[dokumenty-02] Vybrané úlohy matematické olympiády. Kategorie A

Řešení úloh

In: Antonín Vrba (editor); Karel Horák (editor): [dokumenty-02] Vybrané úlohy matematické olympiády. Kategorie A. Sbírka řešených úloh z 21. až 35. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 27–182.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405248

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

ŘEŠENÍ ÚLOH

1

Dejme tomu, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovují dané soustavě. Z druhé až předposlední rovnice vyplývá

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1}.$$

Existuje tedy číslo t tak, že

$$x_2 = x_1 + t,\ x_3 = x_1 + 2t, \ldots, x_n = x_1 + (n-1)t.$$

První a poslední rovnice dané soustavy pak dává

$$x_1 - t = c,$$
$$x_1 + nt = d.$$

Odtud dostaneme

$$x_1 = \frac{cn + d}{n + 1},\quad t = \frac{d - c}{n + 1}.$$

Je tedy

$$x_k = \frac{cn + d}{n + 1} + (k - 1)\frac{d - c}{n + 1} = \frac{c(n - k + 1) + dk}{n + 1}$$

pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Snadno se přesvědčíme, že tato čísla dané soustavě skutečně vyhovují.

Soustava má pro každá dvě c, d právě jedno řešení.

2

Dejme tomu, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{1980}$ vyhovují dané soustavě. Z rovnic v posledním řádku máme

$$x_k = x_{k-1} + 1,$$

a tedy

$$x_k = x_1 + k - 1 \tag{1}$$

pro všechna $k \in \{2, 3, \ldots, 990\}$.

Z rovnic druhého řádku dostaneme pro $k \in \{991, 992, \ldots, 1980\}$

$$x_k = x_{1981-k} - 1981$$

a po dosazení z (1)

$$x_k = x_1 - k - 1, \quad k \in \{991, \ldots, 1980\}. \tag{2}$$

Zbývá ještě určit x_1. Dosadíme (1) a (2) do první rovnice

$$1980x_1 + 1979(x_1 + 1) + \ldots + 991(x_1 + 989) +$$
$$+ 990(x_1 - 992) + 989(x_1 - 993) + \ldots + x_1 - 1981 = 0$$

a upravíme levou stranu

$$x_1(1980 + 1979 + \ldots + 1) +$$
$$+ 1.1979 + 2.1978 + \ldots + 989.991 -$$
$$- 990.992 - 989.993 - \ldots - 1.1981 =$$
$$= x_1.\frac{1}{2}.1980.1981 + 1(1979 - 1981) + 2(1978 - 1980) +$$
$$+ \ldots + 989(991 - 993) - 990.992 =$$
$$= x_1.990.1981 - 2(1 + 2 + \ldots + 989) - 990.992 =$$
$$= x_1.990.1981 - 990.989 - 990.992 =$$
$$= (x_1 - 1).990.1981.$$

Odtud je $x_1 = 1$ a z (1) a (2)

$$x_2 = 2, x_3 = 3, \ldots, x_{990} = 990,$$
$$x_{991} = -991, x_{992} = -992, \ldots, x_{1980} = -1980.$$

Snadno se přesvědčíme, že tato čísla skutečně dané soustavě vyhovují. Soustava má jediné řešení.

3

Označíme-li $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, můžeme danou soustavu psát ve tvaru

$$\begin{aligned} 2x_1 - s &= 2a, \\ 4x_2 - s &= 4a, \\ 8x_3 - s &= 8a, \\ &\ldots \\ 2^n x_n - s &= 2^n a. \end{aligned}$$

Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čísla vyhovující soustavě, platí pro ně tedy

$$x_i = a + \frac{s}{2^i}$$

pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sečtením dostaneme

$$s = an + s\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = an + s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

a odtud

$$s = an.2^n.$$

Pro čísla vyhovující soustavě musí tedy platit

$$x_i = a(1 + n.2^{n-i}).$$

Zbývá ještě ukázat, že tato čísla skutečně vyhovují dané soustavě. Dosadíme do levé strany k-té rovnice

$$\begin{aligned} 2^k x_k - \sum_{i=1}^{n} x_i &= 2^k a(1 + n.2^{n-k}) - \sum_{i=1}^{n} a(1 + n.2^{n-i}) = \\ &= 2^k a + 2^n an - an - an \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \end{aligned}$$

$$= 2^k a + an(2^n - 1 - 2^n + 1) = 2^k a,$$

což souhlasí s pravou stranou.

Soustava má pro každé a jediné řešení.

4

Dejme tomu, že x, y, z jsou tři čísla vyhovující dané soustavě. Z druhé rovnice dostaneme

$$xy + yz + zx = \frac{5}{12} xyz.$$

Dosadíme-li do rovnosti

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz,$$

vyjde

$$xyz = -24.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ xy + yz + zx &= -10, \\ xyz &= -24. \end{aligned}$$

Teď už můžeme využít vztahů mezi kořeny a koeficienty rovnice

$$u^3 + au^2 + bu + c = 0.$$

Má-li tato rovnice kořeny x, y, z, můžeme ji psát ve tvaru

$$(u - x)(u - y)(u - z) = 0,$$

odkud vidíme, že

$$a = -(x + y + z),\ b = xy + yz + zx,\ c = -xyz.$$

V našem případě jsou čísla x, y, z kořeny rovnice

$$u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = 0.$$

Ta má celočíselné kořeny 2, -3, 4 (viz poznámku za 2. řešením úlohy 37). Dosazením se přesvědčíme, že tato čísla skutečně dané soustavě vyhovují.

Soustava má šest řešení (x, y, z):

$(2, -3, 4), (2, 4, -3), (-3, 2, 4), (-3, 4, 2), (4, 2, -3), (4, -3, 2)$.

5

Předpokládejme, že kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovují oběma rovnicím. Podle Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right)^2$$

vynásobením obou rovnic dostaneme

$$\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{x_k} \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \tag{1}$$
$$= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2.$$

Protože v nerovnosti nastává rovnost, existuje takové číslo λ, že pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$\sqrt{x_k} = \lambda \frac{k}{\sqrt{x_k}}, \text{ tj. } x_k = \lambda k.$$

Z první rovnice pak plyne, že je

$$\lambda \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}, \text{ tedy } \lambda = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Soustava obou rovnic má proto jediné řešení

$$x_k = \frac{k}{2n(n+1)}, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(Z rovnosti v (1) plyne, že uvedená čísla x_k vyhovují i druhé rovnici.)

6

Označíme-li kořeny dané rovnice x_1, x_2, x_3, je

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

tedy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,$$

a proto

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \geqq$$
$$\geqq 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b.$$

Poslední nerovnost plyne z nerovnosti

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

kterou dostaneme sečtením nerovností $(x_1 - x_2)^2 \geqq 0$, $(x_2 - x_3)^2 \geqq 0$, $(x_3 - x_1)^2 \geqq 0$. (Je též přímým důsledkem Cauchyovy nerovnosti.)

Druhé řešení. Není těžké zjistit, že má-li mnohočlen všechny kořeny reálné, má jeho derivace také všechny kořeny reálné. Derivace mnohočlenu $x^3 + ax^2 + bx + c$ je mnohočlen $3x^2 + 2ax + b$. Ten má všechny kořeny reálné, právě když má nezáporný diskriminant, tj. když

$$4a^2 - 12b \geqq 0$$

neboli

$$a^2 \geqq 3b.$$

7

Obě rovnice

$$qx^2 + px + 1 = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2}$$

mají týž diskriminant $D = p^2 - 4q > 0$. Proto má každá z obou rovnic dva různé reálné kořeny. Jsou-li

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}, \qquad x_1 < x_2,$$

kořeny rovnice (1), jsou qx_1, qx_2 kořeny rovnice (2), přičemž $qx_1 > qx_2$ $(q < 0)$.

