uplyne $4 . 365 + 1 = 208 . 7 + 5$ dnů. Posledních sedm 29. únorů v uvažovaném období tedy připadlo na dny

1972 Út
1968 Čt
1964 So
1960 Po
1956 St
1952 Pá
1948 Ne

Protože 29. únor 1944 byl opět v úterý, opakuje se tento 28letý cyklus, dokud ho nenaruší přechod přes rok, jehož letopočet je dělitelný stem a není dělitelný čtyřmi sty. Ten není přestupný a mezi posledním 29. únorem příslušného století a prvním 29. únorem následujícího století uplyne $8 . 365 + 1 = 417 . 7 + 2$ dnů. Takto zjistíme, že v letech 1901—1972 byly 29. února dvakrát středa, pátek a neděle a třikrát ostatní dny, přičemž 29. 2. 1904 bylo pondělí. Rok 1900 přestupný nebyl, takže 29. 2. 1896 byla sobota a v letech 1801—1900 byl 29. únor čtyřikrát v pondělí, středu a sobotu a třikrát v ostatních dnech. 29. 2. 1804 byla středa, takže 29. 2. 1796 bylo pondělí. Výsledky za léta 1801—1900 můžeme přenést na léta 1701—1800 s tím, že údaje posuneme o dva dny (protože 29. 2. 1896 byla sobota a 29. 2. 1796 pondělí): v těchto letech byl 29. únor čtyřikrát ve středu, v pátek a pondělí a třikrát v ostatních dnech. Dalším posunutím o dva dny dostaneme údaje za léta 1601—1700: čtyřikrát pátek, neděle a středa, třikrát ostatní dny, přitom 29. 2. 1604 byla neděle. Došli jsme k přestupnému roku 1600 a zbývá ještě započítat prvních pět 29. únorů:

1600	Út
1596	Čt
1592	So
1588	Po
1584	St

Ve zkoumaném období byl 29. únor v pondělí a ve středu 15krát, v sobotu 14krát, v úterý, čtvrtek a pátek 13krát a v neděli 12krát. Nejméně často byl tedy v neděli.

15. Vzdálenost budeme měřit v kilometrech, čas v hodinách, rychlost v km/h. Hledanou vzdálenost a rychlost označme *d, v*. Kdyby auto rychlost nesnížilo, trvala by mu cesta $\dfrac{d}{v}$. Jelo-li hodinu rychlostí v a zbylou vzdálenost $d - v$ rychlostí $\dfrac{3}{5}\,v$, trvala mu cesta

$$1 + \frac{d - v}{\frac{3}{5}\,v},$$

platí tedy

$$1 + \frac{d - v}{\frac{3}{5}\,v} = \frac{d}{v} + 2. \tag{1}$$

Ujede-li původní rychlostí vzdálenost $v + 50$ a sníženou rychlostí zbytek cesty $d - v - 50$, trvá mu cesta

$$\frac{v + 50}{v} + \frac{d - v - 50}{\frac{3}{5}\,v},$$

takže

$$\frac{v + 50}{v} + \frac{d - v - 50}{\frac{3}{5}\,v} = \frac{d}{v} + \frac{4}{3}. \tag{2}$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic (1), (2) o dvou neznámých. Úpravou jednotlivých rovnic dostaneme ekvivalentní soustavu

$$4v = d,$$

$$3v + 50 = d,$$

která má jediné řešení $v = 50$, $d = 200$.

Z A do B je 200 km. Původní rychlost auta byla 50 km/h.

16. Čas budeme měřit v minutách, vzdálenosti v kilometrech, rychlost v km/min. Dobu jízdy auta z A do B označme t. Zpáteční cesta trvala autu $\frac{2}{3}t$, auto bylo na cestě celkem $\frac{5}{3}t + 75$. Zbývá určit t.

Auto vyjelo o 25 min dříve než cyklista a dohonilo ho po 10 km v pětině cesty. Cyklista jel tedy rychlostí

$$\frac{10}{25 + \frac{t}{5}} = \frac{50}{t + 125}.$$

Cesta do B cyklistovi trvala $t + 125$ a do druhého setkání s autem, které ho potkalo v $\frac{9}{10}$ cesty, uplynula doba

$$\frac{9}{10}(t + 125).$$

Autu trvala cesta do druhého setkání, počítáno také od 8 h,

$$25 + t + 75 + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} t = \frac{32}{30} t + 100.$$

Pro hledané t tedy platí

$$\frac{9}{10}(t + 125) = \frac{32}{30}t + 100.$$

Řešením této rovnice je $t = 75$. Auto bylo tedy na cestě

$$\frac{5}{3}.75 + 75 = 200 \text{ min} = 3 \text{ h } 20 \text{ min}$$

a vrátilo se v 11 h 45 min.

17. Čas budeme měřit v sekundách, vzdálenost v metrech, rychlost v m/s. Rychlosti vlaku, prvního a druhého chodce označme v, v_1, v_2, délku vlaku d. Předpokládáme, že $v_1 < v_2 < v$. Druhého chodce vlak míjí po dobu

$$t_2 = \frac{d}{v - v_2},$$

prvního po dobu

$$t_1 = \frac{d}{v - v_1}.$$

V okamžiku, kdy vlak dostihne prvního chodce, jsou chodci od sebe vzdáleni

$$vt - v_2t = t(v - v_2)$$

a do setkání jim zbývá doba

$$\frac{t(v - v_2)}{v_2 - v_1}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$v - v_2 = dt_2,$$

$$v_2 - v_1 = v - v_1 - (v - v_2) = t_1 d - t_2 d = d(t_1 - t_2),$$

je

$$\frac{t(v - v_2)}{v_2 - v_1} = \frac{tdt_2}{d(t_1 - t_2)} = \frac{tt_2}{t_1 - t_2}.$$

Druhý chodec dohoní prvního za $\dfrac{tt_2}{t_1 - t_2}$ sekund od okamžiku, kdy vlak dostihl prvního chodce.

18. Čas budeme měřit v sekundách, vzdálenost v metrech, rychlost v m/s. Délku osobního vlaku označme d_1 a délku rychlíku d_2. Cestujícího v osobním vlaku rychlík předjíždí rychlostí $v_2 - v_1$ po dobu t_1, je tedy

$$d_1 = t_1(v_2 - v_1).$$

Pozorovatele na trati míjí vlak rychlostí v_1 po dobu t_2, je tedy

$$d_2 = t_2 v_1.$$

Od okamžiku, kdy lokomotiva rychlíku dostihla konec osobního vlaku, do okamžiku, kdy konec rychlíku minul lokomotivu osobního vlaku, uplynula stejná doba, za jakou by rychlík urazil vzdálenost $d_1 + d_2$ rychlostí $v_2 - v_1$, je tedy

$$d_1 + d_2 = t_3(v_2 - v_1).$$

Sečteme-li první dvě rovnosti, vyjde

$$d_1 + d_2 = t_1(v_2 - v_1) + t_2v_1,$$

takže

$$t_1(v_2 - v_1) + t_2v_1 = t_3(v_2 - v_1),$$

neboli

$$v_1(t_1 - t_2 - t_3) = v_2(t_1 - t_3).$$

Je tedy

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2 - t_3}.$$

19. Dosadíme-li z první rovnice do druhé za $x = 4 - 2y$, dostaneme po jednoduché úpravě

$$4(1 - y)^2 + 3z^2 = 0.$$

Odtud vidíme, že musí platit $y = 1$, $z = 0$ a pro x pak dostaneme $x = 2$. Tato trojice dané soustavě skutečně vyhovuje.

20. Sečteme-li 1. a 2. rovnici, dostaneme

$$(x + y)^2 = 4.$$

Podobně sečtením 2. a 3. rovnice a sečtením 1. a 3. rovnice vyjde

$$(y + z)^2 = 1,$$

$$(z + x)^2 = 9.$$

Řešení dané soustavy budou tedy jen mezi řešeními osmi soustav

$$x + y = \pm 2,$$

$$y + z = \pm 1,$$

$$x + z = \pm 3$$

(pro všech osm kombinací znamének). Každá z těchto soustav má jediné řešení, jsou to trojice x, y, z

$$\begin{array}{rrrcrrr} 2, & 0, & 1 & \quad & 0, & -2, & 3 \\ 0, & 2, & -3 & & -2, & 0, & -1 \\ 3, & -1, & 0 & & 1, & -3, & 2 \\ -1, & 3, & -2 & & -3, & 1, & 0. \end{array}$$

Jak se přesvědčíme dosazením, všech osm trojic vyhovuje dané soustavě.

21. Předpokládejme, že pro kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{1976}$ platí

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{x_2} &\leqq 2, \\
x_2 + \frac{1}{x_3} &\leqq 2, \\
\ldots & \ldots \\
x_{1975} + \frac{1}{x_{1976}} &\leqq 2, \\
x_{1976} + \frac{1}{x_1} &\leqq 2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Sečteme-li těchto 1976 nerovností a uspořádáme-li sčítance, dostaneme

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_{1976} + \frac{1}{x_{1976}}\right) \leqq 1976.2 \tag{2}$$

Uvědomme si, že pro každé kladné číslo x platí

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2 \tag{3}$$

a rovnost zde nastane, právě když $x = 1$. Ekvivalentní úpravou z ní totiž dostaneme nerovnost

$$(x - 1)^2 \geqq 0.$$

V nerovnosti (2), a tedy i v 1976 nerovnostech (1) nastává rovnost a to je v oboru kladných čísel možné, jen když

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{1976} = 1.$$

Je vidět, že tato čísla vyhovují dané soustavě.

22. Abychom se zbavili absolutní hodnoty, budeme soustavu řešit zvlášť v oboru $x \geqq 0$ a zvlášť v oboru $x < 0$.

a) Vyhovuje-li soustavě dvojice čísel x, y, kde $x \geqq 0$, má soustava tvar

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ x + y &= a, \end{aligned} \tag{1}$$

odkud dostaneme

$$(a - 1)\, x = 1 - a. \tag{2}$$

Je-li $a \neq 1$, vyhovuje rovnici (2) jen číslo $x = -1$, které v uvažovaném oboru neleží. Je-li $a = 1$, má soustava tvar

$$x + y = 1,$$

$$x + y = 1$$

a vyhovují jí všechny dvojice x, y, kde $x \geqq 0$, $y = 1 - x$.

b) Vyhovuje-li soustavě dvojice čísel x, y, kde $x < 0$, má soustava tvar

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ -x + y &= a. \end{aligned} \tag{3}$$

Platí tedy

$$(a + 1)x = 1 - a. \tag{4}$$

Je-li $a \neq -1$, vyhovuje rovnici (4) jen $x = \dfrac{1 - a}{1 + a}$. To leží v uvažovaném oboru, právě když $a < -1$ nebo $a > 1$. Příslušné $y = \dfrac{1 + a^2}{1 + a}$ vypočteme z jedné z rovnic (3).

Pro $a = -1$ má soustava tvar

$$\begin{aligned} -x + y &= 1, \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

a zřejmě nemá řešení.

Závěr: Pro $a < -1$ a pro $a > 1$ má soustava jediné řešení $x = \dfrac{1 - a}{1 + a}$, $y = \dfrac{1 + a^2}{1 + a}$. Pro $-1 \leqq a < 1$ soustava řešení nemá. Pro $a = 1$ má nekonečně mnoho řešení $x = t$, $y = 1 - t$, kde t je libovolné nezáporné číslo.

23. Soustava prvních dvou rovnic má pro každou hodnotu parametru a jediné řešení

$$x = 1 + \frac{2}{5}a,\ y = 1 + \frac{3}{5}a.$$

Dosadíme-li odtud do třetí rovnice, dostaneme po jednoduché úpravě

$$a(a-1)\left(a+\frac{8}{3}\right) = 0.$$

Má-li tedy soustava řešení, je $a = 0$ nebo $a = 1$ nebo $a = -\frac{8}{3}$. Zkouškou ověříme, že soustava má řešení ve všech třech případech. Pro $a = 0$ je řešení $x = 1$, $y = 1$, pro $a = 1$ je $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{8}{5}$ a pro $a = -\frac{8}{3}$ je $x = -\frac{1}{15}$, $y = -\frac{3}{5}$.

24. Odečteme-li třetí rovnici od první, dostaneme

$$ay - az = -1.$$

Dosadíme-li sem z druhé rovnice za y a upravíme, zjistíme, že pro každé řešení soustavy platí

$$a(1-a^2)z = 1 + a. \tag{1}$$

Má-li rovnice (1) pro některou hodnotu parametru a konečný počet řešení z, má daná soustava nanejvýš tolik řešení x, y, z. Ze soustavy totiž vidíme, že každému z může odpovídat nanejvýš jedno řešení x, y, z. Rovnice (1) má nekonečně mnoho řešení, právě když $a = -1$. Daná soustava tedy může mít nekonečně mnoho řešení jen pro $a = -1$. V tomto případě má tvar

$$x - y = b,$$

$$y - z = 1,$$

$$x - z = b + 1$$

a pro každou hodnotu parametru b má nekonečně mnoho řešení. Vyhovují jí všechny trojice $x = b - t$, $y = t$, $z = t - 1$, kde t je libovolné reálné číslo.

Daná soustava má nekonečně mnoho řešení, právě když $a = -1$, b pak může být voleno libovolně.

25. Po jednoduchých úpravách, které jsou pro $abc > 0$ ekvivalentní, dostaneme z dokazované nerovnosti nerovnost

$$a^2bc + b^2ac + c^2ab \leqq a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2$$

a ta je ekvivalentní s nerovností

$$(ac - ab)^2 + (ab - bc)^2 + (ac - bc)^2 \geqq 0.$$

Poslední nerovnost zřejmě platí pro všechna a, b, c a pro nenulová a, b, c v ní nastane rovnost, právě když $a = b = c$.

26. Dělíme-li $n + 1$ mocnin čísla 3

$$3^1, 3^2, \ldots, 3^n, 3^{n+1}$$

číslem n, aspoň dvě dávají stejný zbytek. Jejich rozdíl je dělitelný číslem n.

27. Zvolená prvočísla rozdělíme do pěti skupin podle toho, jaký zbytek dávají při dělení pěti. Vzhledem k tomu, že jde o prvočísla navzájem různá, obsahuje skupina odpovídající zbytku 0 nanejvýš jedno prvočíslo, totiž 5. Na ostatní čtyři skupiny připadá tedy celkem alespoň 49 prvočísel, na některou skupinu tedy alespoň 13 prvočísel. Rozdíl prvočísel z téže skupiny je zřejmě dělitelný pěti.

28. Nejprve si uvědomme, že $163\,840 = 5 \cdot 2^{15}$. Mezi sedmi navzájem různými prvočísly jich je alespoň šest lichých a rozdíly těchto lichých prvočísel jsou sudé. Mezi všemi kladnými rozdíly zvolených prvočísel je tedy alespoň $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ sudých čísel. Uvažovaný součin je tedy dělitelný číslem 2^{15}. Zbývá ukázat, že uvažovaný součin je dělitelný pěti. Daná prvočísla označme $p_1 < p_2 < \ldots < p_7$. Vezměme si těchto pět jejich rozdílů:

$$p_2 - p_1, p_3 - p_1, p_4 - p_1, p_5 - p_1, p_6 - p_1.$$

Je-li některý z nich dělitelný pěti, jsme hotovi. Není-li, pak alespoň dva dávají stejný zbytek a jejich rozdíl je tedy dělitelný pěti. Rozdíl těchto rozdílů je však rozdílem zvolených prvočísel.

29. Dělíme-li třetí mocninu přirozeného čísla sedmi, je zbytek stejný, jako dělíme-li sedmi třetí mocninu zbytku tohoto čísla po dělení sedmi. Je-li totiž $p = 7q + z$, je

$$p^3 = 7(7^2q^3 + 3.7q^2z + 3qz^2) + z^3.$$

Zbytek při dělení třetí mocniny sedmi je tedy vždy roven některému zbytku, který dostaneme při dělení čísel 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3 sedmi, tj. některému z čísel 0, 1, 6. Součet tří čísel je dělitelný sedmi, právě když součet zbytků při dělení jednotlivých sčítanců je dělitelný sedmi. Ze všech trojic složených z čísel 0, 1, 6 je součet složek dělitelný sedmi jen pro trojice 0, 0, 0 a 0, 1, 6. Je-li tedy součet $a^3 + b^3 + c^3$ dělitelný sedmi, je alespoň jedno z čísel a^3, b^3, c^3 dělitelné sedmi, a tedy také alespoň jedno z čísel a, b, c je dělitelné sedmi.

30. Uvědomme si, že poslední dvojčíslí součtu závisí jen na posledních dvojčíslích sčítanců a že poslední dvojčíslí čísla n^4 závisí jen na posledním dvojčíslí čísla n. Částečné součty

$$1^4 + 2^4 + \ldots + 100^4,$$

$$101^4 + 102^4 + \ldots + 200^4,$$

$$\ldots$$

$$901^4 + 902^4 + \ldots + 1\,000^4$$

mají tedy stejná poslední dvojčíslí. Jejich součet je tedy dělitelný deseti a poslední číslice součtu

$$1^4 + 2^4 + \ldots + 1\,000^4$$

je nula. Předposlední číslice tohoto součtu je rovna poslední číslici částečného součtu

$$1^4 + 2^4 + \ldots + 100^4.$$

Analogicky jako předtím usoudíme, že je to také nula. Poslední dvě číslice čísla $1^4 + 2^4 + \ldots + 1\,000^4$ jsou tedy nuly.

