# [dokumenty-04] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie C

## Úlohy

In: Leo Boček (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-04] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie C. Sbírka řešených úloh z 16. až 30. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 7–28.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405273

# ÚLOHY

## Kombinatorika

**1.** Pro kolik uspořádaných trojic přirozených čísel $x, y, z$ platí

$$xyz = 1\,000\,000?$$

**2.** Kolika způsoby je možno rozložit číslo 78 na součet tří přirozených čísel? Přitom dva rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců považujeme za stejné.

**3.** Sečtěte všechna šesticiferná čísla, z nichž každé obsahuje všechny číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**4.** Z číslic 0, 1 je sestaveno číslo

$$101001000100001\ldots,$$

které má 1 000 000 číslic. Kolik obsahuje jedniček a na kolikátém místě stojí poslední z nich?

**5.** Uvažujme všechny výrazy, které dostaneme z výrazu

$$u - v - x - y - z$$

doplněním alespoň jedné dvojice závorek tak, aby se tím ve výrazu neobjevilo násobení.*)

---

*) Jeden z uvažovaných výrazů je např. $u - ((v - x) - y - z)$. Avšak např. výraz $(u - v)\ (-x - y - z)$ mezi uvažované výrazy nepatří, neboť obsahuje násobení.

Kolika různých hodnot mohou nejvýše tyto výrazy nabývat pro jednu pětici čísel $u, v, x, y, z$?

6. Určete, kolik různých součtů můžeme dostat z výrazu

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1}_{1980 \text{ jedniček}}$$

doplněním alespoň jednoho páru závorek tak, aby vznikl správně uzávorkovaný výraz a nedostali jsme přitom zápis součinu.

7. Žáci jedné školy se účastnili biologické, fyzikální a matematické olympiády. Účastníků FO bylo dvakrát víc než účastníků MO a těch třikrát víc než účastníků BO. Jen jedné z olympiád se zúčastnilo 12 žáků a alespoň dvou olympiád 4 žáci. Určete, kolik žáků soutěžilo v jednotlivých olympiádách.

8. Cestovní kancelář pořádá čtyři typy rekreací. Hlásí se na ně 195, 203, 106 a 329 osob. Na právě dvě rekreace se hlásí 267 lidí, na právě tři nikdo a na všechny čtyři rekreace 2 lidé. Kolik lidí se přihlásilo na právě jednu rekreaci?

9. Konečné množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4$ mají $m_1, m_2, m_3, m_4, s$ prvků; přitom platí

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_4 = \emptyset.$$

Dokažte, že platí

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \leq 2s.$$

Může-li nastat rovnost, tedy v kterém případě?

**10**. Tři konečné množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ mají $m_1$, $m_2$, $m_3$ prvků; množina $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$ má $s$ prvků. Dokažte:

a) Je-li

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqq 2s + 1,$$

má průnik všech tří množin alespoň jeden prvek.

b) Má-li průnik všech tří množin alespoň jeden prvek, je

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqq s + 2.$$

Dokažte dále, že nerovnost v b) není postačující pro to, aby tři uvažované množiny měly neprázdný průnik.

**11**. Ze 100 osob koupilo na předvánočním trhu 80 lidí textil, 70 lidí knihy a 55 lidí gramofonové desky. Kolik osob nejméně koupilo výrobky všech tří druhů? Jestliže každá z uvedeného sta osob si koupila aspoň jeden z uvedených výrobků, kolik osob nejvýše koupilo výrobky všech tří druhů?

## Kalendář

Od r. 1582, kdy byl zaveden gregoriánský kalendář, je přestupný každý rok, jehož letopočet je dělitelný čtyřmi. Výjimku tvoří roky, jejichž letopočet je dělitelný stem a není dělitelný čtyřmi sty - ty přestupné nejsou.