Protože $q < 0$, je $p^2 - 4q > p^2$, takže $x_1 < 0 < x_2$. Číslo x_1 bude tedy splňovat kvadratickou nerovnici

$$x^2 + px + q < 0,$$

právě když bude platit

$$qx_2 < x_1 < qx_1;$$

přitom ale za daných předpokladů je druhá nerovnost vždy splněna, neboť $x_1 < 0 < qx_1$.

Nerovnost $qx_2 < x_1$ je ekvivalentní nerovnosti

$$q(-p - \sqrt{D}) > -p + \sqrt{D},$$

neboli

$$p(1 - q) > (1 + q)\sqrt{D}. \tag{3}$$

Nyní probereme následující možnosti (případ $p < 0 < 1 + q$ zřejmě nastat nemůže):

a) $p > 0$, $1 + q > 0$; pak je nerovnost (3) ekvivalentní s nerovnostmi

$$\begin{aligned} p^2(1-q)^2 &> (1+q)^2(p^2-4q), \\ -4p^2q &> -4q(1+q)^2, \\ p^2 &> (1+q)^2, \\ p &> 1+q; \end{aligned}$$

b) $p > 0 > 1 + q$; pak je $p(1 - q) > 0 > (1 + q)\sqrt{D}$;

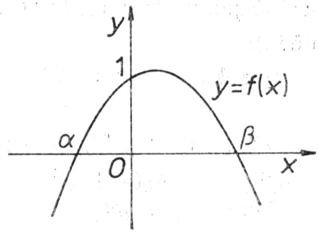
c) $p < 0$, $1 + q < 0$; pak je nerovnost (3) ekvivalentní s nerovnostmi

$$\begin{aligned} p^2(1-q)^2 &< (1+q)^2(p^2-4q), \\ p^2 &< (1+q)^2, \\ -p = |p| &< |1+q| = -1-q, \\ p &> 1+q. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že pro libovolná reálná čísla p, q $(q < 0)$ splňuje kořen x_1 kvadratickou nerovnici $x^2 + px + q < 0$, právě když je $p > 1 + q$.

Druhé řešení. Označme $f(x) = qx^2 + px + 1$ a předpokládejme, že rovnice $f(x) = 0$ má dva reálné kořeny α, β, $\alpha < \beta$. Protože podle známých vztahů mezi kořeny a koeficienty platí $\alpha\beta = \dfrac{1}{q} < 0$, je $\alpha < 0 < \beta$. Navíc $f(0) = 1 > 0$, takže $x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + px + q$ bude pro $x = \alpha$ záporné, právě když (obr. 6)

$$\frac{1}{\alpha} < \alpha, \text{ tj. } \alpha^2 < 1,$$



Obr. 6

neboli $-1 < \alpha < 0$. Tato vlastnost kořenu α je však zřejmě ekvivalentní nerovnosti $f(-1) < 0$, neboli

$$q - p + 1 < 0,$$

což jsme měli dokázat.

8

Abychom rozložili výraz na levé straně nerovnosti, hleďme na něj jako na kvadratický mnohočlen $a^2 - (x + 2x^2)a + x^4 + x^3 - 2x^2$. Jeho diskriminant je

$$(x + 2x^2)^2 - 4(x^4 + x^3 - 2x^2) = 9x^2$$

a kořeny jsou

$$a_1 = x^2 + 2x, \quad a_2 = x^2 - x.$$

Daná nerovnice má tedy tvar

$$(x^2 + 2x - a)(x^2 - x - a) < 0.$$

Je-li $a > 0$, je řešením nerovnice např. $x = \sqrt{a}$. Pro $-1 < a \leqq 0$ je řešením např. $x = -1$. V případě $a \leqq -1$ má kvadratický trojčlen $x^2 + 2x - a$ diskriminant $4 + 4a \leqq 0$ a trojčlen $x^2 - x - a$ diskriminant $1 + 4a < 0$. Oba mnoho-členy tedy nabývají jen nezáporných hodnot, takže nerovnost není nikdy splněna.

Daná nerovnost má řešení, právě když $a > -1$.

9

Dejme tomu, že číslo x je řešením dané rovnice. Umocníme-li obě strany na druhou, dostaneme po úpravě, že pro číslo x platí

$$\sqrt{(2p + 1 - x^2)(3x + p + 4)} = x^2 + 3x + 2.$$

Po dalším umocnění dojdeme ke vztahu

$$x^4 + 9x^3 + (17 + p)x^2 + (9 - 6p)x - (2p^2 + 9p) = 0.$$

Číslo x je tedy kořenem této rovnice. Abychom její levou stranu rozložili, podívejme se na ni jako na kvadratický mnohočlen v p

$$-2p^2 + (x^2 - 6x - 9)p + (x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 9x).$$

Jeho diskriminant je

$$(x^2 - 6x - 9)^2 - 4.(-2)(x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 9x) =$$
$$= 9x^4 + 60x^3 + 154x^2 + 180x + 81 = (3x^2 + 10x + 9)^2,$$

kořeny jsou (je $3x^2 + 10x + 9 > 0$ pro každé reálné x)

$$p_1 = \frac{x^2 + 8x + 9}{-2}, \quad p_2 = x^2 + x$$

a příslušný rozklad

$$\left(p + \frac{x^2 + 8x + 9}{2}\right)(p - x^2 - x) = 0,$$

neboli

$$(x^2 + 8x + 2p + 9)(x^2 + x - p) = 0.$$

Vidíme, že číslo x, které vyhovuje dané rovnici, je řešením jedné z rovnic

$$x^2 + 8x + 2p + 9 = 0,$$
$$x^2 + x - p = 0.$$

První rovnice však nepřichází v úvahu, jak zjistíme srovnáním s podmínkou pro existenci odmocniny na pravé straně dané rovnice. Kdyby totiž x bylo řešením první rovnice, platilo by zároveň

$$x^2 + 8x + 2p + 9 = (x + 3)^2 + 2(x + p) = 0,$$
$$x^2 + 9x + 3p + 9 = (x + 3)^2 + 3(x + p) \geqq 0,$$

což je splněno jen pro $x = -3$, $p = 3$. Pak však neexistují odmocniny na levé straně dané rovnice.

Vyhovuje-li tedy číslo x dané rovnici, je řešením rovnice

$$x^2 + x - p = 0. \tag{1}$$

Dosadíme-li odtud za p do dané rovnice, dostaneme

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$$

neboli

$$|x + 1| + |x + 2| = |2x + 3|.$$

Tato rovnost platí, právě když je buď $x \geqq -1$, nebo $x \leqq -2$.

Došli jsme k závěru, že dané rovnici vyhovují právě ty kořeny rovnice (1), pro které $x \geqq -1$ nebo $x \leqq -2$. Rovnice (1) má pro $p \geqq -\dfrac{1}{4}$ reálné kořeny

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4p}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4p}}{2}.$$

Přitom $x_1 \geqq -1$ pro každé $p \geqq -\frac{1}{4}$,

$$x_2 \geqq -1 \text{ pro } -\frac{1}{4} \leqq p \leqq 0, \quad x_2 \leqq -2 \text{ pro } p \geqq 2.$$

Pro $p = -\frac{1}{4}$ a pro $0 < p < 2$ má daná rovnice jediné řešení x_1. Pro $-\frac{1}{4} < p \leqq 0$ a pro $p \geqq 2$ má daná rovnice dvě různá řešení x_1, x_2. Pro $p < -\frac{1}{4}$ nemá rovnice řešení.