31. Abychom odstranili absolutní hodnoty, budeme rovnici řešit zvlášť v oboru přirozených čísel a zvlášť v oboru záporných celých čísel. Číslo 0, jak se můžeme přesvědčit, řešením není. Je-li x přirozené číslo, je $|x - 1| = x - 1$, $|3x + 1| = 3x + 1$ a vyhovuje-li rovnici, platí pro ně

$$3(x - 1) - 2x = 2(3x + 1).$$

Tuto podmínku splňuje jedině $x = -1$. V oboru přirozených čísel tedy rovnice řešení nemá.

Je-li $x \leqq -1$, je $|x - 1| = 1 - x$, $|3x + 1| = -3x - 1$ a vyhovuje-li rovnici, platí pro ně

$$3(1 - x) - 2x = 2(-3x - 1).$$

Tuto podmínku splňuje jen $x = -5$. To je jediné celočíselné řešení rovnice.

32. Zřejmě

$$|x-2|+|y-3| \geqq 3-y$$

a rovnost nastane, právě když $|x-2|=0$, $|y-3|=3-y$. Vyhovují tedy právě ty dvojice x, y, kde $x=2$, $y \leqq 3$, tj. tři dvojice $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$.

33. Předpokládejme, že x, y jsou celá čísla, která vyhovují soustavě. Odečteme-li druhou rovnici od první, vidíme, že pro číslo x platí

$$9x = p^2(p-1). \tag{1}$$

Je tedy buď $p-1$ nebo p^2 dělitelné devíti. Vyšetříme tyto případy zvlášť.

a) Je-li $p-1$ dělitelné devíti, tj. $p = 9k+1$, kde k je celé číslo, pak podle (1) platí

$$x = k(9k+1)^2$$

a podle první rovnice soustavy

$$y = (1-k)(9k+1)^2.$$

Tato dvojice je jediným řešením soustavy.

b) Je-li p^2 dělitelné devíti, tj. $p = 3q$, kde q je celé číslo, dostaneme analogicky

$$x = q^2(3q - 1),\ y = q^2(10 - 3q),$$

což je jediné řešení soustavy.

V ostatních případech soustava nemá řešení.

34. Jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentní soustavu

$$x > |y^2 - 3y| - \frac{1}{3},$$

$$x < 2 - \left|y - \frac{3}{2}\right|,$$

odkud vidíme, že pro každé řešení musí platit

$$-\frac{1}{3} < x < 2.$$

Soustavě mohou vyhovovat jen celá čísla $x = 0$ a $x = 1$. Je-li $x = 0$, platí pro y soustava

$$|y^2 - 3y| < \frac{1}{3},$$

$$\left|y - \frac{3}{2}\right| < 2$$

a vyhovují jen $y = 0$, $y = 3$.

Je-li $x = 1$, platí pro y soustava

$$|y^2 - 3y| < \frac{4}{3},$$

$$\left|y - \frac{3}{2}\right| < 1$$

a žádné celé y jí nevyhovuje. Soustava má právě dvě řešení: $x = 0, y = 0$ a $x = 0, y = 3$.

35. Vzhledem k tomu, že

$$\frac{ab + bc + ac}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

hledáme všechna prvočísla, pro něž

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1.$$

Zvolme označení tak, aby $a \leqq b \leqq c$, a proberme systematicky všechny možnosti. Pro $a = 2$, $b = 2$ dostáváme nekonečně mnoho řešení

$a = 2, b = 2, c$ ... libovolné prvočíslo.

Pro $a = 2$, $b = 3$ další dvě řešení

$$a = 2, b = 3, c = 3,$$

$$a = 2, b = 3, c = 5.$$

Pro $a = 2$, $b > 3$ ani pro $a > 2$ už žádná řešení neexistují.

36. Předpokládejme, že a, b, c, d jsou přirozená čísla, pro která platí

$$ac - bd = p,$$

$$ad - bc = 0.$$

Sečtením obou rovností dostaneme

$$(a - b)(c + d) = p,$$

a jejich odečtením

$$(a + b)(c - d) = p.$$

Vzhledem k tomu, že p je prvočíslo a a, b, c, d přirozená čísla, platí

$$a - b = 1, \qquad c - d = 1,$$

$$a + b = p, \qquad c + d = p$$

a odtud

$$a = c = \frac{p + 1}{2}, \; b = d = \frac{p - 1}{2}.$$

Pro $p = 2$ nejsou tato čísla celá a žádné řešení neexistuje. Pro prvočísla $p > 2$ nalezená čísla, jak se snadno přesvědčíme, soustavě vyhovují.

37. Je-li $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ rozklad na součin prvočinitelů, je počet kladných dělitelů čísla m zřejmě roven

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1).$$

Má-li být počet dělitelů 15, bude $n = 2$ a a_1, a_2 budou čísla 2, 4. Má-li být číslo m co nejmenší, musí být prvočísla p_1, p_2 co nejmenší, tj. buď $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, nebo $p_1 = 3$, $p_2 = 2$. Hledané číslo bude menší z čísel $2^2 . 3^4$, $2^4 . 3^2$, totiž $2^4 . 3^2 = 144$.

38. Prostřední z hledaných čísel označme x. Součet jejich druhých mocnin je

$$s = (x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 3x^2 + 8. \qquad (1)$$

Protože x je liché, končí x^2 některou z číslic 1, 5, 9 a součet s některou z číslic 1, 3, 5. Z (1) vidíme, že součet s není dělitelný třemi, takže číslice 3 nepřichází v úvahu. Součet s dává při dělení třemi zbytek 2, pro s tedy zbývají možnosti 11, 11 111, 5, 5 555, 5 555 555. Z (1) najdeme pro $s = 11$ trojice $-1, 1, 3$ a $-3, -1, 1$ a pro $s = 5\,555$ trojice 41, 43, 45 a $-45, -43, -41$. Ostatní tři možnosti pro s nedávají celé x.

39. Hledané číslo můžeme rozepsat

$$x = 10a + b,$$

potom

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3.$$

Má-li být poslední číslice 1, musí být $b = 1$. Je tedy

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2 + 30a + 1.$$

Na předposlední číslici čísla x^3 má vliv jen předposlední sčítanec, a aby to byla 8, musí poslední číslice čísla a být 6. Hledané číslo rozepíšeme

$$x = 100c + 61,$$

takže

$$x^3 = \ldots + 3 . 61^2 . 100c + 61^3.$$

Číslici na místě stovek ovlivňují jen poslední dva členy, a aby to byla 9, musí poslední číslice čísla c být 0. Můžeme tedy psát

$$x = 1000\,d + 61,$$

takže

$$x^3 = \ldots + 3 . 61^2 . 1000\,d + 61^3.$$

Aby číslice na místě tisíců byla 1, musí poslední číslice čísla d být 5.

Splňuje-li nějaké číslo požadovanou podmínku, musí končit na 5061. Všechna přirozená čísla končící tímto čtyřčíslím vyhovují.

40. Provedl-li Josef výpočet v roce

$$1000 + 100\,a + 10\,b + c,$$

bylo mu právě

$$1 + a + b + c$$

let a narodil se v roce

$$999 + 99a + 9b.$$

Rozdíl momentálního letopočtu a zrcadlového obrazu je

$$(1000c + 100b + 10a + 1) - (1000 + 100a + 10b + c) =$$

$$= 4\,(1000 + 100a + 10b + c - 1 - a - b - c)$$

a po úpravě

$$37c + 2b - 18a - 185 = 0. \qquad (1)$$

Odtud vidíme, že číslice c je nutně lichá, a dostáváme odhad

$$c = \frac{1}{37}(185 + 18a - 2b) \geqq \frac{1}{37}(185 + 18.0 - 2.9) > 4.$$

Číslice c může tedy být jen 5, 7 nebo 9.

Pro $c = 5$ se rovnice (1) redukuje na $b = 9a$ a té vyhovují dvě dvojice $a = 0$, $b = 0$; $a = 1$, $b = 9$.

Pro $c = 7$ dostáváme rovnici

$$b = 9\,(a - 4) - 1$$

a té vyhovuje jediná dvojice $a = 5$, $b = 8$.

Pro $c = 9$ dostáváme rovnici

$$b = 9(a - 8) - 2$$

a té vyhovuje jediná dvojice $a = 9$, $b = 7$.

Příslušné letopočty jsou 1005, 1195, 1587 a 1979. Zbývá se přesvědčit, že všechny vyhovují podmínkám úlohy. (Šestiletý Josef v r. 1005 měl neuvěřitelné matematické schopnosti.)

41. Jako jednotku délky vezměme stranu utěrky a označme velikosti stran obdélníku $ABCD$ vzhledem k této jednotce a, b. To budou celá čísla a utěrek bude ab. Má tedy platit

$$ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2},$$

neboli

$$\sqrt{a^2 + b^2} = ab - a - b.$$

Po umocnění obou stran a úpravě dostaneme podmínku

$$ab(ab - 2a - 2b + 2) = 0.$$

Protože a, b jsou nenulová čísla, musí platit

$$ab - 2a - 2b + 2 = 0,$$

neboli

$$(a - 2)(b - 2) = 2.$$

Oba činitelé jsou celá čísla a jsou to tedy dělitelé čísla 2. Probereme všechny možnosti a zjistíme, že vyhovují jen dvojice $a = 3$, $b = 4$ nebo $a = 4$, $b = 3$. Úloze tedy může vyhovovat jen obdélník o stranách 3, 4 a také skutečně vyhovuje - utěrek je 12.

42. Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku označíme a, b a délku přepony c (vše v cm). Vyhovuje-li trojúhelník podmínkám úlohy, platí podle (b)

$$a + b + c = \frac{ab}{2} \tag{1}$$

a podle Pythagorovy věty

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{2}$$

Vyjádříme-li z (1) c pomocí a, b a dosadíme do (2), dostaneme podmínku

$$\frac{1}{4} a^2b^2 + 2ab - a^2b - ab^2 = 0,$$

neboli

$$ab\,(ab - 4a - 4b + 8) = 0.$$

Protože a, b jsou nenulová čísla, musí být

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0,$$

neboli

$$(a - 4)(b - 4) = 8.$$

Podle (a) jsou oba činitelé celá čísla, jsou to tedy dělitelé čísla 8. Po probrání všech možností zjistíme, že vyhovují dvojice

$$a = 5, b = 12 \qquad a = 12, b = 5$$

$$a = 6, b = 8 \qquad a = 8, b = 6$$

Vypočteme ještě příslušné hodnoty c a vidíme, že pokud nějaký trojúhelník vyhovuje úloze, může to být jen trojúhelník se stranami 5, 12, 13 nebo 6, 8, 10. Oba trojúhelníky vyhovují.

43. Vrcholy červeného trojúhelníku označme 1, 2, 3. Trojúhelník s vrcholy ve zbývajících bodech 4, 5, 6 není červený, má tedy alespoň jednu modrou stranu. Z každého bodu 4, 5, 6 vedou alespoň dvě modré úsečky do bodů 1, 2, 3 - jinak by vznikl další červený trojúhelník. Celkem je tedy alespoň 7 modrých úseček. Analogicky zjistíme, že je aspoň 7 červených úseček. Úseček je celkem 15, tedy 7 jedné barvy a 8 druhé barvy.

44. Předpokládejme, že z některého vrcholu A vycházejí aspoň tři úsečky jedné barvy AB, AC, AD. Není-li žádný z trojúhelníků ABC, ABD, ACD jednobarevný, jsou úsečky BC, BD, CD obarveny druhou barvou, a tedy trojúhelník BCD je jednobarevný. Z žádného vrcholu tedy nemohou vycházet více než dvě úsečky jedné barvy. Vzhledem k tomu, že z každého vrcholu vycházejí právě čtyři úsečky, jsou dvě z nich jedné barvy a dvě druhé barvy.

45. Uvažujme devítiúhelník obarvený tak, jak požaduje úloha. Ze spojnic vrcholů (tj. úhlopříček a stran) jich bude

$\frac{5.4}{2} = 10$ spojovat červené vrcholy, $\frac{4.3}{2} = 6$ modré vrcholy

a ostatní červený vrchol s modrým. Mezi 16 spojnicemi stejnobarevných vrcholů bude 13 úhlopříček, zbývající 3 tedy budou strany. Z 9 stran devítiúhelníku budou tedy 3 strany spojovat stejnobarevné vrcholy a 6 stran různobarevné vrcholy. Počítejme teď na okamžik každý vrchol tolikrát, na kolika stranách leží, tzn. dvakrát. Z 10 červených a 8 modrých vrcholů připadne na strany spojující různobarevné vrcholy 6 červených a 6 modrých vrcholů. Na strany spojující stejnobarevné vrcholy zbývají 4 červené a 2 modré vrcholy. Ze 3 stran spojujících stejnobarevné vrcholy tedy 2 strany spojují červené vrcholy a 1 strana modré vrcholy.

Jsou-li tedy vrcholy devítiúhelníku obarveny způsobem předepsaným v úloze, pak jediná strana spojuje modré vrcholy. Obráceně snadno zjistíme, že jsou-li vrcholy devítiúhelníku obarveny tak, aby jich bylo 5 červených, 4 modré a přitom jediná strana spojovala modré vrcholy, pak právě 13 úhlopříček spojuje vrcholy stejné barvy. Zbývá tedy určit, kolika způsoby lze vrcholy takto obarvit.

Jsou-li vrcholy A_1, A_2 jediná dvojice sousedních modrých vrcholů, budou vrcholy A_3, A_9 červené. Zbývající dva modré vrcholy pak budou zastoupeny mezi vrcholy A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 tak, aby nesousedily. Proto je 6 možností A_4A_6, A_4A_7, A_4A_8, A_5A_7, A_5A_8, A_6A_8. Cyklickou záměnou očíslování vrcholů dostaneme z každé možnosti 9 obarvení vrcholů vyhovujících úloze. Vzhledem k tomu, že žádná dvě z těchto 6.9 obarvení zřejmě nesplynou, je vrcholy možno obarvit právě 54 způsoby.

46. Zaveďme v rovině souřadnicovou soustavu tak, aby splynula s danou sítí. Bod roviny je pak uzlem sítě, právě když má obě souřadnice celočíselné. Z prvních souřadnic pěti zvolených uzlů mají aspoň tři stejnou paritu. Z druhých souřadnic těchto tří uzlů mají aspoň dvě stejnou paritu. Našli jsme tak dva ze zvolených uzlů $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, jejichž první souřadnice mají stejnou paritu a druhé souřadnice také. Souřadnice středu úsečky AB

$$\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}$$

jsou tedy celá čísla a střed úsečky AB leží v uzlu sítě.

47. Řádky i sloupce šachovnice očíslujme $1, 2, \ldots, n$. Na každé pole, které leží současně v lichém řádku i lichém sloupci, postavme figurku. Toto rozmístění vyhovuje podmínce úlohy. Je-li n sudé, rozestavili jsme $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ figurek, v případě n lichého $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figurek.

Ukážeme, že má-li být splněna podmínka úlohy, více figurek se na šachovnici nevejde. Rozdělme šachovnici přímkami, které oddělují sudé řádky a sloupce od následujících lichých. V případě sudého n se tak šachovnice rozpadne na

$\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$ částí tvaru 2×2, v případě lichého n na $\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2$ částí tvaru 2×2, $n-1$ částí tvaru 2×1 a jednu část tvaru 1×1, celkem na $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ částí. Přitom v každé části může být nanejvýš jedna figurka, nemůže jich tedy na šachovnici stát více, než je počet částí.

Největší možný počet figurek rozestavených tak, aby žádné dvě nestály na sousedních polích, je tedy $\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$ pro sudé n, $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ pro liché n.

48. Budeme uvažovat tři možnosti:

1. Dané body jsou vrcholy konvexního pětiúhelníku. Pak vynecháním kteréhokoli z nich dostaneme čtveřici vrcholů konvexního čtyřúhelníku. V tomto případě má úloha 5 řešení.

2. Čtyři z daných bodů jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku a pátý leží uvnitř něho. Označíme-li vrcholy čtyřúhelníku A_1, A_2, A_3, A_4 tak, že pátý bod A_5 leží uvnitř trojúhelníku A_1A_2B, kde B je průsečík úhlopříček čtyřúhelníku, dostaneme požadovanou čtveřici vynecháním kteréhokoliv z bodů A_1, A_2, A_5. Zde dostáváme 3 řešení.

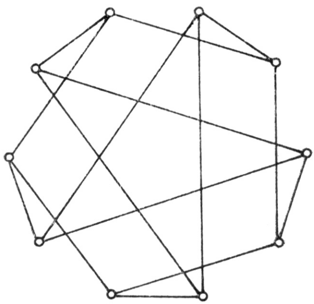
3. Tři z daných bodů jsou vrcholy trojúhelníku a uvnitř něho leží ostatní dva body A_4, A_5. Přímky spojující vrcholy tohoto trojúhelníku s bodem A_4 ho rozdělí na 6 trojúhelníčků. Označíme-li vrcholy trojúhelníku A_1, A_2, A_3

tak, aby trojúhelníček obsahující bod A_5 měl dvě strany na přímkách A_1A_4, A_2A_4, tvoří body A_1, A_2, A_4, A_5 jedinou čtveřici vyhovující úloze.