**12**. Rok 1905 začal i skončil nedělí. Které další roky 20. století mají ještě tuto vlastnost?

**13**. Zjistěte, kolikrát připadá v letech 1601—2000 Nový rok na jednotlivé dny v týdnu.

**14.** Na který den v týdnu připadl od reformy kalendáře r. 1582 až do úterý 29. 2. 1972 nejméně často 29. únor?

## Pohyb

Nebude-li určeno jinak, předpokládáme, že v úlohách tohoto odstavce jde o rovnoměrný pohyb.

**15.** Auto jelo z A do B. Po hodině jízdy snížilo rychlost na $\frac{3}{5}$ původní rychlosti. Jeho příjezd do B se tak opozdil o 2 hodiny. Kdyby ke stejnému snížení rychlosti došlo o 50 km blíž k B, opozdilo by se jen o 80 minut. Vypočtěte vzdálenost z A do B a původní rychlost auta.

**16.** V 8 hodin ráno vyjel cyklista z A do 50 km vzdáleného B. Když ujel 10 km, předjelo ho auto, které vyjelo z A v 8 hodin 25 minut. Automobilista dojel do B, tam se zdržel 1 hodinu 15 minut, a potom se opět vracel do A. Zpáteční cesta mu trvala o třetinu kratší dobu než cesta tam. Cyklistu potkal 5 km před B. V kolik hodin se automobilista vrátil do A?

**17.** Podél železniční trati jdou za sebou dva chodci. Stejným směrem jede vlak a druhého chodce dostihne o $t$ sekund později než prvního. Přitom prvního chodce vlak mine za $t_1$ sekund a druhého za $t_2$ sekund. Kdy dohoní druhý chodec prvního?

**18.** Osobní vlak jel rychlostí $v_1$ m/s a po souběžné koleji ho předjížděl rychlík rychlostí $v_2$ m/s. Cestující v osobním vlaku naměřil $t_1$ sekund, než rychlík přejel. Pozorovatel u trati naměřil $t_2$ sekund, než přejel osobní vlak. Od okamžiku, kdy lokomotiva rychlíku dostihla poslední vagón osobního vlaku, do okamžiku, kdy poslední vůz rychlíku minul lokomotivu osobního vlaku, uplynulo $t_3$ sekund. Vyjádřete poměr rychlostí $v_1 : v_2$ pomocí $t_1$, $t_2$, $t_3$.

## Rovnice a nerovnice

**19.** Určete všechny trojice reálných čísel $x$, $y$, $z$, které vyhovují soustavě rovnic

$$x + 2y = 4,$$

$$2xy - 3z^2 = 4.$$

**20.** V oboru reálných čísel najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$x(x + y) + z(x - y) = 6,$$

$$y(y + z) + x(y - z) = -2,$$

$$z(z + x) + y(z - x) = 3.$$

**21.** Najděte všechna řešení soustavy nerovnic

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leqq 2,$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} \leqq 2,$$

$$\dots$$

$$x_{1975} + \frac{1}{x_{1976}} \leqq 2,$$

$$x_{1976} + \frac{1}{x_1} \leqq 2$$

v oboru kladných reálných čísel.

**22.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y$

$$ax + y = 1,$$

$$|x| + y = a,$$

kde $a$ je reálný parametr.

**23.** V oboru reálných čísel řešte soustavu tří rovnic s dvěma neznámými $x, y$ a s reálným parametrem $a$

$$x + y = a + 2,$$

$$3x - 2y = 1,$$

$$ax + (1 - a^2)y = \frac{2}{5}a^2 + 1.$$

**24.** Je dána soustava rovnic s neznámými $x, y, z$

$$x + ay = b,$$

$$y - a^2z = 1,$$

$$az + x = b + 1.$$

Určete všechny hodnoty reálných parametrů $a, b$, pro něž má soustava nekonečně mnoho řešení v oboru reálných čísel.