10

Protože pro všechna přirozená čísla $n > 1$ je

$$1 - \frac{1}{n^3} > 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2},$$

je

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{27}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) >$$
$$> \frac{1.3}{2^2} \frac{2.4}{3^2} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2}.$$

11

Postupně dostáváme

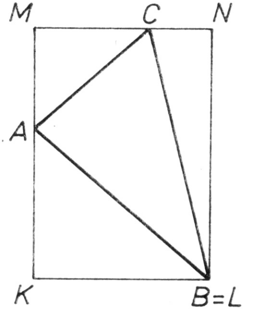
$$\begin{aligned}
&|x_1x_4 - x_1x_5 + x_2x_5 - x_2x_6 + x_3x_6 - x_3x_4| = \\
&= |x_1(x_4 - x_5) + x_2(x_5 - x_6) + x_3(x_6 - x_4)| \leqq \\
&\leqq |x_1|\,|x_4 - x_5| + |x_2|\,|x_5 - x_6| + |x_3|\,|x_6 - x_4| \leqq \\
&\leqq M(|x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_4|).
\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii posledního výrazu můžeme předpokládat, že $x_4 \leqq x_5 \leqq x_6$. Pak

$$|x_4 - x_5| + |x_5 - x_6| + |x_6 - x_4| = 2(x_6 - x_4) \leqq 4M.$$

Poznámka. Výraz na levé straně nerovnosti je dvojnásobek obsahu trojúhelníku ABC, který má v kartézské soustavě souřadnic vrcholy $A\,[x_1, x_6]$, $B\,[x_2, x_4]$, $C\,[x_3, x_5]$. Sestrojíme-li obdélník $KLMN$ se stranami rovnoběžnými s osami souřadnic opsaný trojúhelníku ABC (obr. 7), platí pro jeho obsah

$$S(ABC) \leqq \frac{1}{2}\,S(KLMN).$$



Obr. 7

Délka strany obdélníku $KLMN$ je však nejvýše $2M$, takže $S(KLMN) \leqq 4\,M^2$, což dává uvedenou nerovnost.

12

Předpokládejme, že přirozená čísla x, y jsou řešením dané nerovnice. Po vynásobení kladným číslem $y^3 \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)$ dostaneme

$$y|x^2 - 2y^2| < \frac{x}{y} + \sqrt{2}.$$

Pro libovolná přirozená čísla x, y je ovšem $|x^2 - 2y^2| \geqq 1$. Předpokládáme-li navíc $y \geqq 3$, dostaneme

$$y \leqq y|x^2 - 2y^2| < \frac{x}{y} + \sqrt{2} <$$

$$< 2\sqrt{2} + \frac{1}{y^3} < 2.1{,}42 + 0{,}125 < 3.$$

Stačí tedy uvažovat případy $y = 1$ a $y = 2$.

Pro $y = 1$ dostáváme nerovnici

$$|x - \sqrt{2}| < 1,$$

která má v oboru přirozených čísel řešení $x = 1$, $x = 2$.

Pro $y = 2$ máme nerovnici

$$|4x - 8\sqrt{2}| < 1,$$

která má jediné přirozené řešení $x = 3$.

Daná nerovnice má celkem tři řešení (1, 1), (2, 1), (3, 2).

13

Zkusme položit $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = A > 0$, $c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots = c_n = B > 0$. Pak bychom měli najít taková kladná celá čísla A, B, aby pro všechna $p \in \{1, 2, \ldots, k - 1\}$ platilo

$$k^2A + (n - k)^2B \leqq p^2A + (n - p)(k - p)A + \\ + (n - p)(n - k)B$$

a pro všechna $p \in \{k + 1, k + 2, \ldots, n - 1\}$

$$k^2A + (n - k)^2B \leqq pkA + p(p - k)B + (n - p)^2B,$$

neboli

$$(k + 2p - n)A \leqq (n - k)B \quad \text{pro } 1 \leqq p < k,$$
$$kA \geqq (2n - 2p - k)B \quad \text{pro } k < p \leqq n - 1.$$

Stačí tedy, když najdeme taková kladná celá čísla A, B, aby zároveň bylo

$$(3k - n)A \leqq (n - k)B,$$
$$(2n - 3k)B \leqq kA.$$

Z čísel $3k - n$, $2n - 3k$ může být nejvýše jedno nekladné, pak je ovšem příslušná nerovnost splněna pro libovolná kladná A, B a druhá nerovnost je splněna pro všechna kladná celá čísla taková, že

$$0 < \frac{A}{B} \leqq \frac{n - k}{3k - n}, \quad \text{resp.} \quad 0 < \frac{2n - 3k}{k} \leqq \frac{A}{B}.$$

Je-li zároveň $3k - n > 0$ i $2n - 3k > 0$ $\left(\text{tj. } \frac{1}{3}n < k < \frac{2}{3}n\right)$, je také

$$\frac{2n - 3k}{k} \leqq \frac{n - k}{3k - n},$$

neboť tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$k(n-k) \leqq \frac{n^2}{4},$$

jež platí pro všechna k. Existují tedy celá kladná čísla A, B, pro něž je

$$\frac{2n-3k}{k} \leqq \frac{A}{B} \leqq \frac{n-k}{3k-n},$$

což jsme chtěli dokázat.

Druhé řešení. Použijeme nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 x_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2,$$

která platí pro nezáporná čísla x_i, y_i, $x_i \neq 0$, a plyne z Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right)^2.$$

Pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = p$, $x_{p+1} = \ldots = x_n = n - p$ $(1 \leqq p < n)$ a pro $y_i = \sqrt{c_i}$ dostaneme nerovnosti

$$p(c_1 + \ldots + c_p) + (n-p)(c_{p+1} + \ldots + c_n) \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2} (\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \ldots + \sqrt{c_n})^2.$$

Zkusme pro dané k, $0 < k < n$, položit $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = A$, $c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots = c_n = B$, pak je

$$\frac{1}{2} (\sqrt{c_1} + \ldots + \sqrt{c_n})^2 = \frac{1}{2} (k\sqrt{A} + (n-k)\sqrt{B})^2$$

a

$$k(c_1 + \ldots + c_k) + (n - k)(c_{k+1} + \ldots + c_n) =$$
$$= k^2A + (n - k)^2B.$$

Rovnost

$$\frac{1}{2}(k\sqrt{A} + (n - k)\sqrt{B})^2 = k^2A + (n - k)^2B$$

neboli

$$(k\sqrt{A} - (n - k)\sqrt{B})^2 = 0$$

je splněna např. pro čísla $A = (n - k)^2$, $B = k^2$. Požadovaným nerovnostem tedy vyhovují např. přirozená čísla

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = (n - k)^2, \quad c_{k+1} = \ldots = c_n = k^2.$$

14

Protože

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq 0,$$

je

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq 4\sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geqq n^2.$$

Ta je důsledkem Cauchyovy nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right)^2, \tag{1}$$

v níž položíme $u_k = \sqrt{x_k y_k}$, $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{x_k y_k}}$. (Je také důsledkem nerovnosti mezi aritmetickým a harmonickým průměrem kladných čísel

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \geqq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}},$$

v níž položíme $a_k = x_k y_k$.)