49. Střed dané kružnice označme S. Každému bodu X dané kružnice přiřaďme číslo $p(X) = m - m'$, kde m je počet daných bodů ležících v polorovině, kterou opíše polopřímka SX při otočení o 180° ve směru hodinových ručiček, a m' je počet daných bodů v polorovině opačné. Všimněme si, jak se hodnota $p(X)$ bude měnit při pohybu bodu X po kružnici ve směru hodinových ručiček. Neprochází-li přímka SX žádným z daných bodů, zůstává hodnota $p(X)$ beze změny. Splyne-li bod X s některým z daných bodů, číslo $p(X)$ se zmenší o 1 a po průchodu tímto bodem se opět zmenší o 1. Dostane-li se bod X' souměrný s bodem X podle středu S do některého z daných bodů, číslo $p(X)$ se zvětší o 1 a pak se opět zvětší o 1. (Jsou-li mezi danými body body souměrně sdružené podle středu S, nemají tedy vliv na hodnoty $p(X)$.)

Na uvažované kružnici zvolme nějaký bod A. Je-li $p(A) = 0$, úloze vyhovuje přímka AS. Je-li $p(A) \neq 0$, všimněme si, že pro bod A' souměrně sdružený s bodem A podle středu S zřejmě platí $p(A') = -p(A)$. Proběhne-li tedy bod X od bodu A do bodu A', změní hodnota $p(X)$ znaménko. Vzhledem k tomu, že hodnoty $p(X)$ jsou celočíselné a postupně se zvětšují nebo zmenšují o 1, je pro některý bod B nutně $p(B) = 0$ a přímka BS vyhovuje úloze.

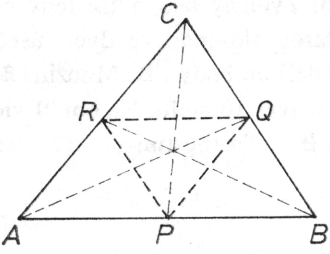
50. Zvolme si libovolný bod množiny $\mathbf{B}$. Podle (1) je spojen nanejvýš se třemi body množiny $\mathbf{B}$ úsečkami z $\mathbf{U}$ a každý z těchto tří bodů je spojen úsečkami z $\mathbf{U}$ nanejvýš se dvěma dalšími body z **B**. Zvolený bod může tedy být úsečkou z **U** nebo lomenou čarou složenou ze dvou úseček z **U** spojen nanejvýš s devíti dalšími body z **B**. Množina **B** tedy vzhledem k (2) obsahuje nanejvýš 10 bodů. Na obr. 1 vidíme, že desetibodová množina **B** s vlastnostmi (1), (2) existuje. Hledaný počet je 10.



Obr. 1

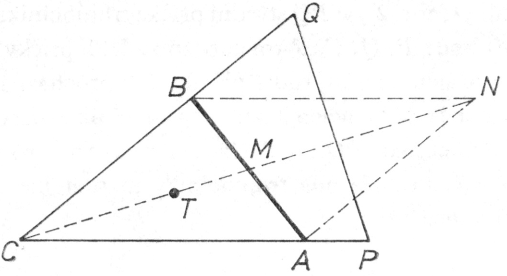
51. Jestliže jsme střed strany AB označili P a střed strany BC označili Q (obr. 2), je PQ střední příčka trojúhelníku ABC. Proto tvoří body P, Q, C, R rovnoběžník. Úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí, tudíž přímka CP prochází středem úsečky QR a je tedy nejen těžnicí trojúhelníku ABC, ale i těžnicí trojúhelníku PQR. Totéž lze dokázat pro těžnici AQ nebo BR. Protože oba trojúhelníky mají stejné těžnice, mají i stejné těžiště.

52. Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, protíná polopřímka CT stranu AB v jejím středu M a protože těžiště



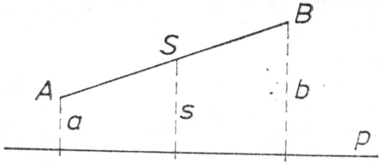
Obr. 2

trojúhelníku dělí těžnici v poměru 2 : 1, je $|CM| = \frac{3}{2}|CT|$. Doplníme-li trojúhelník ABC na rovnoběžník $ANBC$, je bod M jeho středem (obr. 3). Z uvedeného rozboru vyplývá již konstrukce trojúhelníku ABC. Na polopřímce CT zvolíme bod N tak, aby $|CN| = 3|CT|$, bodem N vedeme rovnoběžky s přímkami CQ, CP a jejich průsečíky s přímkami CP, CQ jsou body A, B. Úloha má vždy právě jedno řešení.



Obr. 3

53. Protože přímka p neprochází podle předpokladu žádným vnitřním bodem trojúhelníku, leží celý trojúhelník ABC v jedné polorovině s hraniční přímkou p. Označme S střed úsečky AB, s vzdálenost bodu S od přímky p a a, b vzdálenosti bodů A, B od přímky p (obr. 4). Pak je $s = \dfrac{a + b}{2}$. To je ihned zřejmé v případě $a = b$, kdy body A, B a tedy i S

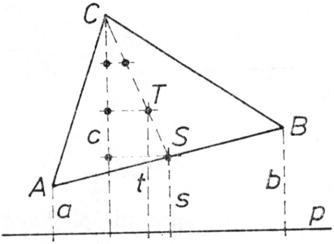


Obr. 4

leží na přímce rovnoběžné s přímkou p. Také v případě, kdy je přímka AB kolmá na přímku p, je platnost uvedeného vzorce zřejmá. V ostatních případech je s velikost střední příčky lichoběžníku se základnami a, b, případně pravoúhlého trojúhelníku (je-li $a = 0$ nebo $b = 0$) a tedy i v těchto případech vidíme, že $2s = a + b$. Označíme-li R, T středy stran BC, AC a r, t, c vzdálenosti bodů R, T, C od přímky p, platí podle předcházejícího $2s = a + b$, $2r = b + c$, $2t = a + c$. Sečtením těchto tří rovnic a dělením dvěma dostáváme $s + r + t = a + b + c$, což jsme měli dokázat.

54. Označme vzdálenosti bodů A, B, C od přímky p stejně jako v předcházející úloze a, b, c. Můžeme předpokládat, že bod C má z vrcholů A, B, C od přímky p největší vzdálenost, tj. $c \geqq a$, $c \geqq b$. Označme ještě s a t vzdálenosti středu S úsečky AB a těžiště T trojúhelníku ABC od přímky p (obr. 5).

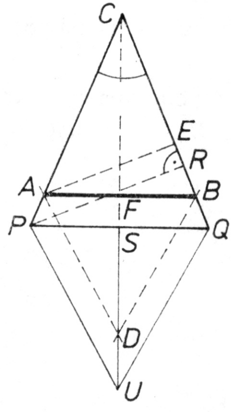
Pak je $s = \dfrac{a + b}{2}$, $t = s + \dfrac{c - s}{3}$. Po dosazení za s dostaneme $t = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$. Můžeme tedy říci, že vzdálenost těžiště trojúhelníku ABC od přímky p se rovná aritmetickému průměru vzdáleností vrcholů A, B, C od této přímky.



Obr. 5

55. *Má-li rovnoramenný trojúhelník proti své základně úhel* γ, má každý jeho úhel při základně velikost $90° - \dfrac{\gamma}{2}$. Jsou tudíž každé dva rovnoramenné trojúhelníky s úhlem γ při vrcholu proti základně podobné, protože se shodují ve všech vnitřních úhlech. Snadno sestrojíme rovnoramenný trojúhelník PQC s úhlem γ při vrcholu C a s rameny CP, CQ. Označme S střed strany PQ a R patu kolmice vedené bodem P k přímce CQ (obr. 6). Na polopřímce CS zvolíme za bodem S bod U

tak, aby $|SU| = |PR|$. Kdyby bylo $|CU| = s$, byli bychom s konstrukcí hotovi, stačilo by vzít za trojúhelník ABC trojúhelník PQC. To by však byla příliš velká náhoda, spíše bude $|CU|$ menší nebo větší než velikost s. Pak zvolíme na polopřímce CS bod D tak, aby $|CD| = s$. Bodem D vedeme



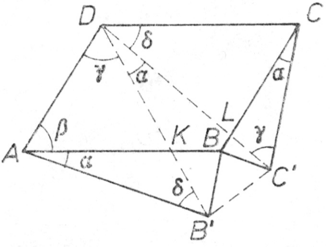
Obr. 6

rovnoběžky s přímkami PU, QU a jejich průsečíky s přímkami CP, CQ označíme A, B (viz obrázek). Dokážeme, že trojúhelník ABC má požadované vlastnosti. Je to rovnoramenný trojúhelník s úhlem γ při vrcholu C. Označme E patu kolmice vedené bodem A k přímce CB a F střed úsečky AB. Z podobnosti trojúhelníků PRQ, AEB a také dvojice trojúhelníků PSU, AFD plyne

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|AE|}{|AB|}, \qquad \frac{|SU|}{|PS|} = \frac{|FD|}{|AF|}.$$

Protože je $|PQ| = 2|PS|$, $|AB| = 2|AF|$, platí podle poslední rovnosti také $\dfrac{|SU|}{|PQ|} = \dfrac{|FD|}{|AB|}$. Podle konstrukce je $|SU| = |PR|$, tedy $\dfrac{|FD|}{|AB|} = \dfrac{|PR|}{|PQ|} = \dfrac{|AE|}{|AB|}$ a proto $|FD| = |AE|$. Pak je ale $|CF| + |AE| = |CF| + |FD| = |CD| = s$ a trojúhelník ABC má požadované vlastnosti.

56. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ABB' a CBC' plyne $|\sphericalangle B'AB| = |\sphericalangle BCC'|$ (obr. 7). Dále je

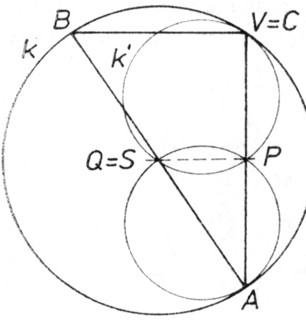


Obr. 7

$|AB'| = |AB| = |DC|$, $|AD| = |BC| = |CC'|$. Podle věty *sus* jsou tudíž trojúhelníky DAB' a $C'CD$ shodné, proto je $|DB'| = |DC'|$. Tím jsme dokázali, že trojúhelník $DB'C'$ je rovnoramenný. Označme α velikost sobě rovných úhlů BAB', BCC' a β velikost vnitřního úhlu rovnoběžníku $ABCD$ při vrcholu A. Z předcházejícího víme, že $|\sphericalangle ADB'| = |\sphericalangle CC'D|$, označme tuto velikost γ, podobně $|\sphericalangle AB'D| =$

$= |\sphericalangle C'DC| = \delta$. Z trojúhelníku ADB' plyne $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Součet velikostí úhlů BAD a CDA je také $180°$, proto $|\sphericalangle B'DC'| = \alpha$. Rovnoramenné trojúhelníky BAB' a $C'DB'$ mají tudíž proti základnám stejně velké úhly, takže jsou podobné. Mlčky jsme předpokládali, že stejně jako na obrázku je $\alpha + \beta < 180°$. Postup důkazu by však byl v podstatě stejný i v případě $\alpha + \beta > 180°$ nebo $\alpha + \beta = 180°$. V posledním případě by se však trojúhelníky DAB' a $C'CD$ redukovaly na úsečky.

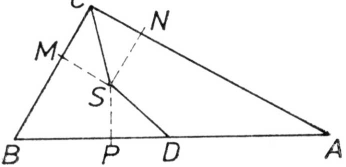
57. Stejnolehlost se středem v těžišti trojúhelníku a s koeficientem -2 zobrazuje středy stran trojúhelníku do protějších vrcholů. Proto má kružnice procházející středy stran trojúhelníku poloviční poloměr než kružnice trojúhelníku opsaná a leží v její vnitřní oblasti nebo s ní má vnitřní dotyk, jak se v zadání úlohy předpokládá. V tom případě leží střed S kružnice k trojúhelníku ABC opsané na kružnici k', procházející středy stran trojúhelníku ABC. Bod dotyku obou kružnic označíme V (obr. 8). Střed alespoň jedné strany



Obr. 8

trojúhelníku je různý od bodu V i od bodu S, nechť je jím například střed P strany AC. Úsečka AC je pak takovou tětivou kružnice k, která je bodem P půlena, proto musí být $AC \perp SP$. Podle Thaletovy věty je $PV \perp SP$, splývá tudíž přímka AC s přímkou PV. Pak však musí jeden z vrcholů A, C splynout s bodem V. Tím jsme dokázali jednu část tvrzení úlohy. Můžeme předpokládat, že $C = V$, vrchol A je druhým průsečíkem přímky PV a kružnice k. Vrchol B leží na kružnici k a střed Q úsečky AB musí ležet na k'. Musí proto bod Q ležet také na kružnici, která odpovídá kružnici k ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. To je však právě kružnice opsaná trojúhelníku APS. Proto musí bod Q splynout s bodem S, úsečka AB je pak průměrem kružnice k a trojúhelník ABC je pravoúhlý, což jsme právě měli dokázat.

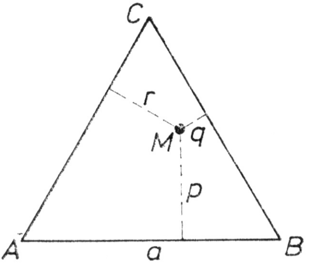
58. Označme M, N, P (obr. 9) po řadě body dotyku kružnice trojúhelníku vepsané a stran BC, CA, AB. Pak je $|SM| = |SN| = |SP|$. Z pravoúhlého trojúhelníku CMS plyne, že $|CS| > |MS|$, tedy také $|DS| > |PS|$. Proto je $P \neq D$ a trojúhelníky SMC a DPS jsou shodné rovnoramenné troj-



Obr. 9

úhelníky. Můžeme předpokládat, že bod P leží mezi body B a D, jinak bychom zaměnili označení bodů A a B a dvojice M, N. Pak je $|BC| = |BM| + |MC| = |BP| + |PD| = |BD|$. Je tedy velikost odvěsny BC pravoúhlého trojúhelníku ABC rovna polovině velikosti přepony, protože bod D je podle předpokladu jejím středem. Kdybychom k bodu B sestrojili bod B' souměrně sdružený podle přímky AC, byl by trojúhelník ABB' rovnostranný, proto je $|\sphericalangle BAC| = 30°$.

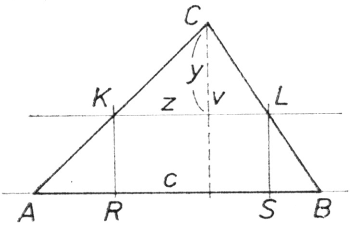
59. Označme M libovolný bod rovnostranného trojúhelníku ABC (obr. 10), označme dále a stranu trojúhelníku a p, q, r



Obr. 10

vzdálenosti bodu M od jednotlivých stran trojúhelníku. Součet obsahů trojúhelníků ABM, BCM, CAM se rovná obsahu trojúhelníku ABC, tedy $\frac{1}{2} a (p + q + r) = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, odkud $p + q + r = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$, což jsme měli dokázat. Použili jsme přitom vzorců pro obsah a velikost výšky rovnostranného trojúhelníku. Leží-li bod M na některé straně trojúhelníku, redukuje se příslušný trojúhelník v úsečku nebo dokonce v bod, což však v uvedeném důkazu není na závadu.

60. Každý pravoúhelník z množiny **M** dostaneme tímto postupem: s přímkou AB vedeme přímku rovnoběžnou, která protíná úsečku AC v některém jejím vnitřním bodě K a protíná tudíž i úsečku BC v bodě L (obr. 11). Paty kolmic vede-



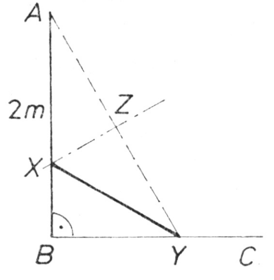
Obr. 11

ných body K, L na přímku AB označíme R, S. Pravoúhelník $KRSL$ má požadované vlastnosti. Označme $c = |AB|$, v výšku trojúhelníku ABC k straně AB, $z = |KL|$ a y výšku trojúhelníku KLC, příslušnou k straně KL. Z podobnosti trojúhelníků ABC, KLC plyne $y : v = z : c$. Obvod pravoúhelníku $KRSL$ se rovná

$$2\,[z + (v - y)] = 2\left[v + y\,\left(\frac{c}{v} - 1\right)\right].$$

Jestliže dva různé pravoúhelníky z množiny **M** mají stejný obvod, nabývá funkce $2\left[v + y\left(\frac{c}{v} - 1\right)\right]$ pro dvě různé hodnoty proměnné y stejné funkční hodnoty. To nastává jedině tehdy, když je $\frac{c}{v} - 1 = 0$, pak jsou obvody všech pravoúhelníků z množiny **M** rovny hodnotě $2v$.