## Nerovnost

**25.** Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a, b, c$ platí

$$\frac{b(2a - c)}{a} + \frac{c(2b - a)}{b} + \frac{a(2c - b)}{c} \leqq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}.$$

Kdy platí rovnost?

## Vlastnosti celých čísel

**26.** Ke každému přirozenému číslu $n$ existují přirozená čísla $r \neq s$ tak, že číslo $3^r - 3^s$ je dělitelné číslem $n$. Dokažte.

**27.** Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou z nich je dělitelný pěti.

**28.** Zvolíme-li libovolně 7 navzájem různých prvočísel, součin všech jejich kladných rozdílů dělitelný číslem 163 8‹ Dokažte.

**29.** Jsou-li $a$, $b$, $c$ taková přirozená čísla, že $a^3 + b^3 +$ je dělitelné sedmi, je aspoň jedno z nich dělitelné sedn Dokažte.

**30.** Určete poslední dvě číslice čísla

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + 1000^4.$$

## Rovnice a nerovnice v oboru celých čísel

**31.** Najděte všechna celá čísla $x$, pro která platí

$$3\,|x - 1| - 2x = 2\,|3x + 1|\,.$$

**32.** Najděte všechny dvojice přirozených čísel $x$, $y$, pı které platí

$$|x - 2| + |y - 3| = 3 - y.$$

**33.** Je dáno celé číslo $p$. Najděte všechny dvojice celýc čísel $x$, $y$, pro které platí

$$x + y = p^2,$$

$$10x + y = p^3.$$

**34**. Najděte všechny dvojice celých čísel $x$, $y$, pro které platí

$$x - |y^2 - 3y| + \frac{1}{3} > 0,$$

$$x + \left| y - \frac{3}{2} \right| < 2.$$

**35**. Najděte všechny trojice prvočísel $a$, $b$, $c$, pro které platí

$$abc < ab + bc + ac.$$

**36**. Je dáno prvočíslo $p$. Určete všechny čtveřice přirozených čísel $a$, $b$, $c$, $d$, pro které platí

$$ac - bd = p,$$

$$ad - bc = 0.$$

## Hledání celých čísel s danými vlastnostmi

**37**. Určete nejmenší přirozené číslo, které má právě 15 kladných dělitelů.

**38**. Najděte všechny takové trojice po sobě následujících lichých čísel, že součet jejich druhých mocnin je menší než $10^7$ a všechny jeho číslice jsou stejné.

**39.** Najděte všechna přirozená čísla, jejichž třetí mocnina končí na 1981.

**40.** Při oslavě svých narozenin Josef zjistil, že sečte-li číslice momentálního letopočtu, dostane svůj věk, a odečte-li momentální letopočet od jeho zrcadlového obrazu, dostane čtyřnásobek svého roku narození. V kterém roce našeho tisíciletí Josef provedl výpočet?

**41.** Stejně velké utěrky čtvercového tvaru pokrývají obdélník *ABCD* a přitom se nepřekrývají. Visí-li všechny utěrky na šňůře těsně vedle sebe, zabírají ji v délce obvodu trojúhelníku *ABC*. Kolik je utěrek?

**42.** Určete všechny pravoúhlé trojúhelníky, které mají tyto dvě vlastnosti:

(a) délky stran v cm jsou celá čísla,

(b) obvod v cm je roven obsahu v $cm^2$.

## Kombinatorická geometrie

**43.** Na kružnici je dáno 6 bodů a každé dva jsou spojeny úsečkou, buď modrou nebo červenou. Tyto úsečky přitom tvoří právě jeden červený a právě jeden modrý trojúhelník. Dokažte, že červených úseček je buď 7 nebo 8.

**44.** Každá strana a každá úhlopříčka konvexního pětiúhelníku je obarvena jednou ze dvou barev tak, že žádný trojúhelník (tvořený stranami nebo celými úhlopříčkami pětiúhelníku) není jednobarevný. Dokažte, že z každého vrcholu pětiúhelníku vycházejí právě dvě úsečky každé barvy.