Rovnost nastane, právě když

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = \ldots = x_n = y_n.$$

Druhé řešení. Podle Cauchyovy nerovnosti (1), v níž položíme $u_k = x_k + y_k$, $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{x_k y_k}}$, platí

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + y_k}{\sqrt{x_k y_k}} \right)^2.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + y_k}{\sqrt{x_k y_k}} \right)^2 \geqq 4n^2,$$

která platí, neboť pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je

$$\frac{x_k + y_k}{\sqrt{x_k y_k}} \geqq 2.$$

15

V případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ dokazovaná nerovnost zřejmě platí a rovnost nastane, právě když $x = 0$. Dále budeme předpokládat, že alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je nenulové, a ukážeme, že pak pro každé x platí ostrá nerovnost.

Diskriminant kvadratického trojčlenu

$$p(x) = x^2 + x\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4$$

je

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 - 4n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 .$$

Protože např. $p(0) > 0$, stačí dokázat, že $D < 0$. Položíme-li v Cauchyově nerovnosti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \qquad (1)$$

$u_i = a_i$, $v_i = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

a po umocnění na druhou

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 \leqq n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 .$$

Použijeme-li na pravou stranu opět nerovnost (1) (tj. použijeme-li Cauchyovu nerovnost pro $u_i = a_i^2$, $v_i = 1$), dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^4 \leqq n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \leqq n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 < 4n^3 \sum_{i=1}^{n} a_i^4.$$

Poslední nerovnost je ostrá, protože předpokládáme, že aspoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je nenulové. Je tedy $D < 0$ a nerovnost je dokázána.

16

Odvoďme nejprve tzv. Čebyševovu nerovnost: Jsou-li $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ reálná čísla, pak

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leqq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

a rovnost nastane, právě když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ nebo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Dostaneme ji sečtením nerovností

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0$$

pro všechny dvojice indexů $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Použijeme-li Čebyševovu nerovnost na n-tice

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n, \quad -x_n \leqq -x_{n-1} \leqq \ldots \leqq -x_1,$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} -x_{n-i+1} \leqq n \sum_{i=1}^{n} -x_i x_{n-i+1},$$

čili

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqq n \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}.$$

Nerovnici, kterou máme vyřešit, vyhovují tedy právě ty n-tice, pro které nastane rovnost v předchozí nerovnosti, tj. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n},$$

odkud

$$n \leqq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}},$$

$$n^k \leqq \sqrt[n]{a_1^{-k} a_2^{-k} \ldots a_n^{-k}}.$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt[n]{a_1^{-k} a_2^{-k} \ldots a_n^{-k}} \leqq \frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \ldots + a_n^{-k}}{n}.$$

Z posledních dvou nerovností vyplývá

$$n^k \leqq \frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \ldots + a_n^{-k}}{n},$$

což dává dokazovanou nerovnost.

Rovnost nastane, právě když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

Druhé řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ nastane rovnost. Předpokládejme, že pro $n = p$ dokazované tvrzení platí, a dokažme je pro $p + 1$ kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$, jejichž součet je 1. Pro p kladných čísel

$$\frac{a_1}{1 - a_{p+1}}, \quad \frac{a_2}{1 - a_{p+1}}, \ldots, \quad \frac{a_p}{1 - a_{p+1}},$$

jejichž součet je 1, podle indukčního předpokladu pro každé k přirozené platí

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{a_i}{1 - a_{p+1}} \right)^{-k} \geqq p^{k+1},$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{-k} \geqq p^{k+1} (1 - a_{p+1})^{-k}.$$

Je tedy

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i^{-k} = \sum_{i=1}^{p} a_i^{-k} + a_{p+1}^{-k} \geqq p^{k+1} (1 - a_{p+1})^{-k} + a_{p+1}^{-k} .$$

Abychom dokázali, že pravá strana není pro žádné $a_{p+1} \in \in (0, 1)$ menší než $(p + 1)^{k+1}$, najdeme minimum funkce

$$f(x) = p^{k+1}(1 - x)^{-k} + x^{-k}$$

v intervalu $(0, 1)$. Její derivace

$$f'(x) = k\, p^{k+1}(1 - x)^{-k-1} - k\, x^{-k-1}$$

je rovna nule, právě když $x = \dfrac{1}{p + 1}$. Funkce f je v intervalu $(0, 1)$ spojitá a pro $x \to 0$, $x \to 1$ je $f(x) \to +\infty$. Nabývá tedy v intervalu $(0, 1)$ minima, a to v bodě $x = \dfrac{1}{p + 1}$:

$$f\left(\frac{1}{p + 1}\right) = p^{k+1} \left(1 - \frac{1}{p + 1}\right)^{-k} + \left(\frac{1}{p + 1}\right)^{-k} = \\ = (p + 1)^{k+1}.$$

Tím je důkaz hotov.

Označme

$$A_n = \sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n,$$
$$B_n = \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n,$$
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} |\sin a_k - \cos a_k|;$$

nerovnost

$$|A_n - B_n| \leqq C_n$$

dokážeme matematickou indukcí. Indukční krok je založen na nerovnosti

$$|A_{n+1} - B_{n+1}| = |A_n \sin a_{n+1} - B_n \cos a_{n+1}| =$$
$$= |(A_n - B_n) \sin a_{n+1} + B_n(\sin a_{n+1} - \cos a_{n+1})| \leqq$$
$$\leqq |A_n - B_n|\,|\sin a_{n+1}| + |B_n|\,|\sin a_{n+1} - \cos a_{n+1}| \leqq$$
$$\leqq |A_n - B_n| + |\sin a_{n+1} - \cos a_{n+1}|.$$

Pro $n = 1$ nastane v dokazované nerovnosti vždy rovnost. Pro $n = 2$ nastane rovnost, právě když

$$|(\sin a_1 - \cos a_1) \sin a_2 + \cos a_1 (\sin a_2 - \cos a_2)| =$$
$$= |\sin a_1 - \cos a_1|\,|\sin a_2| + |\cos a_1|\,|\sin a_2 - \cos a_2| =$$
$$= |\sin a_1 - \cos a_1| + |\sin a_2 - \cos a_2|.$$

Snadno zjistíme, že je to právě pro $\sin a_1 = \cos a_1$, $\sin a_2 = \cos a_2$, tj. pro $a_1, a_2 \in \left\{ \frac{\pi}{4} + m\pi;\ m \text{ celé} \right\}$. Matematickou indukcí pak dostaneme, že pro $n > 1$ nastane rovnost, právě když pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je

$$a_k \in \left\{ \frac{\pi}{4} + m\pi;\ m \text{ celé} \right\}.$$

Druhé řešení. Postupně dostáváme

$$|\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n - \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \sin a_1 \ldots \sin a_{k-1} (\sin a_k - \cos a_k) \cos a_{k+1} \ldots \cos a_n\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |\sin a_1 \ldots \sin a_{k-1} (\sin a_k - \cos a_k) \cos a_{k+1} \ldots \cos a_n| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{n} |\sin a_k - \cos a_k|.$$

Pro $n = 1$ nastane rovnost vždy. Pro $n \geqq 2$ může rovnost nastat, jen když $\sin a_k = \cos a_k$ pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kdyby totiž bylo $\sin a_k - \cos a_k \neq 0$ pro nějaké k, plynulo by z poslední nerovnosti, že pro všechna $i < k$ je $|\sin a_i| = 1$ a pro všechna $j > k$ je $|\cos a_j| = 1$. Odtud by vyplývalo, že pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $\sin a_k \neq \cos a_k$, a tedy $|\sin a_k| = |\cos a_k| = 1$, což není možné.