61. Předpokládejme, že se nám již podařilo sestrojit trojúhelník AXY požadovaných vlastností (obr. 12). Označme Z

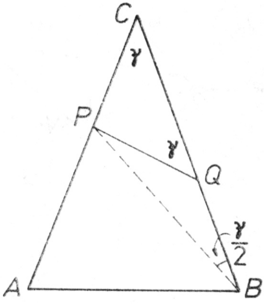


Obr. 12

střed strany AY a y její délku. Trojúhelníky AZX a ABY jsou podobné pravoúhlé trojúhelníky, proto je $\frac{|AX|}{|AZ|} = \frac{|AY|}{|AB|}$, odkud $|AX| = \frac{|AY|^2}{4m}$. Obvod trojúhelníku AXY je $2s$, tedy $|AY|^2 + 2m\,|AY| = 4ms$. Poslední rovnici upravíme na tvar $(|AY| + m)^2 = m(m + 4s)$, odkud plyne

$|AY| = \sqrt{m(m + 4s)} - m$. Tento vztah použijeme obráceně ke konstrukci bodu Y a pak trojúhelníku AXY. K hodnotám m, s sestrojíme úsečku délky $r = \sqrt{m(m + 4s)} - m$ a hledáme průsečík polopřímky BC s kružnicí o středu A a poloměru r. Aby však takový průsečík Y existoval a byl různý od bodu B, je nutné a stačí, aby platilo $\sqrt{m(m + 4s)} - m > 2m$, což je podmínka ekvivalentní s podmínkou $s > 2m$. Je-li tato podmínka splněna, můžeme bod Y sestrojit, bod X dostaneme jako průsečík osy úsečky AY a polopřímky AB, výpočtem pak zjistíme, že obvod trojúhelníku AXY je $2s$. Podmínka $s > 2m$ je nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti úlohy. Ještě poznamenejme, že úsečku délky $\sqrt{m(m + 4s)}$ sestrojíme pomocí Euklidovy věty o odvěsně tak, že sestrojíme pravoúhlý trojúhelník o přeponě $m + 4s$, jehož jeden úsek na ní má délku m. Odvěsna při tomto úseku má pak velikost $\sqrt{m(m + 4s)}$.

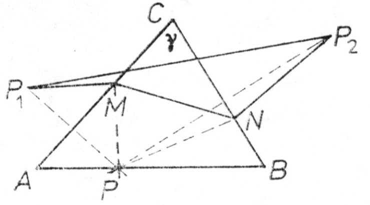
62. Nechť body P, Q splňují podmínky úlohy. Bod P nemůže být totožný s bodem C, protože by s ním pak musel splynout i bod Q, je totiž $|CP| = |PQ|$. Pak by však nemohlo platit $|PQ| = |QB|$. Na druhé straně může s bodem C splynout bod Q, pak ovšem musí být $P = A$. Vidíme, že úloha má vždy aspoň jedno řešení: $P = A$, $Q = C$. Nechť ani bod P, ani bod Q nesplývá s bodem C. Pak body C, P, Q tvoří rovnoramenný trojúhelník se základnou CQ (obr. 13), je tedy $|\sphericalangle CQP| = \gamma$, kde $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Rovnoramenný trojúhelník tvoří také body P, Q, B, protože bod Q nemůže být totožný s bodem B. Protože $|\sphericalangle PQB| = 180° - \gamma$, je



Obr. 13

$|\sphericalangle QBP| = \frac{\gamma}{2}$. Víme, že $|\sphericalangle CBA| = 90° - \frac{\gamma}{2}$ a protože $|\sphericalangle CBA| > |\sphericalangle CBP|$ (rovnost by mohla nastat pouze v případě $P = A$, ten jsme probrali zvlášť), je nutnou podmínkou pro to, aby úloha měla další řešení, splnění nerovnosti $90° > \gamma$. Ukážeme, že je to i podmínka postačující. Nechť je tato podmínka splněna. Na úsečce AC zvolme bod P tak, aby $|\sphericalangle CBP| = \frac{\gamma}{2}$ a na úsečce BC bod Q tak, aby $|\sphericalangle CQP| = \gamma$. Pak je trojúhelník CPQ rovnoramenný, $|CP| = |PQ|$. Dále je $|\sphericalangle QPB| = \frac{\gamma}{2}$, a tedy $|PQ| = |QB|$. Body P, Q jsou tedy dalším řešením úlohy. Můžeme shrnout: úloha má vždy řešení $P = A$, $Q = C$. Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, má úloha další řešení, které jsme právě popsali.

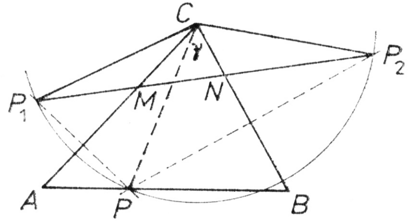
63. Zvolme bod M na straně AC a bod N na straně BC zatím libovolně (obr. 14). Sestrojme bod P_1 souměrně sdru-



Obr. 14

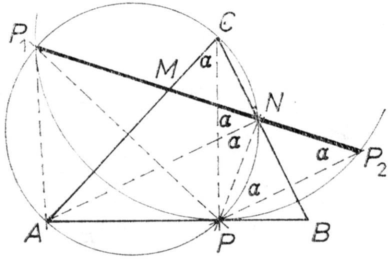
žený k bodu P podle přímky AC a bod P_2 souměrně sdružený k bodu P podle přímky BC. Pak je $|MP| = |MP_1|$, $|NP| = |NP_2|$ a obvod trojúhelníku MNP se rovná součtu $|P_1M| + |MN| + |NP_2|$. Je zřejmé, že tento součet je nejmenší právě tehdy, když body M, N leží na úsečce P_1P_2. Řešení úlohy je tedy nasnadě - body M, N zvolíme v průsečících přímky P_1P_2 s přímkami AC, BC. Co však, když přímka P_1P_2 vůbec trojúhelník ABC neprotíná? Ukážeme, že tento případ nenastane. Je totiž $|\sphericalangle P_1CP| = 2|\sphericalangle ACP|$, $|\sphericalangle PCP_2| = 2|\sphericalangle PCB|$, tedy $|\sphericalangle P_1CP| + |\sphericalangle PCP_2| = 2\gamma$, kde je γ velikost vnitřního úhlu v trojúhelníku ABC při vrcholu C, tedy podle předpokladu ostroúhlosti trojúhelníku ABC je $2\gamma < 180°$. Z nerovnosti $|\sphericalangle P_1CP| + |\sphericalangle PCP_2| < 180°$ pak vyplývá, že přímka P_1P_2 protíná strany AC, BC trojúhelníku ABC v jejich vnitřních bodech. Kdyby v poslední nerovnosti platilo místo znaménka nerovnosti znaménko rovnosti, procházela by přímka P_1P_2 bodem C a kdyby platila nerovnost obrácená, neobsahovala by přímka P_1P_2 žádný bod trojúhelníku ABC. V těchto dvou případech by úloha neměla řešení, protože čím bychom body M, N volili blíže k bodu C, tím by byl obvod trojúhelníku MNP menší. Při žádné volbě bodů M, N by nebyl obvod nejmenší.

64. Úloha navazuje na úlohu předcházející, nyní však není dán ani bod P. Zvolme zatím bod P uvnitř strany AB libovolně a podle předcházející úlohy sestrojme body M, N tak, aby byl obvod trojúhelníku PMN minimální (obr. 15). Obvod



Obr. 15

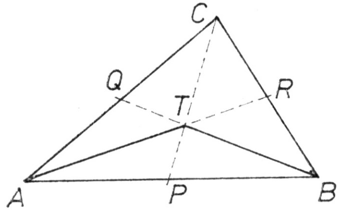
trojúhelníku PMN se tedy rovná velikosti úsečky P_1P_2. Jde tedy vlastně o to, zvolit uvnitř úsečky AB bod P tak, aby byla velikost $|P_1P_2|$ minimální. Víme, že $|P_1C| = |P_2C| = |PC|$, $|\sphericalangle P_1CP_2| = 2\gamma$. To znamená, že nezávisle na tom, jak zvolíme bod P, je P_1P_2C rovnoramenný trojúhelník s úhlem 2γ proti základně P_1P_2. Každé dva takové trojúhelníky jsou podobné, musíme ovšem bod P zvolit tak, abychom dostali trojúhelník s nejmenší možnou základnou. To je však totéž, jako kdybychom požadovali, aby to byl trojúhelník s nejmenším ramenem. Velikost ramene trojúhelníku P_1CP_2 je $|P_1C| = |PC|$. Chceme tedy zvolit bod P na úsečce AB tak, aby bylo $|PC|$ nejmenší. Je tudíž nutné zvolit za P patu kolmice vedené bodem C k straně AB. Protože je podle předpokladu trojúhelník ABC ostroúhlý, leží pata P uvnitř strany AB. Dál pak postupujeme stejně jako v předcházející úloze. Je zřejmé, že i body M, N budou patami výšek v trojúhelníku ABC, mohli jsme totiž místo od bodu P vyjít také od bodu M nebo N. Dokážeme si to však též přímo (obr. 16):



Obr. 16

Body P_1, P, P_2 leží na kružnici se středem C, tečnou v bodě P_1 je přímka P_1A, v bodě P je tečnou přímka AB. Označme $\alpha = |\sphericalangle ACP|$. Pak je $|\sphericalangle P_1CP| = 2\alpha$ a podle věty o obvodovém a středovém úhlu je $|\sphericalangle P_1P_2P| = \alpha$. Pak je také $\alpha = |\sphericalangle NPP_2|$, protože NB je osou úsečky PP_2, a tudíž $|\sphericalangle P_1NP| = 2\alpha$. Čtyřúhelníku CP_1AP lze opsat kružnici (je to kružnice nad průměrem AC), a protože $|\sphericalangle P_1NP| = |\sphericalangle P_1CP|$, prochází tato kružnice i bodem N. Protože bod A je středem oblouku P_1P na této kružnici, je $|\sphericalangle P_1NA| = |\sphericalangle ANP| = \alpha$. Je tedy $AN \parallel PP_2$, to znamená $AN \perp BC$. Tím je dokázáno, že bod N je patou kolmice vedené bodem A na přímku BC. Stejně bychom dokázali, že bod M je patou výšky na stranu AC v trojúhelníku ABC.

65. Označme T těžiště trojúhelníku ABC a P, Q, R středy jeho stran (obr. 17). Užitím trojúhelníkové nerovnosti na troj-



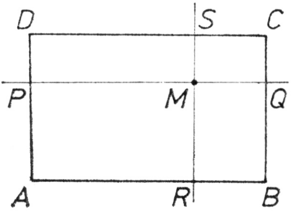
Obr. 17

úhelník ABT dostaneme $c < \frac{2t_a}{3} + \frac{2t_b}{3}$. Nahradíme-li trojúhelník ABT postupně trojúhelníky BCT, CAT, dostaneme dvě další nerovnosti, které bychom mohli také dostat cyklickou záměnou hodnot a, b, c v předcházející nerovnosti. Sečtením všech tří nerovností dostáváme $2s < \frac{4(t_a + t_b + t_c)}{3}$, odkud $\frac{3s}{2} < t_a + t_b + t_c$. Tím jsme dokázali jednu z nerovností úlohy. Všimněme si nyní trojúhelníku APR. Podle trojúhelníkové nerovnosti je $t_a < \frac{c}{2} + \frac{b}{2}$. Sečteme-li opět tuto nerovnost s nerovnostmi, které z ní dostaneme cyklickou záměnou hodnot a, b, c, vychází přímo druhá nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

66. Nechť je M libovolný bod obdélníku $ABCD$. Veďme jím rovnoběžku s přímkou AB, její průsečíky s přímkami AD, *BC* označme *P*, *Q* (obr. 18). Dále veďme bodem *M* přímku rovnoběžnou s přímkou *AD*, její průsečíky s přímkami *AB*, *CD* označíme *R*, *S*. Je pak

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |AR|^2 + |RM|^2 + |MQ|^2 + |QC|^2,$$

$$|MB|^2 + |MD|^2 = |BQ|^2 + |MQ|^2 + |MS|^2 + |DS|^2.$$



Obr. 18

Protože je $|AR| = |DS|$, $|RM| = |BQ|$ a $|QC| = |MS|$, je $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$, což jsme měli dokázat. Všimněme si, že jsme při důkazu ani nepoužili toho, že bod *M* je bodem obdélníku. Tvrzení tedy platí i pro body vně obdélníku. Velmi jednoduše se tvrzení úlohy dokazuje analyticky.

67. Označme *P* průsečík úhlopříček *AC*, *BD* (obr. 19). Trojúhelníky *ABP*, *CDP* jsou stejnolehlé a protože je podle předpokladu $|AB| = 2|CD|$, je také $|BP| = 2|DP|$, $|AP| = 2|CP|$. Zvolme označení podle obrázku. Protože jsou úhlopříčky na sebe kolmé, platí podle Pythagorovy věty

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$4x^2 + y^2 = u^2$$

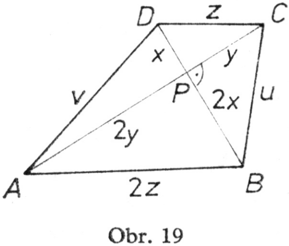
$$x^2 + 4y^2 = v^2.$$

Sečtením posledních dvou rovnic a užitím první rovnice dostaneme vztah

$$u^2 + v^2 = 5z^2, \text{ tedy } z = |CD| = \sqrt{\frac{1}{5}(u^2 + v^2)},$$

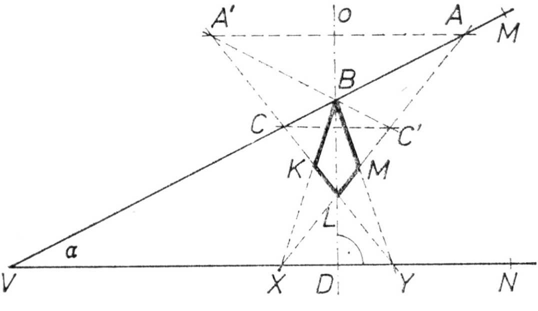
$$|AB| = 2\sqrt{\frac{1}{5}(u^2 + v^2)}.$$

Dále je $v^2 = x^2 + 4y^2$, $4u^2 = 16x^2 + 4y^2$ a tedy $v^2 < < 4u^2$. Pak je též $v < 2u$, protože u, v jsou čísla kladná. Stejně bychom dokázali, že $u < 2v$.



Obr. 19

68. Předpokládejme, že jsme body X, Y již sestrojili. Označme K, L, M další tři vrcholy čtyřúhelníku $BKLM$, který je průnikem trojúhelníků AXB, CYB (obr. 20). Protože

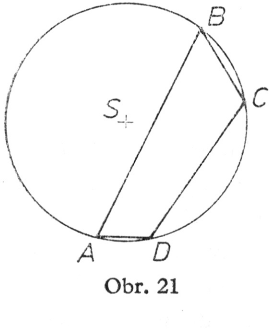


Obr. 20

je čtyřúhelník $BKLM$ souměrný podle přímky BL, jsou podle této přímky souměrně sdružené jak body K, M, tak také body X, Y. Vidíme, že osa o čtyřúhelníku $BKLM$ je nutně kolmá na spojnici XY, tedy na přímku VN. Kromě toho leží bod X na spojnici bodů A, C', kde C' je bod souměrně sdružený k bodu C podle osy o, podobně bod Y leží na spojnici CA', A' je bod souměrně sdružený k bodu A podle osy o. Tento rozbor nás vede ke konstrukci: sestrojíme nejdříve přímku o, která je kolmá k přímce VN a prochází bodem B. Dále sestrojíme body A', C' souměrně sdružené k bodům A, C podle přímky o. Bod X nechť je průsečíkem přímky AC' s ramenem VN úhlu MVN, bod Y průsečíkem této polopřímky a přímky CA'. Může se však stát, že trojúhelníky AXB a CYB budou mít společný pouze bod B nebo úsečku BD, kde je D průsečík přímek o, VN. Aby se toto nestalo, je nutné a stačí, aby bod Y ležel dál od bodu V než bod D. Je $|VD| = b \cos \alpha$, kde $\alpha = |\sphericalangle NVM|$, dále je $|AA'| = 2(a - b) \cos \alpha$, kde $a = |AV|$, $b = |BV|$, $c = |CV|$.

Z podobnosti trojúhelníků $AA'C$, VYC plyne $|VY| = \frac{2(a-b)c}{(a-c)} \cos\alpha$. Pak je $|VY| > |VD|$ právě tehdy, když je $2ac > b(a+c)$. To je nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti úlohy. Za této podmínky se trojúhelníky AXB a CYB protínají v čtyřúhelníku souměrném podle osy o.

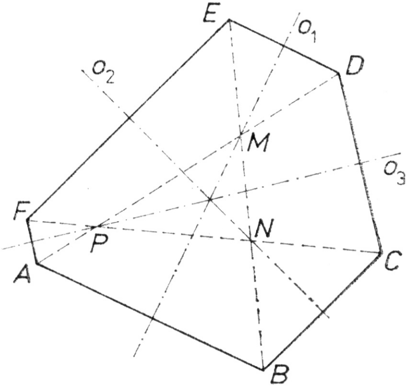
69. Jestliže leží střed S na některé straně čtyřúhelníku, je tato strana průměrem kružnice, žádná jiná strana čtyřúhelníku pak bodem S neprochází, jinak by byl bod S vrcholem čtyřúhelníku. To však nemůže nastat, protože všechny vrcholy čtyřúhelníku leží na kružnici. Strany čtyřúhelníku, které neobsahují bod S, jsou pak tětivy kružnice, různé od průměru, a proto kratší. Leží-li bod S vně čtyřúhelníku $ABCD$, existuje jedna jeho strana, která odděluje bod S od ostatních dvou vrcholů čtyřúhelníku (obr. 21). Zvolme označení tak, že je to



Obr. 21

strana AB. Vrcholy C, D pak leží na menším oblouku kružnice s krajními body A, B. Proto jsou tětivy AD, CD, BC kratší než tětiva AB.