**45.** Je dán konvexní devítiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$.

Kolika způsoby můžeme obarvit jeho vrcholy tak, aby byly 4 modré, 5 červených a aby právě 13 jeho úhlopříček spojovalo vrcholy stejné barvy?

**46.** V rovině je dána čtvercová síť. Zvolíme-li libovolně pět jejích uzlů, leží střed úsečky omezené jistými dvěma ze zvolených uzlů v uzlu sítě. Dokažte.

**47.** Určete největší možný počet figurek, které se dají umístit na šachovnici tvaru $n \times n$ tak, aby žádné dvě nestály na sousedních polích. Za sousední považujeme ta pole, která mají společnou stranu nebo roh.

**48.** V rovině je dáno pět bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Kolika způsoby je z nich možno vybrat čtyři tak, aby tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníku?

**49.** Na kružnici je dán konečný počet bodů. Středem této kružnice pak prochází taková přímka, že každá z opačných polorovin, na něž dělí rovinu, obsahuje stejný počet z daných bodů. Dokažte.

**50.** Je dána množina bodů **B**, z nichž žádné tři neleží v přímce. Některé z bodů množiny **B** jsou spojeny úsečkami, které tvoří množinu **U**. Přitom platí:

(1) Z každého bodu množiny **B** vycházejí nanejvýš tři úsečky množiny **U**.

(2) Každé dva body množiny **B** jsou spojeny buď úsečkou z **U** nebo lomenou čarou složenou ze dvou úseček z **U**.

Určete, jaký je největší možný počet bodů množiny **B**.

## Trojúhelníky

**51.** Je dán trojúhelník $ABC$, středy jeho stran označíme $P$, $Q$, $R$. Dokažte, že trojúhelníky $ABC$ a $PQR$ mají těžiště v tomtéž bodě.

**52.** V rovině je dán trojúhelník $PCQ$ a uvnitř tohoto trojúhelníku bod $T$. Sestrojte trojúhelník $ABC$ tak, aby bod $T$ byl jeho těžištěm, vrchol $A$ ležel na polopřímce $CP$ a vrchol $B$ na polopřímce $CQ$.

**53.** V rovině je dán trojúhelník $ABC$ a přímka $p$ neprocházející žádným jeho vnitřním bodem. Dokažte, že součet vzdáleností bodů $A$, $B$, $C$ od přímky $p$ se rovná součtu vzdáleností středů úseček $AB$, $BC$, $AC$ od přímky $p$.

**54.** V rovině je dán trojúhelník $ABC$ a přímka $p$, která neprochází žádným jeho vnitřním bodem. Vyjádřete vzdálenost jeho těžiště $T$ od přímky $p$ pomocí vzdáleností bodů $A$, $B$, $C$ od přímky $p$.

**55.** Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $ABC$ se základnou $AB$, jestliže znáte součet $s$ výšek na základnu a na rameno a velikost úhlu $\gamma$ při vrcholu $C$.

**56.** V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$. V polorovině opačné k polorovině $ABC$ leží rovnoramenný trojúhelník $ABB'$ se základnou $BB'$, v polorovině opačné k polorovině $BCA$ leží rovnoramenný trojúhelník $CBC'$ se základnou $BC'$. Tyto dva trojúhelníky jsou podobné. Dokažte, že i trojúhelník $DC'B'$ je s nimi podobný.

**57.** Kružnice opsaná trojúhelníku $ABC$ se dotýká kružnice procházející středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelník $ABC$ je pravoúhlý a že bod dotyku obou kružnic je jeho vrcholem.

**58.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$, bod $D$ je středem jeho přepony $AB$ a bod $S$ je středem kružnice trojúhelníku vepsané. Je-li $|CS| = |DS|$, pak jeden vnitřní úhel trojúhelníku $ABC$ má velikost 30°. Dokažte.