19

Pro $x \neq 0$, $x \neq 2$ můžeme psát funkci f ve tvaru

$$f(x) = \frac{-6\,(x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) + 9} = \tag{1}$$

$$= \frac{-6}{x^2 - 2x - 3 + \dfrac{9}{x^2 - 2x}}.$$

Pokud $x^2 - 2x > 0$, tj. $x < 0$ nebo $x > 2$, je

$$f(x) = \frac{-6}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 2x}}\right)^2 + 3}$$

a f nabývá nejmenší hodnoty -2, právě když

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2x}},$$

totiž pro $x = -1$ a pro $x = 3$.

V případě $x^2 - 2x < 0$ je z vyjádření (1) funkce f vidět, že $f(x) > 0$. Pro $x = 0$ a pro $x = 2$ je $f(x) = 0$.

Funkce f nabývá minima -2 pro $x = -1$ a pro $x = 3$.

Poznámka. Derivováním funkce f bychom úlohu převedli na algebraickou rovnici 5. stupně.

20

Snadno zjistíme, že

$$f(x) = 2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{2} - 1 \text{ pro } x \in \langle p - 1, p + 1\rangle,$$

$$f(x) = 6px - p^2 + 1 \text{ pro } x \in (-\infty, p - 1\rangle \cup \langle p + 1, +\infty).$$

Jestliže $-\frac{p}{2} \in (p - 1, p + 1)$ neboli $p \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, pak funkce f v intervalu $\left\langle p - 1, -\frac{p}{2}\right\rangle$ klesá a v intervalu $\left\langle -\frac{p}{2}, p + 1\right\rangle$ roste, takže v bodě $x = -\frac{p}{2}$ má lokální extrém. (Další lokální extrém má v bodě $x = p - 1$ nebo $x = p + 1$.)

Jestliže $p \leqq -\frac{2}{3}$, je $-\frac{p}{2} \geqq p + 1$ a funkce f v intervalu $(-\infty, +\infty)$ klesá a nemá tedy lokální extrém.

Jestliže $p \geqq \frac{2}{3}$, je $-\frac{p}{2} \leqq p - 1$ a funkce f v intervalu $(-\infty, +\infty)$ roste a nemá tedy lokální extrém.

Funkce f nemá lokální extrém, právě když $|p| \geqq \frac{2}{3}$.

21

Funkce $f_1(x) = |x - a|$ nabývá minima v bodě $x = a$. Dále vyšetříme funkci $f_2(x) = |x - a| + |x - b|$, kde $a \leqq b$, a zjistíme, že pro $x \in \langle a, b\rangle$ je $f_2(x) = x - a + b - x = b - a$, pro $x < a$ je $f_2(x) = a - x + b - x = a + b - 2x > a + b - 2a = b - a$ a pro $x > b$ je $f_2(x) = x - a + x - b = 2x - a - b > 2b - a - b = b - a$, takže funkce $f_2(x)$ nabývá minima pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Daná čísla můžeme označit tak, že $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, a danou funkci

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

napsat ve tvaru

$$f_n(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \\ + \ldots + (|x - a_k| + |x - a_{k+1}|)$$

pro $n = 2k$,

$$f_n(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \\ + \ldots + (|x - a_{k-1}| + |x - a_{k+1}|) + |x - a_k|$$

pro $n = 2k - 1$.

Každá z funkcí $|x - a_i| + |x - a_{n+1-i}|$ nabývá minima pro všechna $x \in \langle a_i, a_{n+1-i}\rangle$, odkud vyplývá, že funkce $f_n(x)$ nabývá minima v případě $n = 2k$ pro všechna $x \in \langle a_k, a_{k+1} \rangle$ a v případě $n = 2k - 1$ pro $x = a_k$. V případě $n = 2k$ je její minimum

$$\sum_{i=1}^{k} a_{k+i} - \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

v případě $n = 2k - 1$ je její minimum

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_{k+i} - \sum_{i=1}^{k-1} a_i.$$

22

Pro $n = 1$ je hledané maximum rovno 1. Předpokládejme, že $n > 1$, a označme P množinu všech n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nezáporných celých čísel splňujících podmínku

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqq 7n;$$

dále označme M množinu všech n-tic z P, které dávají největší součet

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Uvažujme n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ M. Z podmínky (1) je zřejmé, že pro alespoň jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí $x_i < 2$. Kdyby to platilo pro všechna čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, měli bychom

$$(x_1 + 1)^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \leqq 2^3 + 1 + \ldots + 1 = \\ = 7 + n < 7n,$$

takže $(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n) \in$ P, a přitom

$$x_1 + 1 + x_2 + \ldots + x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

což odporuje předpokladu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ M. Pro alespoň jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tedy platí $x_j \geqq 2$.

Je-li některé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ větší než 2, např. $x_k > 2$, uvažujme n-tici, která vznikne z n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tak, že x_k nahradíme číslem $x_k - 1$ a x_i nahradíme číslem $x_i + 1$. Součet se nezmění a součet třetích mocnin se nezvětší, protože pro $x_i \leqq 1$ je

$$(x_i + 1)^3 + (x_k - 1)^3 = x_i^3 + x_k^3 + 3(x_i^2 - x_k^2) + \\ + 3(x_i + x_k) = x_i^3 + x_k^3 + 3(x_i + x_k)(x_i - x_k + 1) < \\ < x_i^3 + x_k^3.$$

Dostali jsme tak n-tici, která rovněž patří do M.

Podobně, je-li některé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovno nule, uvažujme n-tici, která vznikne z n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tím, že $x_m = 0$ nahradíme číslem $x_m + 1$ a x_j $(x_j \geqq 2)$ nahradíme číslem $x_j - 1$. Součet se tak nezmění a součet třetích mocnin se nezvětší, protože

$$(x_j - 1)^3 + 1^3 = x_j^3 - 3x_j^2 + 3x_j < x_j^3 + 0^3.$$

Dostali jsme tedy n-tici, která také patří do M.

Odtud vidíme, že v množině M existují takové n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, že každé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je rovno 1 nebo 2. Je-li r z těchto čísel rovno 2 a $n - r$ jich je rovno 1, bude hledané maximum rovno

$$2r + n - r = n + r,$$

přičemž r je největší celé číslo vyhovující podmínce

$$r \, . \, 2^3 + (n - r) \, . \, 1^3 \leqq 7n,$$

neboli

$$r \leqq \frac{6n}{7}.$$

Je tedy $r = \left[\frac{6n}{7}\right]$ a hledané maximum je $n + \left[\frac{6n}{7}\right]$.

Podle Cauchyovy nerovnosti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

platí

$$s = \left|\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i\right| = 2\left|\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i\right| \leqq$$

$$\leqq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i \sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i} = 2\sqrt{k(n-k)},$$

neboť

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - \sin^2 x_i) = n - k.$$

Rovnost v uvedené nerovnosti nastane právě tehdy, bude-li pro nějaké λ a pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platit

$$\sin x_i = \lambda \cos x_i,$$

tj. pro všechna i bude $\operatorname{tg} x_i = \lambda$.
Protože

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = k,$$

nastane rovnost např. pro čísla $x_1 = x_2 = \ldots = x_n \in \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pro něž

$$\sin x_i = \sqrt{\frac{k}{n}},\ \cos x_i = \sqrt{\frac{n-k}{n}},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pro takovou n-tici pak je $s = 2\sqrt{k(n-k)}$.