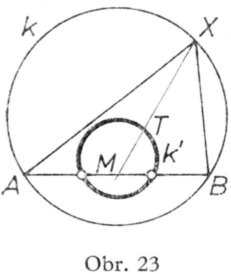
70. Danému šestiúhelníku (obr. 22) lze opsat kružnici, právě když osy všech jeho stran procházejí společným bodem. Nejdříve dokážeme, že osy protějších stran šestiúhelníku splývají. Vezměme například strany AB, DE. Protože jsou spolu rovnoběžné, tvoří body A, B, D, E lichoběžník nebo



Obr. 22

rovnoběžník. Jeho úhlopříčky AD, BE jsou stejně dlouhé, jde tedy o rovnoramenný lichoběžník nebo pravoúhelník. Pak je ovšem osa o_1 úsečky AB zároveň osou úsečky DE. Obdobně je osa o_2 strany BC zároveň osou strany EF a osa o_3 strany CD zároveň osou strany FA. Již jsme si ukázali, že $ABDE$ je rovnoramenný lichoběžník nebo pravoúhelník. Proto je jeho osa o_1 osou úhlu AMB, kde M je průsečík úhlopříček AD, BE. Stejně tak je o_2 osa úhlu ENF, kde N je průsečík úhlopříček BE a CF a přímka o_3 je osou úhlu CPD, P je průsečík úhlopříček AD, CF. Jestliže úhlopříčky AD, BE, CF procházejí jedním bodem, splývají body M, N, P v jediný bod, kterým procházejí i osy o_1, o_2, o_3. Neprocházejí-li úhlopříčky šestiúhelníku jedním bodem, tvoří body M, N, P trojúhelník a o_1, o_2, o_3 jsou osy úhlů v tomto trojúhelníku. I pak však procházejí jedním bodem, což jsme měli dokázat.

71. Zvolme na kružnici k bod X, $X \neq A$, $X \neq B$. Těžiště T trojúhelníku ABX leží na těžnici procházející bodem X, tedy na úsečce MX, kde M je střed úsečky AB. Ze známé vlastnosti těžiště dále víme, že $|MT| = \frac{1}{3}|MX|$ (obr. 23). Odtud je vidět, že bod T je obrazem bodu X ve stejnolehlosti



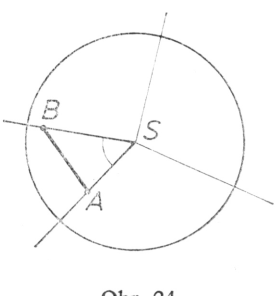
Obr. 23

se středem M a koeficientem $\frac{1}{3}$. Označme k' kružnici odpovídající kružnici k v této stejnolehlosti. Těžiště každého uvažovaného trojúhelníku ABX leží tedy na kružnici k'. Zvolme obráceně na kružnici k' bod T a pokusme se sestrojit trojúhelník ABX s těžištěm T tak, aby $X \in k$. Bod X najdeme snadno, je to vzor bodu T v uvažované stejnolehlosti. Leží na polopřímce MT a je $|MX| = 3|MT|$. Musíme však vyloučit ty body T, při nichž bod X splyne s některým z bodů A, B, protože pak body A, B, X netvoří trojúhelník. Můžeme tedy shrnout: množinou těžišť všech trojúhelníků ABX, kde $X \in k$, je kružnice k' bez jejích dvou průsečíků s přímkou AB.

72. Rozlišíme dva případy:

a) Jeden z daných bodů splývá se středem dané kružnice. Pak je vzdálenost každého z dalších tří daných bodů od tohoto bodu menší než 1, tedy také menší než $\sqrt{2}$.

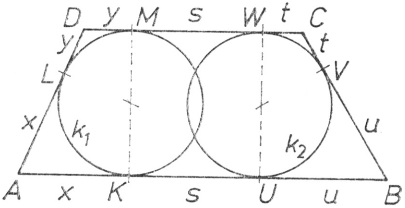
b) Žádný z daných bodů nesplývá se středem S dané kružnice. Pak určuje střed S spolu s každým z daných bodů polopřímku a aspoň dvě z těchto polopřímek svírají úhel nejvýše rovný 90°. Nechť to jsou polopřímky SA, SB; A, B jsou dva z daných bodů (obr. 24). Z trojúhelníku SAB pak plyne $|AB|^2 = |SA|^2 + |SB|^2$ nebo $|AB|^2 < |SA|^2 + |SB|^2$ podle toho, zda je úhel ASB pravý nebo ostrý.



Obr. 24

Protože $|SA| < 1$, $|SB| < 1$, platí v obou případech $|AB|^2 < 2$, tedy $|AB| < \sqrt{2}$.

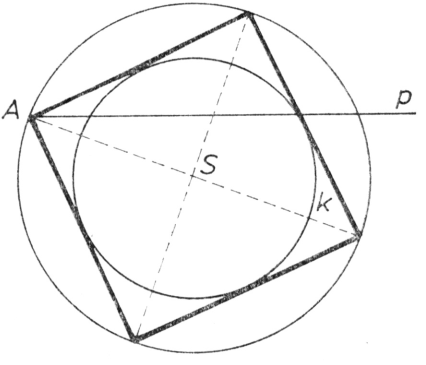
73. Označme po řadě K, L, M body dotyku kružnice k_1 na stranách AB, AD, CD, dále U, V, W body dotyku kružnice k_2 na stranách AB, BC, CD. Poloměr kružnic k_1, k_2 označíme r a vzdálenost jejich středů s. Je $|AK| = |AL|$, označme tuto velikost x (obr. 25). Podobně $y = |DL| = |DM|$,



Obr. 25

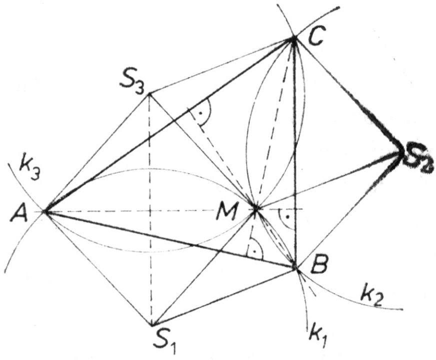
$t = |CW| = |CV|$, $u = |BU| = |BV|$. Pro délky základen lichoběžníku pak platí $a = x + s + u$, $b = y + s + t$, pro délky ramen máme $c = u + t$, $d = x + y$, tedy $(a + b) - (c + d) = 2s$, výška v lichoběžníku je $2r$. Je tudíž $(a + b) - (c + d) = 2v$ právě tehdy, když je $s = 2r$. To je však nutná a postačující podmínka pro to, aby měly kružnice k_1, k_2 vnější dotyk.

74. Předpokládejme, že jsme úlohu již vyřešili. Označme A vrchol čtverce, který leží na přímce p. Protože $|SA| = r\sqrt{2}$, leží bod A také na kružnici se středem S o poloměru $r\sqrt{2}$ (obr. 26). Ta protíná přímku p právě ve dvou bodech, každý z nich můžeme doplnit na čtverec opsaný kružnici k. Tyto dva čtverce nemohou být totožné. Dva vrcholy čtverce by totiž ležely na přímce p, která by musela být jeho stranou nebo úhlopříčkou. Stranou nemůže být, protože se kružnice k nedotýká, úhlopříčkou také nemůže být, protože neprochází bodem S, který musí být středem čtverce. Úloha má tedy právě dvě řešení.



Obr. 26

75. Nechť bod M splňuje podmínku úlohy. Označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABM, BCM, CAM postupně S_1, S_2, S_3 (obr. 27). Pak platí $|S_1A| = |S_1B| = |S_1M| = |S_2B| = |S_2C| = |S_2M| = |S_3C| = |S_3A| = |S_3M|$. Bod M musí být různý od bodů A, B, C a z rovností $|S_1M| = |S_2M| = |S_1B| = |S_2B|$ plyne, že buď



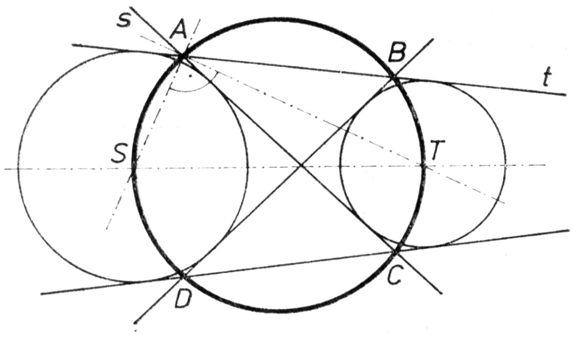
Obr. 27

$S_1 = S_2$, nebo že S_1MS_2B je kosočtverec. Je-li $S_1 = S_2$, splývají kružnice opsané trojúhelníkům ABM, BCM s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC a bod M je jejím bodem. Ve druhém případě je nejen S_1MS_2B, ale též S_2MS_3C a S_3MS_1A kosočtverec. První dva mají společnou stranu MS_2, a proto tvoří zbývající vrcholy obou kosočtverců rovnoběžník, v našem případě je to rovnoběžník S_1BCS_3. Odtud plyne, že přímky S_1S_3 a BC jsou rovnoběžné, a protože přímky AM, S_1S_3 jsou kolmé, jsou to úhlopříčky kosočtverce, jsou kolmé i přímky AM a BC. Leží tedy bod M na výšce trojúhelníku ABC, která prochází bodem A. Stejně bychom dokázali, že bod M leží též na zbývajících výškách trojúhelníku ABC, neboli že je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Tím jsme dokázali: jsou-li poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ABM, BCM, CAM stejné, pak je bod M buď průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC, nebo je bod M

libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku ABC, různý od bodů A, B, C.

Obráceně, nechť je bod M libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku ABC různý od bodů A, B, C. Pak kružnice opsané trojúhelníkům ABM, BCM, CAM splývají všechny s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC a mají tudíž stejný poloměr. Nechť je teď M průsečíkem výšek trojúhelníku ABC, který nemůže být pravoúhlý, protože podle předpokladu nesplývá bod M s žádným vrcholem trojúhelníku ABC. Kružnice k_2 a k_3 opsané trojúhelníkům BCM a CAM mají společnou tětivu CM, které přísluší v kružnici k_2 obvodový úhel CBM a v kružnici k_3 obvodový úhel CAM. Přitom je $CA \perp BM$, $AM \perp CB$, a proto jsou úhly CBM, CAM stejně veliké. Odpovídají tedy společné tětivě CM kružnic k_2, k_3 stejně velké obvodové úhly, a proto mají kružnice k_2, k_3 stejně velké poloměry. K témuž výsledku bychom došli i v případě kružnic k_3 a k_1, kde k_1 je kružnice opsaná trojúhelníku ABM. Můžeme tedy shrnout: množinou všech bodů M, pro něž mají kružnice opsané trojúhelníkům ABM, BCM, CAM stejně velké poloměry, je množina bodů kružnice opsané trojúhelníku ABC a průsečík výšek trojúhelníku ABC s výjimkou bodů A, B, C.

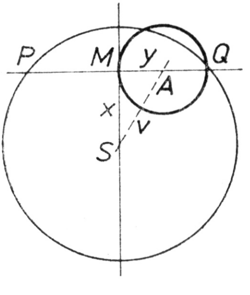
76. Body A, B, C, D tvoří rovnoramenný lichoběžník, popřípadě pravoúhelník, spojnice středů S, T daných kružnic je vždy osou tohoto čtyřúhelníku. Dokážeme, že kružnice nad průměrem ST prochází body A, B, C, D. Nechť je t společná vnější a s společná vnitřní tečna daných kružnic, A jejich průsečík (obr. 28). Protože S a T jsou středy kružnic, jež se dotýkají přímek s, t, jsou přímky AS a AT osy úhlů přímek



Obr. 28

s, t, a jsou tudíž na sebe kolmé. Podle Thaletovy věty leží bod A na kružnici nad průměrem ST. Totéž bychom dokázali pro body B, C, D. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

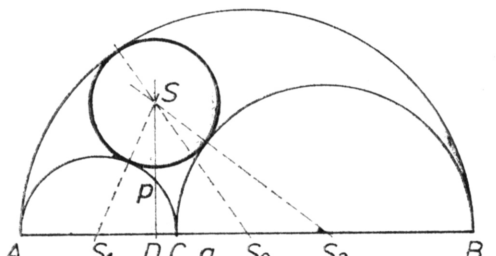
77. Zvolme označení podle obrázku 29. Podle podmínek úlohy má být $|AP| - |AQ| = d$. Protože $|AP| - |AQ| = |PM| + y - (|MQ| - y)$, je $2y = d$. Z pravoúhlého



Obr. 29

trojúhelníku SMA máme $x = \sqrt{v^2 - \frac{d^2}{4}}$ a délka tětivy PQ je $2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - v^2}$. Úloha má právě tehdy řešení, je-li tato hodnota nejvýše rovna průměru kružnice, musí tedy platit $v \geqq \frac{d}{2}$. Známe-li délku tětivy PQ, můžeme ji sestrojit. Stačí zvolit libovolnou tětivu vypočtené délky a otočit ji kolem středu S tak, aby procházela bodem A. Lépe je však najít nejdříve střed M hledané tětivy. Ten je podle výše odvozeného bodem dotyku tečny vedené bodem S ke kružnici o středu A a poloměru $\frac{d}{2}$. Zde opět vidíme, že nutnou podmínkou řešitelnosti úlohy je $v \geqq \frac{d}{2}$, a to je i podmínka postačující.

78. Poloměr hledané kružnice označíme r, její střed S, další označení zvolíme podle obr. 30. Bod D je pata kolmice



Obr. 30

vedené bodem S k přímce AB. Z pravoúhlých trojúhelníků SDS_0, SDS_1 a SDS_2 dostáváme rovnice

$$p^2 + q^2 = (6 - r)^2,$$

$$p^2 + (4 - q)^2 = (2 + r)^2,$$

$$p^2 + (2 + q)^2 = (4 + r)^2,$$

kde jsme označili $p = |SD|$, $q = |S_0D|$.

Je to soustava tří rovnic o třech neznámých p, q, r, kterou snadno vyřešíme. Odečtením první rovnice od zbývajících dvou dostaneme rovnice $2r + q = 6$, $5r - q = 6$. Jejich sečtením dostaneme $r = \frac{12}{7}$. A protože úloha nevyžaduje důkaz existence kružnice dotýkající se všech tří polokružnic, jsme s řešením hotovi. Snad bychom mohli ještě poznamenat, že střed hledané kružnice můžeme snadno sestrojit, když již známe její poloměr. Vzdálenost bodu S od bodu S_1 je totiž $2 + \frac{12}{7}$, od bodu S_2 je $4 + \frac{12}{7}$.

79. Označme D druhý průsečík přímky S_1S_2 s kružnicí k_2, tedy ten průsečík, který je různý od bodu C. Je-li $r_1 = r_2$, je trojúhelník BDS_2 obrazem trojúhelníku ACS_1 v posunutí. V případě $r_1 \neq r_2$, můžeme pak předpokládat $r_1 > r_2$, jsou trojúhelníky BDS_2 a ACS_1 stejnolehlé. V obou případech jsou přímky BD, AC rovnoběžné. Podle Thaletovy věty jsou přímky BC, BD na sebe kolmé. Jsou tedy kolmé i přímky

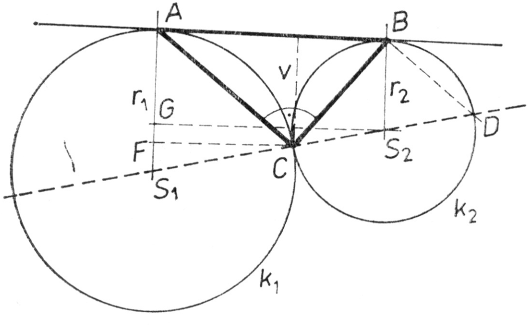
BC, AC. Tím je dokázáno, že je trojúhelník ABC pravoúhlý. Vypočteme ještě obsah P trojúhelníku ABC. Je-li $r_1 = r_2$, je obsah P roven polovině obsahu obdélníku ABS_2S_1 o stranách $2r_1$, r_1, tedy $P = r_1^2$. Nechť je $r_1 > r_2$. Veďme body C, S_2 přímky rovnoběžné s přímkou AB, jejich průsečíky s přímkou S_1A označíme F, G. Pak je $|S_1G| = r_1 - r_2$, $|S_1F| = r_1 - v$, kde je v výška v trojúhelníku ABC na stranu AB (obr. 31). Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků S_1S_2G, S_1CF plyne $(r_1 - v) : r_1 = (r_1 - r_2) : (r_1 + r_2)$, takže

$$v = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

Dále je $|AB| = |S_2G| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}.$

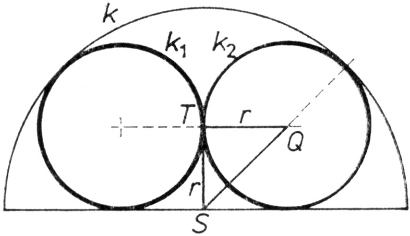
Odtud pak plyne

$$P = \frac{1}{2}\,|AB|\,v = \frac{2r_1r_2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 + r_2}.$$



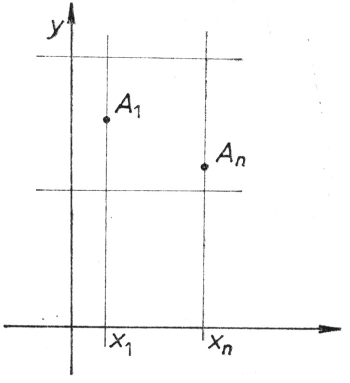
Obr. 31

80. Zvolme označení podle obr. 32, r je hledaný poloměr. Je $|SQ| = 5 - r$, $|ST| = |TQ| = r$ a trojúhelník STQ je pravoúhlý. Podle Pythagorovy věty je $(5 - r)^2 = 2r^2$, tedy $r = 5(\sqrt{2} - 1) \doteq 2{,}07$.