**59.** Součet vzdáleností každého bodu rovnostranného trojúhelníku od jeho stran se rovná velikosti výšky tohoto trojúhelníku. Dokažte.

**60.** Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Označme **M** množinu všech pravoúhelníků, jejichž dva vrcholy leží na úsečce $AB$ a zbývající dva na úsečkách $AC$ a $BC$. Pak platí: jestliže dva různé pravoúhelníky z množiny **M** mají stejný obvod, pak mají stejný obvod všechny pravoúhelníky z množiny **M**. Toto tvrzení dokažte.

**61.** Jsou dána dvě kladná čísla $m$, $s$ a body $A$, $B$, $C$ tak, že $|AB| = 2m$ a úhel $ABC$ je pravý. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $AXY$ se základnou $AY$ tak, aby měl obvod $2s$, vrchol $X$ ležel na polopřímce $AB$ a vrchol $Y$ na polopřímce $BC$.

**62.** Je dán rovnoramenný trojúhelník $ABC$ se základnou $AB$. Sestrojte na straně $AC$ bod $P$ a na straně $BC$ bod $Q$ tak, aby úsečky $CP$, $PQ$ a $QB$ měly stejnou délku.

**63.** V ostroúhlém trojúhelníku $ABC$ je uvnitř strany $AB$ dán bod $P$. Sestrojte uvnitř strany $AC$ bod $M$ a uvnitř strany $BC$ bod $N$ tak, aby obvod trojúhelníku $PMN$ byl co nejmenší (minimální).

**64.** Na straně $AC$ ostroúhlého trojúhelníku $ABC$ zvolte bod $M$, na straně $BC$ bod $N$ a na straně $AB$ bod $P$ tak, aby obvod trojúhelníku $MNP$ byl minimální.

**65.** Označme $s$ poloviční obvod a $t_a$, $t_b$, $t_c$ délky těžnic trojúhelníku. Dokažte, že platí

$$\frac{3}{2} s < t_a + t_b + t_c < 2s.$$

**66**. Dokažte, že pro libovolný vnitřní nebo hraniční bod $M$ obdélníku $ABCD$ platí $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$. Platí tato rovnost i pro body ležící vně obdélníku?

**67**. Lichoběžník $ABCD$ má tyto vlastnosti: pro jeho základny platí $|AB| = 2|CD|$ a jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Vypočtěte délky základen lichoběžníku pomocí délek jeho ramen $u = |BC|$, $v = |AD|$. Dokažte, že $v < 2u$ a $u < 2v$.

**68**. Je dán ostrý úhel $MVN$. Na rameni $VM$ jsou zvoleny body $A$, $B$ a $C$, pro které platí $|AV| > |BV| > |CV|$. Na rameni $VN$ sestrojte body $X$, $Y$ tak, aby průnikem trojúhelníků $AXB$ a $CYB$ byl čtyřúhelník osově souměrný podle osy procházející bodem $B$. Určete podmínku řešitelnosti.

**69**. Do kružnice o středu $S$ je vepsán konvexní čtyřúhelník tak, že bod $S$ není jeho vnitřním bodem. Pak má čtyřúhelník jedinou stranu maximální délky. Dokažte.

**70**. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož úhlopříčky $AD$, $BE$, $CF$ jsou stejně dlouhé a jehož každé dvě protější strany jsou spolu rovnoběžné. Pak lze tomuto šestiúhelníku opsat kružnici. Dokažte.

## Kružnice

**71**. Je dána kružnice $k$ a její tětiva $AB$. Najděte množinu těžišť všech trojúhelníků $ABX$, kde $X$ je bod kružnice $k$.

**72**. Ve vnitřní oblasti kružnice o poloměru 1 jsou dány čtyři různé body. Dokažte, že jsou mezi nimi dva, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{2}$.