Ze vzorce

$$\operatorname{tg}(k-1)=\frac{\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}1}{1+\operatorname{tg}1\operatorname{tg}k} \tag{1}$$

(funkce tangens je zde zřejmě definována pro každé přirozené číslo k) plyne rovnost

$$\operatorname{tg}(k-1)+\operatorname{tg}1\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)=\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}1,$$

a je tedy ($\operatorname{tg}1\neq 0$)

$$\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)=\frac{1}{\operatorname{tg}1}(\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1)-\operatorname{tg}1).$$

Odtud snadno vypočteme uvažovaný součet

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)=\frac{1}{\operatorname{tg}1}(\operatorname{tg}n-\operatorname{tg}0-n\operatorname{tg}1)=$$
$$=\frac{1}{\operatorname{tg}1}\operatorname{tg}n-n.$$

Stačí tedy položit $A=\dfrac{1}{\operatorname{tg}1}$, $B=-1$. Tím je důkaz hotov.

Druhé řešení. Předpokládejme, že taková reálná čísla A, B existují. Pak musí pro libovolné přirozené n platit, že

$$\operatorname{tg}n\operatorname{tg}(n-1)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)=$$
$$=A(\operatorname{tg}n-\operatorname{tg}(n-1))+B. \tag{2}$$

Použijeme-li opět vzorce (1), dostaneme rovnost

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} n\,(\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1) = \\ = A \operatorname{tg} n\,(1 + \operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} n) - A\,(\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1) + \\ + B\,(1 + \operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} n),\end{gathered}$$

neboli

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}^2 n\,(1 - A \operatorname{tg} 1) - \operatorname{tg} n\,(\operatorname{tg} 1 + B \operatorname{tg} 1) - \\ - A \operatorname{tg} 1 - B = 0.\end{gathered}$$

Dostali jsme kvadratický trojčlen proměnné $x = \operatorname{tg} n$, který je identicky nulový. Poslední rovnost bude tedy splněna pro každé přirozené n, bude-li

$$\begin{gathered}1 - A \operatorname{tg} 1 = 0,\ \operatorname{tg} 1 + B \operatorname{tg} 1 = 0, \\ A \operatorname{tg} 1 + B = 0.\end{gathered}$$

Protože pro $A = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 1}$, $B = -1$ jsou všechny tři rovnosti splněny, platí rovnost (2) pro libovolné přirozené n. Zbývá jen ověřit, že pro nalezená čísla A, B je také

$$\operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} 0 = A \operatorname{tg} 1 + B,$$

což zřejmě platí. Zbytek dokážeme matematickou indukcí, když pro indukční krok použijeme vztah (2).

25

Označme r poloměr kružnice opsané uvažovanému trojúhelníku. Pak je

$$a = 2r \sin \alpha,\ b = 2r \sin \beta,\ c = 2r \sin \gamma,$$

a tedy

$$\begin{gathered}a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \\ = 2r \sin \alpha \cos \alpha + 2r \sin \beta \cos \beta + 2r \sin \gamma \cos \gamma =\end{gathered}$$

$$= 2r(\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin\gamma\cos\gamma) =$$
$$= 2r(\sin\gamma\cos(\alpha - \beta) - \sin\gamma\cos(\alpha + \beta)) =$$
$$= 2r\sin\gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) =$$
$$= 4r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Protože v intervalu $(0, \pi)$ jsou hodnoty funkce sinus kladné, je uvažovaný výraz kladný.

Druhé řešení. Podle kosinové věty je

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2,$$
$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

Vynásobíme-li první rovnost číslem c^2, druhou b^2 a třetí a^2 a sečteme, dostaneme

$$2abc(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) =$$
$$= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$= 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 4a^2c^2 - (2ac\cos\beta)^2 =$$
$$= 4a^2c^2(1 - \cos^2\beta) > 0.$$

Třetí řešení. Pokud trojúhelník není tupoúhlý, je platnost dokazované nerovnosti zřejmá. Nechť tedy γ je tupý úhel. Využijeme-li toho, že funkce kosinus na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ klesá a je kladná, a trojúhelníkové nerovnosti, dostaneme

$$a\cos\alpha + b\cos\beta > a\cos(\alpha + \beta) + b\cos(\alpha + \beta) >$$
$$> c\cos(\alpha + \beta) = -c\cos\gamma.$$

26

Označme γ úhel ležící proti straně c prvního trojúhelníku a ω úhel ležící proti straně w druhého trojúhelníku. Dosadíme-li do dokazované nerovnosti podle kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$
$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \omega$$

a podle známého vzorce

$$2P = ab \sin \gamma,$$
$$2Q = uv \sin \omega$$

a upravíme, převedeme ji na nerovnost

$$a^2v^2 + b^2u^2 \geqq 2abuv (\cos \gamma \cos \omega + \sin \gamma \sin \omega).$$

Použijeme-li ještě vzorec pro kosinus rozdílu, dostaneme nerovnost

$$(av - bu)^2 \geqq 2abuv (\cos (\gamma - \omega) - 1)$$

ekvivalentní s dokazovanou nerovností. Poslední nerovnost však vždy platí, protože levá strana je nezáporná a pravá nekladná.

Rovnost nastane, právě když je současně

$$av = bu, \gamma = \omega,$$

tj. když jde o podobné trojúhelníky, u nichž stranám a, b, c odpovídají strany u, v, w.

27

Snadno zjistíme, že

$$a = 2r \sin \alpha, b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin \gamma,$$

takže

$$V = 4r^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2) =$$
$$= 4r^2(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma).$$

Protože

$$\cos^2 \gamma = \cos^2 (\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 =$$
$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta =$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - \\
&\quad - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = \\
&= 1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \\
&\quad - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = \\
&= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \\
&\quad + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\
&= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \\
&= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,
\end{aligned}
$$

je

$$V = 8r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

odkud plyne první tvrzení.

Důkaz druhého tvrzení spočívá v úpravě

$$W = \frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

odkud plyne

$$
\begin{aligned}
&2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\, W = \sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta) + \\
&\qquad + \sin\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha) + \\
&+ \sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 0,
\end{aligned}
$$

takže W má stejné znaménko jako $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Poznámka. Trojúhelník je pravoúhlý, právě když $V = 0$. V tomto případě není W definováno.

28

Označme $b_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n$. Máme dokázat, že $b_n = 0$ pro všechna přirozená n. Podle daného rekurentního vztahu

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= 5a_{n+2} - 9a_{n+1} + 9a_n - 2a_{n+2} + 3a_{n+1} = \\
&= 3(a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n) = 3b_n,
\end{aligned}
$$

takže

$$b_n = 3^{n-1} b_1,$$

jak snadno plyne matematickou indukcí.

Protože podle předpokladu je

$$|b_n| \leqq |a_{n+2}| + 2|a_{n+1}| + 3|a_n| \leqq$$
$$\leqq 2^{n+2} + 2 . 2^{n+1} + 3 . 2^n = 11 . 2^n,$$

platí pro každé přirozené číslo n

$$3^{n-1} |b_1| \leqq 11 . 2^n, \text{ tj. } |b_1| \leqq 33 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Proto je $b_1 = 0$, tedy $b_n = 3^{n-1} b_1 = 0$ pro každé n, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Obecné řešení daného rekurentního vztahu najdeme řešením příslušné charakteristické rovnice

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 9 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$. Každá posloupnost vyhovující dané rekurenci pak má tvar

$$a_n = A . 3^n + B \operatorname{Re} \lambda_2^n + C \operatorname{Im} \lambda_2^n, \tag{1}$$

kde A, B, C jsou libovolné konstanty a Re, Im označuje reálnou a imaginární část komplexního čísla (podrobněji např. v knize N. J. Vilenkina Kombinatorika, SNTL-Mir, Praha-Moskva 1977). Z podmínky

$$|a_n| \leqq 2^n$$

ovšem plyne, že ve vyjádření (1) uvažované posloupnosti musí být $A = 0$. Jinými slovy, takové posloupnosti $\{a_n\}$ splňují rekurentní vztah $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n = 0$ s charakteristickou rovnicí $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$.