Obr. 32

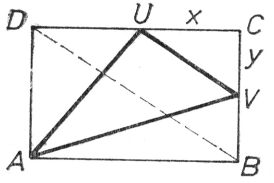
81. Zvolme v uvažované rovině libovolnou pravoúhlou soustavu souřadnic. Body dané konečné množiny označme $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dále označme $[x_k, y_k]$ souřadnice bodu A_k vzhledem k zvolené soustavě souřadnic, $k = 1, 2, \ldots, n$. Některá z hodnot x_k ($k = 1, \ldots, n$) je nejmenší, můžeme předpokládat, že je to hodnota x_1. Jedna z těchto hodnot je také největší, nechť to je např. hodnota x_n. Je tedy $x_1 \leqq x_k \leqq x_n$ pro každé $k = 1, \ldots, n$. To znamená, že všechny body A_k leží v pásu mezi přímkami $x = x_1$, $x = x_n$ (obr. 33). Jeho šířka je nejvýše rovna jedné, protože by jinak byla vzdálenost bodů A_1, A_n větší než 1. Stejně tak dokážeme, že všechny body dané konečné množiny leží v pásu rovnoběžném s osou x, jehož šířka je nejvýše rovna jedné. Všechny dané body tedy leží v průniku obou pásů, jímž je pravoúhelník, jehož žádná strana není větší než 1. Můžeme zvolit čtverec



Obr. 33

o straně 1, který tento pravoúhelník obsahuje, ten pak obsahuje i všechny body z dané konečné množiny.

82. Zvolme na straně CD obdélníku $ABCD$ bod U, na straně BC bod V a označme $x = |CU|$, $y = |CV|$ (obr. 34). Obsah trojúhelníku ABV je $\frac{1}{2}a(b - y)$, obsah trojúhelníku



Obr. 34

ADU je $\frac{1}{2}b(a - x)$. Obsah trojúhelníku AUV se rovná obsahu obdélníku $ABCD$ zmenšenému o obsahy trojúhelníků ABV, ADU a CUV, rovná se tedy hodnotě

$$ab - \frac{1}{2}a(b - y) - \frac{1}{2}b(a - x) - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(ay + bx - xy).$$

Všechny tři trojúhelníky mají právě tehdy stejný obsah, když platí

$$\frac{1}{2}b(a - x) = \frac{1}{2}a(b - y)$$

a zároveň

$$\frac{1}{2}b(a - x) = \frac{1}{2}(ay + bx - xy).$$

Úpravou těchto rovnic dostaneme $bx = ay$, $ab - ay - 2bx + xy = 0$. Vyjádříme z první rovnice y a dosadíme do druhé. Po vynásobení výsledné rovnice číslem $\frac{a}{b}$ dostaneme pro x rovnici

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0,$$

kterou upravíme na tvar

$$\left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2.$$

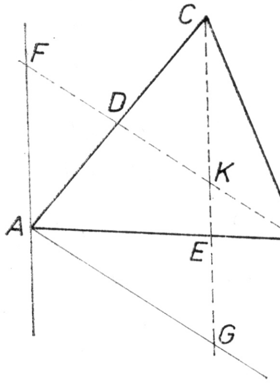
Z této rovnice plyne $x - \frac{3}{2}a = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ nebo $x - \frac{3}{2}a = -\frac{a}{2}\sqrt{5}$. Vzhledem k tomu, že x nemůže být větší než a, nevyhovuje první možnost a je tedy

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}a > 0, y = \frac{b}{a}x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}b.$$

Zvolíme-li obráceně na stranách CD, CB body U, V tak, že $2|CU| = (3 - \sqrt{5})a$, $2|CV| = (3 - \sqrt{5})b$, můžeme se přesvědčit, že trojúhelníky ABV, ADU a AUV mají stejné obsahy. Známe-li úsečku délky a, snadno sestrojíme nejen úsečku délky $3a$, ale i úsečku délky $a\sqrt{5}$, a to jako přeponu v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách a, $2a$. Z úseček délek $3a$, $a\sqrt{5}$ pak již snadno sestrojíme úsečku délky $(3 - \sqrt{5})\frac{a}{2}$. Všimněme si ještě, že $|CU| : |CV| = a : b$. Jsou tedy trojúhelníky CUV, CDB stejnolehlé a proto $UV \parallel DB$. Stačí sestrojit výše popsaným způsobem třeba jen bod U, bod V leží na rovnoběžce vedené bodem U s úhlopříčkou DB.

83. S touto úlohou se často setkáme, vyřešíme si ji proto trochu obecněji. Veďme bodem A přímku rovnoběžnou nejdříve se spojnicí CE (obr. 35), její průsečík s přímkou BD označíme F. Ze stejnolehlosti trojúhelníků AFD, CKD plyne

$$\frac{|AF|}{|CK|} = \frac{|AD|}{|CD|},$$



Obr. 35

podobně ze stejnolehlosti trojúhelníků *EKB*, *AFB* plyne

$$\frac{|EK|}{|AF|} = \frac{|EB|}{|AB|}.$$

Vynásobením těchto dvou rovnic se $|AF|$ zkrátí a máme

$$\frac{|EK|}{|CK|} = \frac{|AD|}{|CD|}\frac{|EB|}{|AB|}.$$

Veďme nyní bodem *A* rovnoběžku s přímkou *BD*, její průsečík s přímkou *CE* označíme *G*. Platí

$$\frac{|AG|}{|DK|} = \frac{|AC|}{|DC|}, \quad \frac{|BK|}{|AG|} = \frac{|EB|}{|EA|}.$$

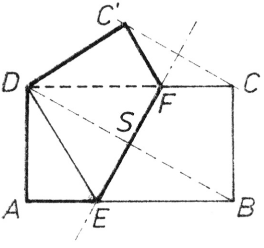
Určete si sami dvě dvojice stejnolehlých trojúhelníků, které vedou k těmto dvěma rovnicím. Jejich vynásobením dostaneme

$$\frac{|BK|}{|DK|} = \frac{|AC|}{|DC|}\frac{|EB|}{|EA|}.$$

V našem případě je $|EK| : |CK| = 1 : 3$, $|BK| : |DK| = 1$, protože $|AD| : |CD| = 1$, $|AC| : |DC| = 2$, $|EB| : |AB| = 1 : 3$ a $|EB| : |EA| = 1 : 2$. Je tudíž bod K středem úsečky BD, zatímco úsečku CE dělí bod K v poměru $3 : 1$. Protože je bod K středem úsečky BD, jsou si sobě rovny obsahy trojúhelníků DKC, BKC, a protože obsah trojúhelníku DBC je $\frac{P}{2}$, je obsah každého z trojúhelníků BKC, DKC roven $\frac{P}{4}$.

Součet obsahů trojúhelníků BKC a BKE je $\frac{P}{3}$, je tudíž obsah trojúhelníku BKE roven $\frac{P}{12}$ a na obsah čtyřúhelníku $AEKD$ zbývá $\frac{5P}{12}$.

84. Označme E, F průsečíky osy úsečky BD s přímkami AB, DC a C' bod souměrně sdružený k bodu C podle přímky EF (obr. 36). Pětiúhelník $AEFC'D$, jehož obsah máme určit, je složen ze dvou překrývajících se čtyřúhelníků $AEFD$ a $DEFC'$, obsah každého z nich je $\frac{ab}{2}$. Sečteme-li tyto dva obsahy, dostaneme obsah pětiúhelníku $AEFC'D$ a obsah

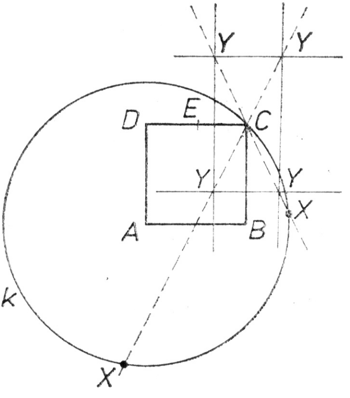


Obr. 36

trojúhelníku DEF, protože ten je průnikem obou čtyřúhelníků. Trojúhelník DEF je rovnoramenný, jeho obsah je $|DS| . |SF|$, kde S je střed obdélníku. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků DSF a DCB plyne $|SF| : b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} : a$, takže obsah trojúhelníku DEF je $\dfrac{b(a^2 + b^2)}{4a}$, hledaný obsáh pětiúhelníku $AEFC'D$ je $\dfrac{b(3a^2 - b^2)}{4a}$. Z úlohy bychom si měli zapamatovat pravidlo pro výpočet obsahu obrazce, který je sjednocením dvou obrazců. Obsah sjednocení se rovná součtu obsahů obou obrazců zmenšenému o obsah jejich průniku, což lze vyjádřit vzorcem

$$P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L).$$

85. Trojúhelníky XDE a XBC mají právě tehdy stejné obsahy, když vzdálenost bodu X od přímky DE je nenulová a dvakrát větší než vzdálenost bodu X od přímky BC. Dále platí: má-li bod X popsanou vlastnost, má tuto vlastnost každý bod přímky CX různý od bodu C. To plyne z podobnosti trojúhelníků. Stejně tak je vidět, že na přímce CX lze zvolit bod Y tak, že jeho vzdálenost od přímky BC je rovna jedné a jeho vzdálenost od přímky CD dvěma (obr. 37).



Obr. 37

Takové body jsou čtyři, dostaneme je jako průsečíky dvou rovnoběžek s přímkou BC ve vzdálenosti jedna od přímky BC, s dvěma rovnoběžkami s přímkou CD, vedenými ve vzdálenosti dvě od této přímky. Spojíme-li tyto čtyři body s bodem C, dostaneme dvě různoběžky a právě všechny body X těchto dvou různoběžek (kromě bodu C), mají výše popsanou vlastnost. K vyřešení naší úlohy stačí určit průsečíky sestrojených dvou různoběžek s kružnicí k. Žádná z těchto přímek není tečnou kružnice k v bodě C, protože každý bod této tečny má od přímek BC, CD stejné vzdálenosti. Protíná proto každá z uvažovaných různoběžek kružnici k v bodě C a v jednom dalším bodě. Úloha má tedy dvě řešení.

86. Je $|AC_1| = |AC| \cos \alpha$, $|AB_1| = |AB| \cos \alpha$, odkud $|AC_1| : |AB_1| = |AC| : |AB|$. Jsou tedy trojúhelníky AC_1B_1, ACB podobné, poměrem podobnosti je číslo $\cos \alpha$. Pak se obsah trojúhelníku AC_1B_1 rovná $P \cos^2 \alpha$ a obsah čtyřúhelníku BCB_1C_1 je $P - P \cos^2 \alpha = P \sin^2 \alpha$.

87. Označíme d_1 velikost té strany trojúhelníku T_1, ke které přísluší výška v_1. Pak je d_1 nejdelší strana trojúhelníku T_1 a $2P_1 = v_1 d_1$. Podobně označíme d_2 nejdelší stranu v trojúhelníku T_2. Nerovnost, kterou máme dokázat, převedeme postupně na ekvivalentní nerovnosti:

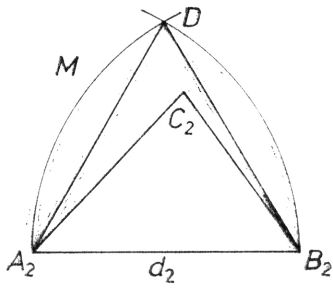
$$v_2 P_1 \leqq v_1 P_2$$

$$v_2 . 2P_1 \leqq v_1 . 2P_2$$

$$v_2 v_1 d_1 \leqq v_1 v_2 d_2$$

$$d_1 \leqq d_2$$

Máme tedy dokázat, že nejdelší strana trojúhelníku T_1 je nejvýše rovna nejdelší straně trojúhelníku T_2. To je možno provést různými způsoby. Nechť jsou např. A_2, B_2 takové dva vrcholy trojúhelníku T_2, které tvoří jeho nejdelší stranu, další jeho vrchol označíme C_2 (obr. 38). Sestrojme v polorovině $A_2B_2C_2$ bod D tak, aby A_2B_2D byl rovnostranný trojúhelník. Protože $|A_2C_2| \leqq d_2$, $|B_2C_2| \leqq d_2$, leží bod C_2 nutně v průniku **M** poloroviny $A_2B_2C_2$ a dvou kruhů o středech A_2, B_2 a poloměru d_2. Kruh opsaný z libovolného bodu

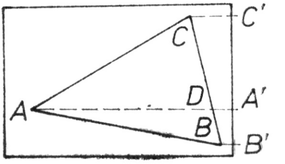


Obr. 38

množiny **M** poloměrem d_2 obsahuje celou množinu **M**. To znamená, že vzdálenost libovolných dvou bodů množiny **M** je nejvýše d_2, tím spíše to platí pro libovolné dva body trojúhelníku T_2, který leží celý v **M**. Pak je však též každá strana trojúhelníku T_1 rovna nejvýše d_2, tedy i pro jeho nejdelší stranu d_1 platí $d_1 \leqq d_2$.

88. Promítněme vrcholy A, B, C trojúhelníku T kolmo na některou stranu pravoúhelníku P. Dostaneme body A', B', C', z nichž jeden musí ležet na úsečce tvořené zbývajícími dvěma. Můžeme předpokládat, že bod A' leží na úsečce

$B'C'$ (obr. 39). Označme D ten bod úsečky BC, který se promítne do bodu A'. Takový bod existuje, protože A' leží na úsečce $B'C'$. Trojúhelník ABC je sjednocením trojúhelníků ADB, ADC, které mají společnou jen stranu AD. Proto

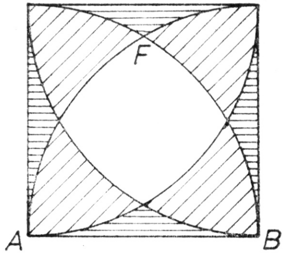


Obr. 39

$$2S_2 = |AD|\,|A'B'| + |AD|\,|A'C'| = |AD|\,|B'C'|.$$

Velikost $|AD|$ je nejvýše rovna velikosti jedné strany pravoúhelníku, $|B'C'|$ je nejvýše rovna velikosti druhé strany pravoúhelníku. Je tedy $2S_2 \leqq S_1$, rovnost platí právě tehdy, když je $B'C'$ jedna strana pravoúhelníku a AD příčka rovnoběžná s druhou stranou. To ovšem znamená, že dva vrcholy trojúhelníku jsou sousedními vrcholy pravoúhelníku a třetí leží na jeho protější straně.

89. Čtverec je rozdělen na devět částí (obr. 40), čtyři z nich, které jsou na obrázku vyšrafovány řídce, jsou shodné, mají stejný obsah Q. Rovněž tak jsou shodné každé dvě hustě vyšrafované části, obsah každé z nich označíme P a R označíme obsah části nevyšrafované. Pak je



Obr. 40

$$3Q + 2P + R = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (obsah čvrtkruhu)},$$

$$4Q + 4P + R = a^2 \text{ (obsah čtverce)}.$$

Průnik dvou čtvrtkruhů opsaných ze sousedních vrcholů A, B čtverce má podle našeho označení obsah $R + 2Q + P$. Na druhé straně můžeme tento průnik dostat též jako průnik dvou kruhových výsečí o středovém úhlu 60°, které se protínají v rovnostranném trojúhelníku ABF, F je společný bod čtvrtkružnic opsaných z bodů A, B. Proto je

$$R + 2Q + P = 2.\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

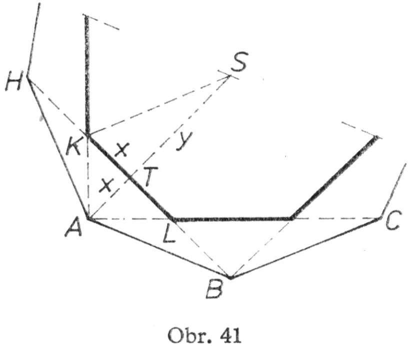
Máme tak pro P, Q, R tři lineární rovnice, z nichž postupným vylučováním vypočteme

$$P = \frac{a^2}{12}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi),$$

$$Q = \frac{a^2}{12}(\pi + 6\sqrt{3} - 12),$$

$$R = \frac{a^2}{12}(4\pi + 12 - 12\sqrt{3}).$$

90. Označme K, L ty vrcholy nově vzniklého osmiúhelníku, které leží na úsečce HB (obr. 41), T jejich střed a S střed obou osmiúhelníků. Každé dva pravidelné osmiúhelníky jsou podobné, poměrem podobnosti je např. poměr poloměrů



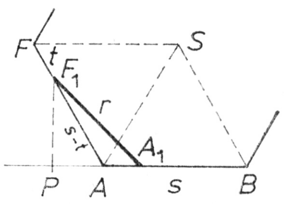
Obr. 41

kružnic osmiúhelníkům opsaných, v našem případě je to poměr $k = |SK| : |SA|$. Platí $|SA| = |ST|\sqrt{2}$ (poloviční úhlopříčka a poloviční strana čtverce), dále je $|KT| = |TA|$. Označíme-li $x = |KT|$, $y = |ST|$, je $|SK| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|SA| = x + y = y\sqrt{2}$, takže $x = y(\sqrt{2} - 1)$ a $|SK| =$

$= y\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} = y\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = y\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}},$

$k = |SK| : |SA| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Poměr obsahů obou osmiúhelníků je k^2, tedy $2 - \sqrt{2}$.