**73.** Kružnice $k_1$ se dotýká základen $AB$, $CD$ a ramene $AD$ lichoběžníku $ABCD$, kružnice $k_2$ se dotýká jeho stran $AB$, $BC$ a $DC$, přitom obě kružnice leží v lichoběžníku. Jestliže je dvojnásobek výšky lichoběžníku roven rozdílu součtu délek obou základen a součtu délek obou ramen, pak mají kružnice $k_1$ a $k_2$ vnější dotyk. Dokažte.

**74.** Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka $p$ ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2} r$ od bodu $S$. Sestrojte čtverec opsaný kružnici $k$, jehož jeden vrchol leží na přímce $p$. Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.

**75.** V rovině trojúhelníku $ABC$ určete všechny takové body $M$, pro které mají kružnice opsané trojúhelníkům $ABM$, $BCM$ a $CAM$ stejně velké poloměry.

**76.** Jsou dány dvě kružnice, vzdálenost jejich středů je větší než součet jejich poloměrů. Označme $A$, $B$, $C$, $D$ body, z nichž každý je průsečíkem jedné vnitřní a jedné vnější společné tečny daných kružnic. Dokažte, že středy daných kružnic a body $A$, $B$, $C$, $D$ leží na jedné kružnici.

**77.** Je dána kružnice $k = (S; r)$, bod $A$ z vnitřní oblasti kružnice $k$ a kladné číslo $d$. Bodem $A$ je vedena tětiva kružnice $k$ tak, že bod $A$ dělí tětivu na dvě úsečky, jejichž rozdíl délek se rovná $d$. Vypočtěte délku této tětivy pomocí hodnot $r$, $d$ a $v = |SA|$. Na základě obdrženého výsledku sestrojte všechny tětivy dané vlastnosti.

**78.** Úsečka $AB$ délky 12 cm je rozdělena bodem $C$ v poměru 1 : 2. V jedné polorovině určené přímkou $AB$ jsou sestrojeny polokružnice s průměry $AB$, $AC$, $CB$. Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká všech tří polokružnic.

**79.** Kružnice $k_1 = (S_1; r_1)$, $k_2 = (S_2; r_2)$ se dotýkají vně v bodě $C$. Označme $A$, $B$ body dotyku těchto kružnic na jejich společné tečně, která je však různá od společné tečny v bodě $C$. Dokažte, že trojúhelník $ABC$ je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů daných kružnic.

**80.** Nad průměrem $AB$ délky 10 cm je sestrojena polokružnice $k$. Kružnice $k_1$, $k_2$ mají stejně velké poloměry, dotýkají se vzájemně a každá se dotýká polokružnice $k$ a průměru $AB$. Určete velikost jejich poloměru.

## Obsahy rovinných útvarů

**81.** V rovině je dána konečná množina bodů, z nichž každé dva mají vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že existuje čtverec o straně 1, který danou množinu obsahuje.

**82.** Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $a = |AB|$, $b = |BC|$, $a > b$. Určete bod $U$ ležící mezi body $C$, $D$ a bod $V$ mezi body $B$, $C$ tak, aby se obsahy trojúhelníků $ABV$, $AUV$, $ADU$ sobě rovnaly. Vypočtěte délky $|CU|$, $|CV|$ pomocí $a$, $b$. Sestrojte body $U$, $V$.

**83.** V trojúhelníku $ABC$ označíme $D$ střed strany $AC$ a $E$ ten bod strany $AB$, pro který platí $|AE| = 2\,|BE|$. Průsečík přímek $BD$, $CE$ označíme $K$. V jakém poměru dělí bod $K$ úsečky $BD$, $CE$? Vypočtěte obsahy obrazců, na které je daný trojúhelník rozdělen přímkami $CE$, $BD$, jestliže znáte obsah $P$ trojúhelníku $ABC$.

**84.** Obdélník $ABCD$ má rozměry $a = |AB|$, $b = |BC|$, kde $a > b$. Vystřihneme-li tento obdélník z papíru a přeložíme podle osy úsečky $BD$, vznikne pětiúhelník. Vyjádřete obsah tohoto pětiúhelníku pomocí $a$, $b$.