29

Posloupnost (a_n) splňující daný rekurentní vztah je monotónní, jak dokážeme matematickou indukcí. Nechť např. $a_0 \leqq a_1$ a předpokládejme, že $a_0 \leqq \ldots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$. Pak je

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} \geqq a_n.$$

Přitom je tato posloupnost buď konstantní, nebo ryze monotónní. Je-li konstantní, je posloupnost (b_n) rovněž konstantní a vyhovuje tudíž danému rekurentnímu vztahu.

Předpokládejme dále, že je posloupnost (a_n) nekonstantní, pak od jistého členu počínaje (tj. pro všechna $n \geqq n_0$ pro vhodné n_0) jsou její členy všechny kladné nebo všechny záporné. Položíme-li $c_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, je $c_n > 0$ pro $n > n_0$ a z dané rekurence máme

$$c_n = 4 - \frac{3}{c_{n-1}},$$

takže je buď a) $0 < c_n < 1$ pro všechna $n > n_0 + 1$,

nebo b) $1 < c_n \leqq 3$ pro všechna $n > n_0 + 1$,

nebo c) $3 < c_n < 4$ pro všechna $n > n_0 + 1$.

Přitom je v případě a) a c)

$$c_{n+1} = 4 - \frac{3}{c_n} > c_n,$$

v případě b) $c_{n+1} \leqq c_n$. Posloupnost (c_n) stejně jako posloupnost $(c_n c_{n+1})$ je tedy od určitého členu počínaje monotónní a omezená. Proto je posloupnost (b_n),

$$b_n = \left[\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right] = [c_{n+1}c_n],$$

od určitého členu počínaje již konstantní. Konstantní posloupnosti však splňují daný rekurentní vztah.

Druhé řešení. Danému rekurentnímu vztahu přísluší charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Členy posloupnosti (a_n) mají tedy tvar

$$a_n = A.3^n + B,$$

kde A, B jsou reálné konstanty. Posloupnost (a_n) je zřejmě monotónní, takže pokud není konstantní, je od jistého členu počínaje nenulová. Pak je ale

$$b_n = \left[\frac{A.3^{n+1} + B}{A.3^{n-1} + B}\right] = \left[\frac{9A.3^{n-1} + 9B - 9B + B}{A.3^{n-1} + B}\right] =$$

$$= 9 + \left[\frac{-8B}{A.3^{n-1} + B}\right],$$

přičemž posloupnost $\left(\dfrac{-8B}{A.3^{n-1} + B}\right)$ konverguje monotónně k nule. V každém případě je tedy posloupnost (b_n) od jistého členu počínaje již konstantní a každá konstantní posloupnost splňuje daný rekurentní vztah.

30

Zvolme libovolně index i. Protože posloupnost (a_n) není omezená, existují její členy a_m, pro které platí

$$a_m > \max(a_1, a_2, \ldots, a_i).$$

Jako j vezměme index prvního takového a_m, tj.

$$j = \min\{m; a_m > \max(a_1, a_2, \ldots, a_i)\}.$$

Zřejmě je $j > i$. Aby bylo $a_k - a_j = a_j - a_i$, musí platit

$$a_k = 2a_j - a_i. \tag{1}$$

Protože $a_j > a_i$, je

$$2a_j - a_i > a_j. \tag{2}$$

Protože posloupnost (a_n) obsahuje všechna přirozená čísla, existuje index k takový, že platí (1). Z toho, jak jsme definovali index j, a z nerovnosti (2) vyplývá, že $k > j$. Tím je důkaz hotov.

Ukázali jsme dokonce, že existuje nekonečně mnoho trojic indexů $i < j < k$ takových, že $a_k - a_j = a_j - a_i$ a přitom $a_i < a_j < a_k$.

31

Z definice posloupnosti (c_n) vyplývá, že existuje posloupnost $k_1, k_2, \ldots$ taková, že

$$c_1 = a_{P(k_1)} + b_{R(k_1)},\ c_2 = a_{P(k_2)} + b_{R(k_2)}, \ldots .$$

Navíc pro $i \neq j$ je $k_i \neq k_j$.

Protože posloupnosti (a_n), (b_n) jsou nerostoucí, je $a_j \leqq a_m$ pro $j \geqq m$ a $b_i \leqq b_n$ pro $i \geqq n$. To znamená, že nerovnost

$$a_j + b_i > a_m + b_n$$

může platit jedině pro $j < m$ nebo $i < n$.

Označme $\mathsf{A} = \{s; P(k_s) < m\}$, $\mathsf{B} = \{s; R(k_s) < n\}$. Je-li tedy $c_s > a_m + b_n$, pak podle předchozího je $s \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Protože množina A má právě $m - 1$ prvků a množina B právě

$n - 1$ prvků, má množina $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ nejvýše $m + n - 2$ prvků. Nerovnost $c_s > a_m + b_n$ může tudíž nastat nejvýše pro $n + m - 2$ hodnot indexu s. Proto pro $(n + m - 1)$-ní člen nerostoucí posloupnosti (c_n) platí

$$c_{n+m-1} \leqq a_m + b_n,$$

což jsme měli dokázat.

32

Vyhovuje-li posloupnost (a_n) podmínkám úlohy, je $a_n = a_0 + nd$ pro všechna $n \geqq 0$. Přitom je zřejmé, že musí být $d \neq 0$, protože jinak by posloupnost $((-1)^n a_n)$ obsahovala nekonečně mnoho dvojic stejných členů.

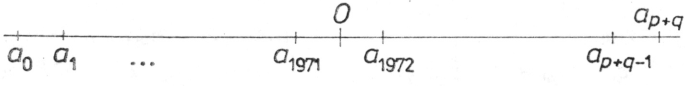
Obsahuje-li posloupnost $((-1)^n a_n)$ nějakou dvojici stejných členů, musí existovat celá čísla $0 \leqq p < q$ taková, že

$$a_p = -a_q,$$

přičemž $p + q$ je liché (jinými slovy, členy posloupnosti (a_n) nemohou být všechny vesměs nezáporné nebo vesměs nekladné, a protože $p + q$ je liché, nemůže posloupnost obsahovat ani nulu). Pak je ale také

$$a_{p-1} = a_p - d = -a_q - d = -a_{q+1},$$
$$a_0 = -a_{p+q},$$

takže (obr. 8)



Obr. 8

$$a_0 = -a_{p+q},$$
$$-a_1 = a_{p+q-1},$$
$$\vdots$$
$$a_{1970} = -a_{p+q-1970},$$
$$-a_{1971} = a_{p+q-1971}$$

je právě 1972 dvojic stejných členů posloupnosti $((-1)^n a_n)$, právě když

$$a_{1972} = a_{p+q-1971},$$

tj.

$$p + q = 3943.$$

Odtud plyne, že je

$$a_0 = -a_{3943} = -a_0 - 3943d,$$
$$2a_0 = -3943d.$$

Protože a_k jsou celá čísla, musí být $d = 2r$, kde r je celé, a všechny posloupnosti (a_n) s požadovanými vlastnostmi mají tedy tvar

$$a_n = -3943r + 2rn,$$

kde r je libovolné celé číslo.