91. Označme P patu kolmice z bodu F_1 na přímku AB (obr. 42). Protože $|\sphericalangle F_1AP| = 60°$, je $|AP| = \dfrac{s - t}{2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku A_1PF_1 dostáváme



Obr. 42

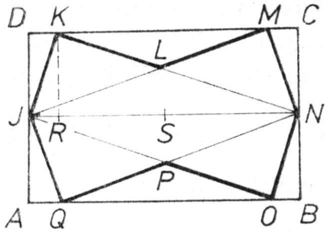
$$r^2 = |A_1P|^2 + |F_1P|^2 = |A_1P|^2 + |AF_1|^2 - |AP|^2 =$$

$$= \left(t + \frac{s - t}{2}\right)^2 + (s - t)^2 - \left(\frac{s - t}{2}\right)^2 = t^2 + s^2 - st.$$

Tento výraz můžeme upravit na tvar $r^2 = \left(t - \dfrac{s}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\,s^2.$

Odtud vidíme, že r^2 a tedy i r je nejmenší pro $t = \dfrac{s}{2}$.

92. Osmiúhelník je sjednocením obdélníků $JMNQ$ a $JONK$ (obr. 43), které mají stejný obsah $\frac{ab}{2}$, protože obsah např. trojúhelníku JNK je $\frac{ab}{4}$. Průnikem obou odbélníků je rovno-



Obr. 43

běžník $JLNP$, jeho obsah se rovná dvojnásobku obsahu trojúhelníku JNL. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků LSN, KRN, kde R je pata kolmice vedené bodem K na přímku JN a S střed obdélníku, plyne

$$|LS| : |SN| = |KR| : |RN|,$$

odtud $|LS| = \dfrac{ab}{2\,(a + \sqrt{a^2 - b^2})}$, protože $|SR| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$.

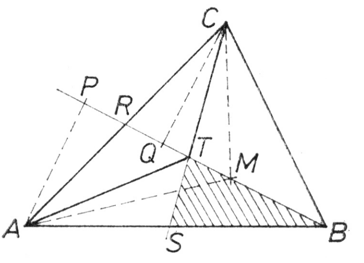
Obsah rovnoběžníku $JLNP$ je tedy $\dfrac{a^2b}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})}$. Proto se hledaný obsah osmiúhelníku $JKLMNOPQ$ rovná hodnotě

$$2\frac{ab}{2} - \frac{a^2b}{2(a + \sqrt{a^2 - b^2})} = \frac{a(2b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2})}{2b}.$$

93. Podle Thaletovy věty je úhel CYB pravý právě tehdy, když bod Y leží na kružnici nad průměrem BC. Protože bod X má ležet na přímce AY a $CX \parallel BY$, je X bod, který je obrazem bodu Y ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $|AC| : |AB|$. Proto musí bod X ležet na kružnici, která je obrazem kružnice nad průměrem BC v popsané stejnolehlosti. Obráceně lze ukázat, že každý bod X této kružnice, s výjimkou bodů na přímce AB, je obrazem některého bodu Y. Stačí jen ještě určit její poloměr r. Ten se rovná poloměru $\frac{1}{2}|BC|$ kružnice nad průměrem BC, vynásobenému koeficientem stejnolehlosti, tedy

$$r = \frac{1}{2} \frac{|BC| . |AC|}{|AB|} = \frac{|AC| . |BC|}{2(|AC| + |BC|)}.$$

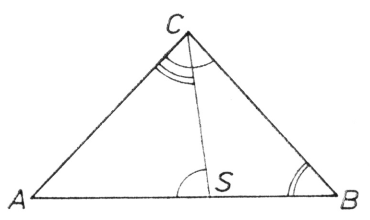
94. Předpokládejme nejdříve, že pro některý bod M trojúhelníku ABC se sobě rovnají obsahy trojúhelníků ABM a BCM. Tyto dva trojúhelníky mají společnou stranu BM, a protože mají stejný obsah, musí mít stejně velké výšky k společné straně BM. Označme P, Q paty kolmic, vedených body A, C na přímku BM a R průsečík přímek BM a AC (obr. 44). Trojúhelníky CQR a APR jsou shodné podle věty *usu*, takže R je středem úsečky AC. Tím jsme dokázali, že z rovnosti obsahů trojúhelníků ABM, BCM (M je bod trojúhelníku ABC) plyne, že bod M leží na těžnici BR trojúhelníku ABC. Stejně tak se dokáže, že $P(ABM) \leqq \leqq P(BCM)$ právě tehdy, když bod M trojúhelníku ABC leží



Obr. 44

v polorovině *BRA* (*R* je střed úsečky *AC*). Podobně dokážeme, že pro bod *M* trojúhelníku *ABC* platí $P(BCM) \leqq P(CAM)$, jestliže leží bod *M* v polorovině *CSB*, kde *S* je střed strany *AB*. Mají-li platit obě nerovnosti úlohy, je nutné a stačí, aby bod *M* z vnitřku trojúhelníku ležel též v průniku obou výše uvedených polorovin, tedy v trojúhelníku *BTS*, kde *T* je těžiště trojúhelníku *ABC*.

95. Splňuje-li bod *C* podmínku úlohy, jsou trojúhelníky *ASC*, *ACB* podobné, protože se shodují ve dvou úhlech (obr. 45). Pak je

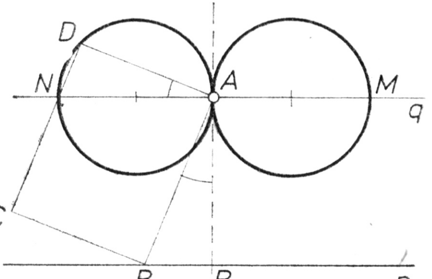


Obr. 45

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|}, \text{ tedy } |AC|^2 = |AS| . |AB|.$$

To znamená, že bod C leží na kružnici k se středem A a o poloměru $\sqrt{|AS| . |AB|}$. Nechť leží obráceně nějaký bod na kružnici k, avšak mimo přímku AB (abychom mohli vůbec mluvit o trojúhelníku ABC). Pak jsou trojúhelníky ASC, ACB podobné, protože se shodují v úhlu při vrcholu A a platí $|AC| : |AB| = |AS| : |AC|$. Z podobnosti těchto dvou trojúhelníků pak ovšem plyne $|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle ACB|$. Hledanou množinou je tudíž kružnice k s výjimkou jejích průsečíků s přímkou AB.

96. Označíme P patu kolmice vedené bodem A k přímce p (obr. 46). Veďme bodem A přímku q rovnoběžnou s přímkou p. Na přímce q leží dva body, které splňují podmínky úlohy. Jsou to body ve vzdálenosti $\frac{c}{a}$ od bodu A, označme je M, N.



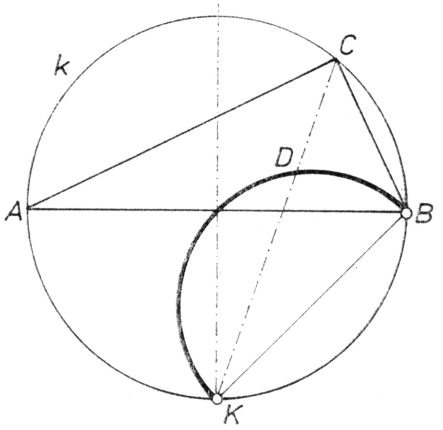
Obr. 46

Nechť nějaký další pravoúhelník $ABCD$ splňuje podmínky úlohy. Bod D nemůže ležet na přímce AP, protože by bod B musel zároveň ležet na různých rovnoběžných přímkách p, q. Nechť bod D leží např. v polorovině APN. Pak je $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle NAD|$ a $|AB| . |AD| = |AP| . |AN|$, tedy

$$\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AN|}{|AD|} .$$

To znamená, že jsou trojúhelníky ABP, AND podobné, takže úhel ADN je pravý. Proto leží bod D na některé z kružnic nad průměrem AN nebo AM. Obdobně se dokáže obráceně, že každý bod D ze sjednocení těchto dvou kružnic, různý od bodu A, je možno doplnit na pravoúhelník $ABCD$ požadovaných vlastností.

97. Označme k kružnici nad průměrem AB a K ten průsečík osy úsečky AB s kružnicí k, který leží v opačné polorovině, než ve které leží uvažované trojúhelníky. Mezi ně patří obráceně trojúhelník ABC právě tehdy, když bod C leží na té polokružnici nad průměrem AB, která neobsahuje bod K (obr. 47). Samozřejmě musí být bod C různý od bodů A, B. Pak osa úhlu ACB prochází bodem K, protože úhly ACK, KCB jsou obvodové úhly nad shodnými tětivami AK, BK kružnice k, přičemž bod C leží vždy na větším oblouku kružnice. Protože osa úhlu ACB prochází bodem K, leží pata D kolmice vedené bodem B na tuto osu na polokružnici nad průměrem BK. Je-li obráceně D libovolný bod této polokružnice různý od K a B, najdeme průsečík C přímky KD s kružnicí k, $C \neq K$. Podle Thaletovy věty je pak

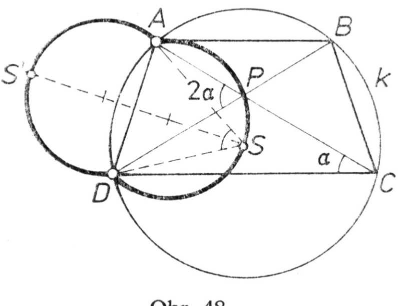


Obr. 47

$BD \perp KD$, tedy $BD \perp KC$ a KC je osa úhlu ACB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Množinou všech bodů D je tudíž ta polokružnice nad průměrem KB (bez bodů K, B), která obsahuje střed úsečky AB.

98. Tato úloha je velmi podobná úloze 71. Body C vyplňují totiž kružnici o středu A a poloměru b bez jejích průsečíků s přímkou AB. Rozdíl oproti úloze 71 spočívá v tom, že úsečka AB není v tomto případě tětivou zmíněné kružnice. To však na řešení úlohy nic nemění. Množinou všech hledaných těžišť je kružnice se středem ve středu úsečky AB a s poloměrem $\frac{b}{3}$, ze které musíme vyloučit její průsečíky s přímkou AB.

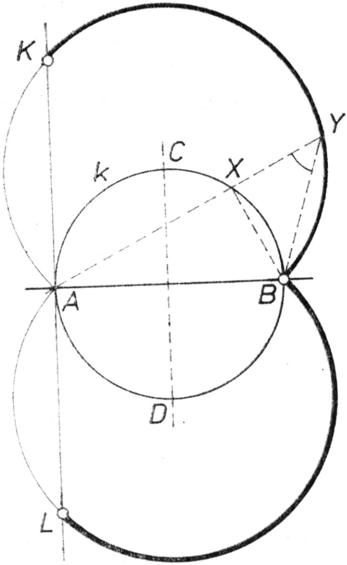
99. Nechť je $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník s poloměrem r kružnice opsané. Víme tedy, že body B, C musí ležet na kružnici o poloměru r, která prochází body A, D. Je-li $2r < |AD|$, pak taková kružnice a tedy ani lichoběžník neexistuje, hledaná množina je prázdná. V případě $2r = |AD|$ existuje právě jedna kružnice o poloměru r, která prochází body A, D. Je to kružnice nad průměrem AD. Neexistuje však rovnoramenný lichoběžník požadovaných vlastností, protože BC by musel být také průměrem kružnice jemu opsané. Hledaná množina je opět prázdná. Předpokládejme, že $2r > |AD|$. Pak existují dvě kružnice o poloměru r, které procházejí body A, D. Nechť je $k = (S, r)$ jedna z nich (obr. 48). Je-li $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník vepsaný



Obr. 48

kružnici k, leží body B, C na větším oblouku kružnice k s krajními body A, D. Označme P průsečík jeho úhlopříček a $\alpha = |\sphericalangle ACD|$. Trojúhelník CPD je rovnoramenný, proto $|\sphericalangle APD| = 2\alpha$ a téže velikosti je podle věty o obvodovém a středovém úhlu i úhel ASD. Leží tedy bod P na oblouku kružnice, který obsahuje bod S a jehož krajními body jsou body A, D. Kdybychom zvolili druhou kružnici o poloměru r, procházející body A, D, dostali bychom oblouk souměrně sdružený podle přímky AD. Můžeme se obráceně snažit ke každému bodu P ze sjednocení těchto dvou podle přímky AD souměrně sdružených kruhových oblouků sestrojit lichoběžník $ABCD$ požadovaných vlastností. To se nám podaří, nesmíme však za bod P zvolit bod A nebo D a také ne bod S nebo bod S' souměrně sdružený k bodu S podle přímky AD. V posledních dvou případech bychom totiž nedostali lichoběžník, nýbrž pravoúhelník. Hledaná množina bodů se tedy skládá ze čtyř kruhových oblouků bez jejich krajních bodů.

100. Úloha se dá lehce vyřešit pomocí věty o obvodovém a středovém úhlu. Je-li totiž Y bod, který dostaneme pomocí bodu X kružnice k způsobem popsaným v zadání úlohy, je trojúhelník BXY rovnoramenný a pravoúhlý, $|\sphericalangle XYB| = |\sphericalangle AYB| = 45°$ (obr. 49). Označme C, D ty body kružnice k, které tvoří průměr kolmý k průměru AB. Leží-li bod X v polorovině ABC, leží bod Y na kruhovém oblouku v polorovině ABC, který je průnikem této poloroviny a kružnice se středem C. Kdybychom uvažovali polorovinu opačnou, dostali bychom oblouk souměrně sdružený podle přímky AB. Označme ještě K, L průsečíky těchto dvou oblouků s tečnou kružnice k v bodě A, které jsou různé od bodu A. Chceme-li totiž obráceně k bodu Y z některého z těchto dvou oblouků ($Y \neq A$, $Y \neq B$) sestrojit bod X, zjistíme, že se nám to podaří pouze pro ty body Y, které leží v polorovině KLB a jsou různé od bodů K, L. Hledanou množinou je množina

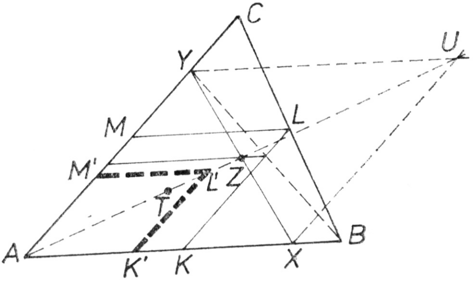


Obr. 49

bodů kruhových oblouků KB, LB (bez bodů K, L, B), které jsou na obrázku vyznačeny silně.

101. Zvolme libovolný trojúhelník AXY podle zadání úlohy. Označme Z střed úsečky XY a T těžiště trojúhelníku AXY. Body T, Z leží na téže polopřímce s hraničním bodem A a je $|AT| = \frac{2}{3}|AZ|$. Budeme se proto nejdříve zabývat otázkou, co vytvoří středy Z úseček XY, jestliže bod X probíhá vnitřek úsečky AB, bod Y vnitřek úsečky AC.

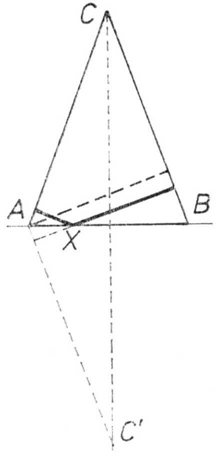
Jestliže zvolíme nejdříve bod Y pevně, probíhá bod Z střední příčku trojúhelníku ABY bez krajních bodů (obr. 50). Necháme-li teď bod Y probíhat vnitřek úsečky AC, vytvoří tyto střední příčky rovnoběžník $AKLM$, kde K, L, M jsou středy stran AB, BC, AC, bez jeho hraničních bodů. Bod T probíhá vnitřek rovnoběžníku $AK'L'M'$, který odpovídá rov-



Obr. 50

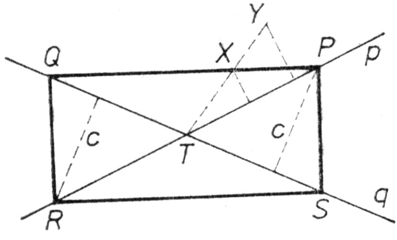
noběžníku $AKLM$ ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$. Obráceně, zvolíme-li bod T ve vnitřku rovnoběžníku $AK'L'M'$, sestrojíme na polopřímce AT bod Z tak, aby $|AZ| = \frac{3}{2}|AT|$. K bodu Z pak sestrojíme body X, Y na úsečkách AB, AC tak, aby Z byl středem úsečky XY. K tomu stačí na polopřímce AZ zvolit bod U tak, aby Z byl středem úsečky AU. Rovnoběžky, vedené bodem U s přímkami AC, AB, je protínají v hledaných bodech X, Y. Hledanou množinou je tedy vnitřek rovnoběžníku $AK'L'M'$.