**85.** Je dán čtverec $ABCD$, označme $E$ střed strany $CD$ a $k$ kružnici o středu $A$ a poloměru $AC$. Najděte na kružnici $k$ všechny ty body $X$, pro které mají trojúhelníky $XDE$ a $XBC$ stejně velké obsahy.

**86.** Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$, v němž má úhel $CAB$ velikost $\alpha$. Obsah trojúhelníku je $P$. Označme $B_1$ patu výšky vedenou bodem $B$ na stranu $AC$ a $C_1$ patu výšky z vrcholu $C$ na stranu $AB$. Dokažte, že čtyřúhelník $BCB_1C_1$ má obsah $P \sin^2\alpha$.

**87.** Nechť trojúhelník $T_1$ s nejmenší výškou $v_1$ a obsahem $P_1$ je obsažen v trojúhelníku $T_2$ s nejmenší výškou $v_2$ a obsahem $P_2$. Dokažte, že pak platí $v_2P_1 \leqq v_1P_2$.

**88.** V rovině je dán pravoúhelník $P$ a trojúhelník $T$, který je v něm obsažen. Dokažte, že pro obsah $S_1$ pravoúhelníku $P$ a obsah $S_2$ trojúhelníku $T$ platí $2S_2 \leqq S_1$. Najděte všechny případy, kdy v této nerovnosti platí znaménko rovnosti.

**89.** Je dán čtverec, jehož strana má velikost $a$. Z každého vrcholu jsou dovnitř čtverce opsány čtvrtkružnice s poloměrem $a$. Tak se čtverec rozdělí na devět částí. Vypočtěte jejich obsahy.

**90.** Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Čtverce $ACEG$ a $BDFH$ se protínají také v pravidelném osmiúhelníku. Vypočtěte poměr obsahů obou osmiúhelníků.

**91.** Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně $s$. Na jeho stranách $AB, BC, \ldots, FA$ leží po řadě body $A_1$, $B_1, \ldots, F_1$ tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \ldots = |FF_1| = t$. Jsou to vrcholy pravidelného šestiúhelníku o straně $r$. Dokažte, že $r^2 = s^2 - st + t^2$, a zjistěte, pro které $t$ je $r$ nejmenší.

**92.** Do daného obdélníku $ABCD$, kde $|AB| > |BC|$, je vepsán osmiúhelník $JKLMNOPQ$, který je sjednocením obdélníků $JKNO$, $JMNQ$ o společné úhlopříčce $JN$, kde $J$ je střed úsečky $AD$, $N$ je střed úsečky $BC$ a body $K$, $M$ leží na přímce $CD$. Vypočtěte obsah osmiúhelníku, znáte-li strany $a = |AB|$, $b = |BC|$ daného obdélníku.

## Množiny bodů dané vlastnosti

**93.** V rovině je dána úsečka $AB$ a její vnitřní bod $C$. Ke každému bodu $Y$, pro který je úhel $CYB$ pravý, sestrojíme na přímce $AY$ bod $X$ tak, že $CX \parallel BY$. Ukažte, že takto obdržené body leží na kružnici. Vyjádřete její poloměr pomocí velikostí úseček $AC$, $BC$.

**94.** Je dán trojúhelník $ABC$, určete množinu všech bodů $M$ trojúhelníku $ABC$, pro které platí

$$P(ABM) \leqq P(BCM) \leqq P(CAM),$$

kde $P(ABM)$ značí obsah trojúhelníku $ABM$, analogicky pro obsahy dalších dvou trojúhelníků.

**95.** Je dána úsečka $AB$ a její vnitřní bod $S$. Co je množinou vrcholů $C$ všech trojúhelníků $ABC$, pro které platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ASC|$ ?