102. Při řešení úlohy využijeme této vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku: nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Pak součet vzdáleností každého bodu X základny AB od ramen trojúhelníku se rovná výšce trojúhelníku na jeho rameno. Důkaz lehce vyčtete z obr. 51, v němž



Obr. 51

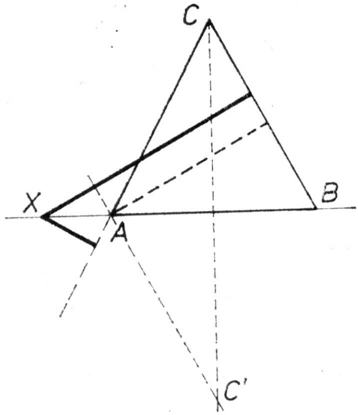
je C' bod souměrně sdružený k bodu C podle přímky AB, takže $AC' \parallel BC$. Zvolme teď na přímce p body P, R tak, aby měly od přímky q vzdálenost c, podobně zvolíme na přímce q body Q, S tak, aby měly vzdálenost c od přímky p (obr. 52). Průsečík přímek p, q označíme T. Do hledané množiny patří podle konstrukce body P, Q, R, S. Podle předcházejícího



Obr. 52

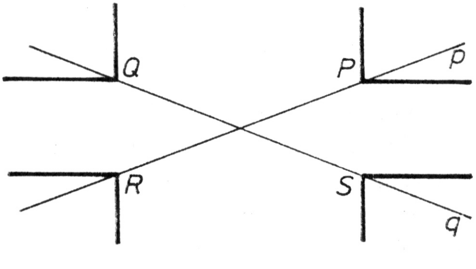
mají dokonce všechny body úsečky PS od přímek p, q součet vzdáleností rovný číslu c, stačí si všimnout rovnoramenného trojúhelníku PST. Totéž platí pak o bodech úseček PQ, QR a RS. Patří tedy do hledané množiny všechny body hranice pravoúhelníku $PQRS$. Bod T do hledané množiny zřejmě nepatří. Nepatří do ní ani žádný další bod, který neleží na hranici pravoúhelníku $PQRS$. Je-li Y takový bod, pak leží na polopřímce TY právě jeden bod X z hranice pravoúhelníku $PQRS$. Ten do hledané množiny patří, jak jsme dokázali. Poměr vzdáleností bodu Y od přímky p a bodu X od přímky p je $|TY| : |TX| \neq 1$, totéž platí pro vzdálenosti bodů Y, X od přímky q. Proto je součet vzdáleností bodu Y od přímek p, q rovný číslu $c \dfrac{|TY|}{|TX|}$ a tedy různý od c. Hledaná množina se skládá tudíž pouze z hranice pravoúhelníku $PQRS$.

103. Je-li ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou AB, pak se absolutní hodnota rozdílu vzdáleností každého bodu X přímky AB, nepatřícího do vnitřku úsečky AB, rovná velikosti výšky trojúhelníku ABC na jeho rameno. To se dokáže



Obr. 53

snadno, stačí si rozmyslet situaci znázorněnou na obr. 53. Sestrojíme-li podle předcházející úlohy body *P*, *Q*, *R*, *S*, pak se dá stejným postupem za pomoci výše uvedené vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku dokázat, že hledaná množina



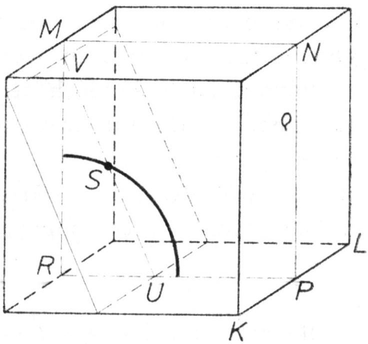
Obr. 54

se skládá ze všech bodů přímek PQ, QR, RS a SP, které neleží uvnitř úseček PQ, QR, RS a SP (obr. 54).

104. Leží-li celý čtverec v jedné stěně krychle, leží v ní i jeho střed. Ten je pak nutně vnitřním bodem stěny, neleží na žádné hraně krychle. Obráceně je každý vnitřní bod každé stěny krychle středem nějakého čtverce ležícího v té stěně. V dalším vyloučíme tento výjimečný případ. Nechť tedy čtverec $ABCD$ neleží v žádné stěně krychle, ale každá jeho strana leží v některé stěně krychle. Pak všechny jeho vrcholy leží na hranách krychle. Kdyby byl např. bod A vnitřním bodem některé stěny, musely by v ní ležet strany AB i AD čtverce, a tudíž celý čtverec. Předpokládejme, že strana AB čtverce není rovnoběžná s žádnou hranou krychle. Pak strana BC musí ležet ve stěně sousední k stěně, v níž leží strana AB, a protože jsou strany AB, BC kolmé, musí být strana BC kolmá k té stěně krychle, ve které leží strana AB. To ale znamená, že je strana BC rovnoběžná s některou hranou krychle, a sice s tou, která je kolmá k stěně krychle, v níž leží strana AB. Tím jsme dokázali, že některá strana čtverce je vždy rovnoběžná s některou hranou krychle.

Je-li rovina čtverce $ABCD$ rovnoběžná s některou stěnou krychle, leží střed čtverce na spojnici středů těch stěn krychle, se kterými je rovina čtverce rovnoběžná. Obráceně je každý bod úsečky spojující středy protilehlých rovnoběžných stěn krychle středem čtverce, jehož strany leží na stěnách krychle. Stačí vzít řez krychle rovinou kolmou k spojnici středů protilehlých stěn, která prochází zvoleným bodem spojnice.

Není-li rovina čtverce $ABCD$ rovnoběžná s žádnou stěnou krychle, musí být podle předcházejícího rovnoběžná aspoň s některou hranou KL krychle. Střed S čtverce pak leží v rovině ϱ souměrnosti hrany KL (obr. 55). Rovina ϱ protne krychli ve čtverci $MNPR$. Označme ještě U, V průsečíky čtverce $MNPR$ s hranicí čtverce $ABCD$. Můžeme předpo-



Obr. 55

kládat, že jsme označení vrcholů čtverce $MNPR$ zvolili tak, že je trojúhelník URV pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu R. Je pak $|SU| = |SV| = \frac{1}{2}a$, kde a je délka hrany krychle a zároveň délka strany čtverce $ABCD$. Protože je trojúhelník URV pravoúhlý a bod S je středem jeho přepony, je také $|RS| = \frac{1}{2}a$. Bod S leží tedy nutně na té čtvrtkružnici v rovině ϱ o středu R a poloměru $\frac{a}{2}$, která je částí krychle. Obráceně lze ke každému bodu S této čtvrtkružnice sestrojit body U, V tak, aby ležely v rovině ϱ a současně na stěnách krychle a aby bod S byl středem úsečky UV. Pak je $|SU| = |SV| = \frac{a}{2}$. K bodům U, V se potom snadno sestrojí čtverec $ABCD$, jehož strany leží na stěnách krychle a jehož středem je bod S.

Množina středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží na stěnách krychle, je tudíž sjednocením těchto tří množin:

a) množiny všech vnitřních bodů všech stěn krychle,

b) množiny všech bodů na třech úsečkách spojujících středy protilehlých stěn krychle,

c) množiny všech bodů dvanácti čvrtkružnic se středy v středech hran dané krychle, jejichž popis je uveden výše.

105. Označme délky hran krychlí a, b, c. Podle předpokladu je povrch třetí krychle roven součtu povrchů zbývajících dvou, tedy $6c^2 = 6a^2 + 6b^2$. To znamená, že $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Máme dokázat, že

$$a^3 + b^3 < c^3 \leqq \sqrt{2}\,(a^3 + b^3).$$

Tyto dvě nerovnosti jsou ekvivalentní s nerovnostmi

$$(a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3 \leqq 2\,(a^3 + b^3)^2.$$

První nerovnost upravíme na ekvivalentní nerovnost $2a^3b^3 < 3a^4b^2 + 3a^2b^4$, po vydělení kladným číslem a^2b^2 dostaneme ekvivalentní nerovnost $2ab < 3\,(a^2 + b^2)$, tedy $0 < (a - b)^2 + 2\,(a^2 + b^2)$. Tato nerovnost zřejmě platí a proto platí i výchozí nerovnost. Podobně se upraví druhá nerovnost na ekvivalentní nerovnost

$$0 \leqq a^6 - 3a^4b^2 + 4a^3b^3 - 3a^2b^4 + b^6.$$

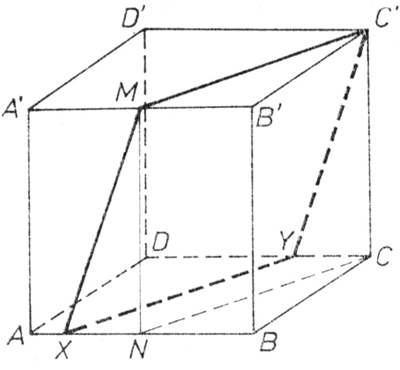
Výraz na pravé straně se rovná výrazu

$$(a - b)^2 \, (a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)$$

a pro kladná čísla a, b je zřejmě nezáporný. Nule se rovná pouze pro $a = b$.

Vidíme, že se jednalo sice o úlohu formulovanou geometricky, převedla se však na úlohu algebraickou. Mnozí asi namítnete, že je uvedené řešení vykonstruované, že není možné uhodnout uvedený rozklad výrazu na pravé straně dokazované nerovnosti. To však není tak těžké. Je totiž vidět, že znaménko rovnosti platí v případě $a = b$, kdy jsou obě menší krychle stejně velké. To znamená, že uvažovaný výraz je dělitelný výrazem $a - b$. Vzhledem k symetričnosti výrazu v a, b lze soudit, že je možné dokonce vytknout $(a - b)^2$.

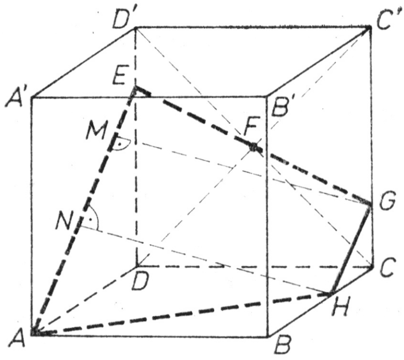
106. Jednou z rovin, která obsahuje přímku MC', je rovina MCC', procházející též středem N úsečky BA (obr. 56). Tato rovina odděluje od krychle trojboký hranol $NBCMB'C'$, jehož objem je $\frac{1}{4}$, protože obsah trojúhelníku NBC je $\frac{1}{4}$. Hledaná rovina má oddělit těleso většího objemu. Předpokládejme, že prochází bodem X na úsečce AN, jeho vzdálenost od bodu B označíme x. Oddělené těleso se skládá z výše uvedeného trojbokého hranolu a z dalšího trojbokého hranolu



Obr. 56

$MXNC'YC$ (Y leží na CD a je $XY \parallel MC'$). Obsah trojúhelníku MXN je $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, výška hranolu se rovná vzdálenosti rovin MXN, $C'YC$, tedy jedné. Obsah celého odděleného tělesa je $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ a má se rovnat $\frac{1}{3}$, což vede k výsledku $x = \frac{2}{3}$. Zvolíme-li na polopřímce BA bod X tak, aby $|BX| = \frac{2}{3}$, leží bod X ještě na úsečce AN a rovina XMC' dělí krychli na dvě části, z nichž ta, která obsahuje bod B, má objem $\frac{1}{3}$.

107. Máme určit obsah lichoběžníku $AEGH$ (obr. 57), HG a AE jsou průsečnice roviny AEF s rovnoběžnými stě-

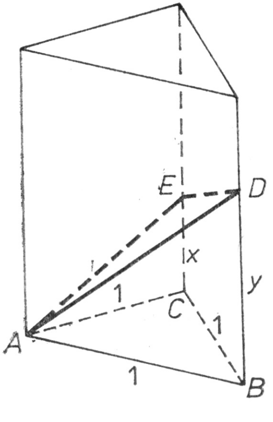


Obr. 57

nami krychle, a tudíž rovnoběžné. Proto jsou trojúhelníky ADE, HCG podobné, přičemž $|GC| = |ED'| = \frac{3}{4}$. Z podobnosti těchto trojúhelníků pak plyne $|HC| = 1$. Pomocí Pythagorovy věty můžeme již vypočíst všechny strany lichoběžníku. Dostaneme $|AH|^2 = 3^2 + 2^2$, $|EG|^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$, $|EA| = \frac{15}{4}$, $|HG| = \frac{5}{4}$. Veďme body G, H výšky lichoběžníku. Ty protínají základnu AE ve vnitřních bodech M, N, protože jsou úhly AEG, HAE ostré. Označme $|EM| = x$, $|AN| = y$ a výšku lichoběžníku v. Je $x + y + |MN| = x + y + |HG| = |AE|$, tj. $x + y = \frac{5}{2}$. Dále je $x^2 + v^2 = |EG|^2$, $y^2 + v^2 = |AH|^2$. Odečteme-li poslední rovnice, můžeme vypočíst x, y, protože známe jejich součet. Dostaneme $x = \frac{9}{10}$, $y = \frac{8}{5}$ a pro výšku lichoběžníku pak $v = \frac{3}{5}\sqrt{29}$. Aritmetický průměr obou základen lichoběžníku je $\frac{5}{2}$, takže obsah lichoběžníku vychází $\frac{3}{2}\sqrt{29}$.

108. Vrcholy trojúhelníku, který je řezem, označíme A, D, E (obr. 58). Velikosti úseček BD a CE označíme y, x. Podle Pythagorovy věty platí

$$|AE|^2 = 1 + x^2, \quad |AD|^2 = 1 + y^2, \quad |DE|^2 = 1 + (x - y)^2.$$



Obr. 58

Úhel DAE nemůže být pravý. V opačném případě by opět podle Pythagorovy věty platilo $|AE|^2 + |AD|^2 = |DE|^2$, odkud by plynulo $2xy = -1$, což není možné, protože x, y jsou nezáporná čísla. V trojúhelníku AED je tedy pravý úhel AED nebo ADE. Předpokládejme, že úhel AED je pravý, v opačném případě bychom jen zaměnili označení vrcholů hranolu. Podle předpokladu je trojúhelník AED též rovnoramenný, tedy $|AE| = |DE|$. Je tudíž $1 + x^2 = 1 + (x - y)^2$, odkud plyne $y(y - 2x) = 0$. Trojúhelník AED je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu E, musí proto ještě platit $2xy = 1 + 2x^2$. Proto nemůže být $y = 0$, musí tedy platit $y = 2x$ a zároveň $2x^2 = 1$. Obsah trojúhelníku AED je $\frac{1}{2}|AE|\,|DE| = \frac{1}{2}|AE|^2 = \frac{1}{2}(1 + x^2) = \frac{3}{4}$.

109. Úloha se nejlépe řeší pomocí souřadnic. Počátek soustavy souřadnic zvolíme ve středu S krychle, osy soustavy souřadnic rovnoběžné s hranami krychle. Omezíme se zatím na tu část krychle a vepsané koule, které leží v průniku poloprostorů $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, tedy na jednu osminu krychle. Nechť jsou $[x, y, z]$ souřadnice toho bodu jednotkové krychle, který leží nejblíže k bodu S. Další body téže jednotkové krychle dostaneme ze souřadnic x, y, z tak, že jednu, dvě nebo všechny tři zvětšíme o 1. Největší vzdálenost od bodu S bude z nich mít bod $[x + 1, y + 1, z + 1]$. Celá jednotková krychle bude ležet v uvažované kouli právě tehdy, bude-li v ní ležet její od středu S nejvzdálenější vrchol, tedy právě tehdy, bude-li platit

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 \leqq 9.$$

Protože x, y, z probíhají nezávisle na sobě čísla 0, 1, 2, má poslední nerovnost celkem 7 řešení. Jedno je $x = y = z = 0$, tři řešení dostaneme tak, že jednu ze souřadnic zvolíme jednotkovou, zbývající dvě nulové a další tři řešení mají jednu souřadnici nulovou a dvě souřadnice rovny 1. V celé krychli je tudíž $8 \,.\, 7 = 56$ jednotkových krychlí, které leží celé v uvažované kouli. Uvažovaná jednotková krychle nemá s koulí žádný společný vnitřní bod, jestliže leží v kouli nejvýše její bod $[x, y, z]$, který je ke středu koule nejblíž. To nastává právě tehdy, když platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 9.$$

Vzhledem k tomu, že x, y, z jsou celá nezáporná čísla nejvýše rovna 2, má tato nerovnost pouze 4 řešení: $[2, 2, 2]$, $[2, 2, 1]$, $[2, 1, 2]$, $[1, 2, 2]$, celkem však existuje $8 \,.\, 4 = 32$ jednotkových krychlí, které neobsahují žádný vnitřní bod koule.

110. Pro každý bod X prostoru platí podle trojúhelníkové nerovnosti

$$|AX| + |BX| \geqq |AB|, \qquad |AX| + |CX| \geqq |AC|,$$

$$|AX| + |DX| \geqq |AD|, \qquad |BX| + |CX| \geqq |BC|,$$

$$|BX| + |DX| \geqq |BD|, \qquad |CX| + |DX| \geqq |CD|.$$

Sečtením všech těchto šesti nerovností dostaneme dokazovanou nerovnost. Ve výsledné nerovnosti platí znaménko rovnosti jen tehdy, platilo-li znaménko rovnosti ve všech šesti výchozích nerovnostech. To však nastane jen tehdy, když bod X leží na všech úsečkách AB, AC, AD, BD, BC, CD. To by ovšem musely body A, B, C, D splynout a rovnost by platila jen pro $X = A$, pro všechny ostatní body by stejně platila ostrá nerovnost.