**96.** V rovině je dána přímka $p$ a ve vzdálenosti $a$ od ní bod $A$ ($a > 0$). Dále je dáno kladné číslo $c$. Určete množinu vrcholů $D$ všech pravoúhelníků $ABCD$ o obsahu $c$, jejichž vrchol $B$ leží na přímce $p$.

**97**. V rovině je dána úsečka $AB$. V jedné z polorovin s hraniční přímkou $AB$ uvažujme všechny pravoúhlé trojúhelníky $ABC$ s přeponou $AB$. V každém takovém trojúhelníku označíme $D$ patu kolmice vedené bodem $B$ na osu úhlu $ACB$. Vyšetřete, co je množinou všech takto obdržených bodů $D$.

**98**. Jsou dány dva různé body $A$, $B$ v rovině a kladné číslo $b$. Určete množinu těžišť všech trojúhelníků $ABC$ v dané rovině, pro které je $|AC| = b$.

**99**. V rovině jsou dány dva různé body $A$, $D$ a dále je dáno kladné číslo $r$. Určete množinu průsečíků úhlopříček všech rovnoramenných lichoběžníků s ramenem $AD$ a s poloměrem opsané kružnice $r$.

**100**. V rovině je dána kružnice $k$ s průměrem $AB$. Na kružnici $k$ zvolíme bod $X$ různý od bodů $A$, $B$ a na polopřímce $AX$ sestrojíme bod $Y$ tak, aby platilo $|AY| = |AX| + |XB|$. Co je množinou všech takto obdržených bodů $Y$?

**101**. Je dán trojúhelník $ABC$. Najděte množinu těžišť všech trojúhelníků $AXY$ takových, že bod $X$ je vnitřním bodem úsečky $AB$ a bod $Y$ je vnitřním bodem úsečky $AC$.

**102**. V rovině jsou dány dvě různoběžky $p$, $q$, dále je dáno kladné číslo $c$. Určete množinu všech bodů v rovině přímek $p$, $q$, jejichž součet vzdáleností od těchto dvou přímek se rovná číslu $c$.

**103**. V předchozí úloze nahraďte součet vzdáleností absolutní hodnotou rozdílu vzdáleností.

**104**. Určete množinu středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží na stěnách dané krychle.

**105.** Platí-li pro povrchy $P_1$, $P_2$, $P_3$ tří krychlí vztah $P_3 = P_1 + P_2$, pak pro jejich objemy $V_1$, $V_2$, $V_3$ platí

$$V_1 + V_2 < V_3 \leqq \sqrt{2}\,(V_1 + V_2).$$

Dokažte.

**106.** Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1, $M$ je střed hrany $A'B'$. Přímkou $MC'$ je vedena rovina $\varrho$, která rozděluje krychli na dvě tělesa. Těleso obsahující bod $B$ má objem $\frac{1}{3}$. V jaké vzdálenosti od vrcholu $B$ protíná rovina $\varrho$ hranu $AB$?

**107.** Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 3, $E$ je bod úsečky $DD'$, pro který platí $4|ED'| = |DD'|$, a bod $F$ je průsečík úhlopříček čtverce $DCC'D'$. Vypočtěte obsah lichoběžníku, který je průnikem roviny $AEF$ a krychle.

**108.** Podstavou trojbokého kolmého hranolu je rovnostranný trojúhelník o straně délky 1. Jedním vrcholem podstavy prochází rovina, která protíná plášť hranolu v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku. Vypočtěte obsah řezu hranolu touto rovinou.

**109.** Krychle o hraně délky 6 je rozdělena v $6^3 = 216$ jednotkových krychlí a je jí vepsána koule o průměru 6. Zjistěte, kolik jednotkových krychlí leží v kouli a kolik jich neobsahuje žádný vnitřní bod koule.

**110.** V prostoru jsou dány čtyři body $A$, $B$, $C$, $D$. Dokažte, že pro každý bod $X$ prostoru platí

$$3(|AX| + |BX| + |CX| + |DX|) \geqq |AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD|.$$