33

Označíme-li $z = x - [x]$, je $0 \leqq z < 1$. Řešíme rovnici

$$3[x]^2 + 6([x] + z) - 4 = 0.$$

Vyhovuje-li číslo x této rovnici, platí

$$3[x]^2 + 6[x] = 4 - 6z, \tag{1}$$

takže
$$-\frac{2}{3} < [x]^2 + 2[x] \leqq \frac{4}{3}.$$

Protože $[x]^2 + 2[x]$ je celé číslo, máme dvě možnosti, totiž $[x]^2 + 2[x] \in \{0, 1\}$. V prvním případě vyhovuje $[x] = 0$ a $[x] = -2$, ve druhém případě příslušná kvadratická rovnice nemá celočíselné kořeny. Z rovnice (1) tak dostáváme dvě řešení $x = \frac{2}{3}$ a $x = -\frac{4}{3}$, která dané rovnici skutečně vyhovují.

Druhé řešení. Z dané rovnice je zřejmé, že pokud jí číslo x vyhovuje, je $6x$ celé číslo, takže $x = q + \frac{r}{6}$, kde q je celé číslo a $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $q = [x]$. Rovnice má pak tvar

$$3q^2 + 6q + r - 4 = 0,$$

odkud vidíme, že $r - 4$ je dělitelno třemi, takže $r = 1$ nebo $r = 4$. V prvním případě je

$$3q^2 + 6q - 3 = 0,$$

čili

$$q^2 + 2q - 1 = 0,$$

ale takové celé číslo q neexistuje. Ve druhém případě máme

$$3q^2 + 6q = 0,$$

odkud $q = 0$, $x = \frac{2}{3}$ nebo $q = -2$, $x = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$.

34

Vyhovují-li čísla x, y oběma podmínkám, platí pro ně

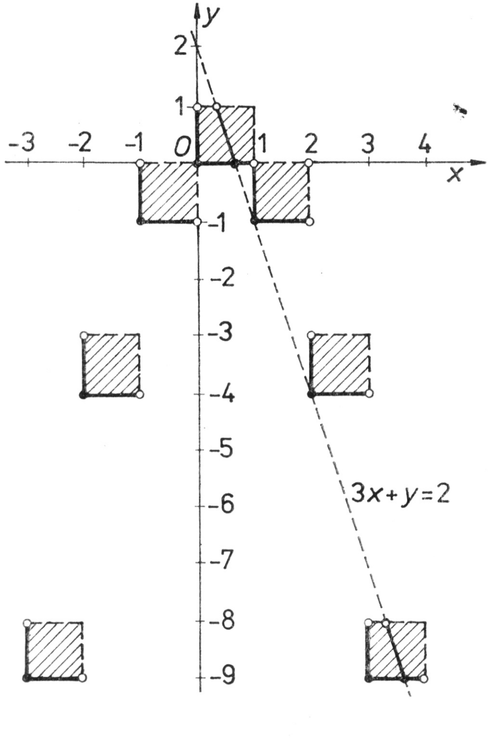
$$\begin{aligned} [x]^2 + [2 - 3x] &= 0, \\ y &= 2 - 3x. \end{aligned} \tag{1}$$

Označíme-li $z = x - [x]$, bude $0 \leqq z < 1$. Přitom je

$$[2 - 3x] = [2 - 3([x] + z)] = [2 - 3[x] - 3z] =$$
$$= 2 - 3[x] + [-3z].$$

Protože $-3z \in (-3, 0\rangle$, je $[-3z] \in \{-3, -2, -1, 0\}$. Číslo $[x]$ tedy vyhovuje některé z rovnic

$$u^2 - 3u - 1 = 0,$$
$$u^2 - 3u = 0,$$
$$u^2 - 3u + 1 = 0,$$
$$u^2 - 3u + 2 = 0.$$



Obr. 9

První a třetí rovnice nepřipadá v úvahu — nemá totiž celočíselná řešení. Z druhé rovnice vychází $[x] = 0$ nebo $[x] = 3$, ze čtvrté rovnice $[x] = 2$ nebo $[x] = 1$. Po dosazení do rovnic (1) zjistíme, že všechna řešení úlohy jsou dvojice $(x, y = 2 - 3x)$, kde $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \left(\frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right\rangle$.

Druhé řešení. Z definice celé části vyplývá (obr. 9), že v rovině s kartézskou soustavou souřadnic vyhovují první podmínce právě ty body (x, y), které leží uvnitř jednotkových čtverců, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic a jejichž levé dolní vrcholy leží v bodech $(k, -k^2)$, kde k je celé číslo, včetně těchto vrcholů a vnitřků stran, které je obsahují. Úloha je tak převedena na hledání průniku přímky $3x + y = 2$ s právě popsanou množinou.

35

Pro $a \in (0, 1)$ je $[a] = 0$, $\left[\frac{1}{a}\right] \geqq 1$, $[a]^{[1/a]} = 0$.

Pro $a \in (1, +\infty)$ je $[a] \geqq 1$, $\left[\frac{1}{a}\right] = 0$, $[a]^{[1/a]} = 1$.

Pro $a = 1$ je $[a]^{[1/a]} = 1$.

Je-li k přirozené číslo, bude tedy

$$\left[\frac{x}{k}\right]^{\left[\frac{k}{x}\right]} = 0 \text{ pro } x \in (0, k),$$

$$\left[\frac{x}{k}\right]^{\left[\frac{k}{x}\right]} = 1 \text{ pro } x \in \langle k, +\infty).$$

Zvolme kladné číslo x. To zřejmě leží v $[x]$ intervalech $\langle k, +\infty)$, kde k je přirozené číslo, totiž v intervalech $\langle 1, +\infty)$, $\langle 2, +\infty)$, ..., $\langle [x], +\infty)$. (Pro $[x] = 0$ žádný takový interval neexistuje.) Prvních $[x]$ sčítanců součtu, kterým je definována vyšetřovaná funkce f, je tedy rovno 1 a ostatní jsou nulové. Je tedy $f(x) = [x]$.

36

$[\sqrt{k}]$ je takové celé číslo m, pro které platí

$$m \leqq \sqrt{k} < m + 1,$$

neboli

$$m^2 \leqq k < (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1.$$

Pro uvedených $2m + 1$ hodnot k je tedy $[\sqrt{k}] = m$, takže

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \sum_{m=1}^{n-1} (2m + 1)m = 2 \sum_{m=1}^{n-1} m^2 + \sum_{m=1}^{n-1} m.$$

Využijeme-li známé vzorce

$$\sum_{i=1}^{r} i = \frac{1}{2} r(r + 1), \quad \sum_{i=1}^{r} i^2 = \frac{1}{6} r(r + 1)(2r + 1),$$

dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{1}{3} (n - 1) n (2n - 1) + \frac{1}{2} (n - 1) n =$$

$$= \frac{1}{6} (n - 1) n (4n + 1).$$

Odtud vidíme, že všechna hledaná n jsou ta, která dávají při dělení sedmi zbytek 0, 1 nebo 5.

37

Ve výrazu pro N se n vyskytuje jen v sudých mocninách. Označme proto $m = n^2$. Je-li n liché, tj. $n = 2k + 1$, je

$$m = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Ze dvou čísel k, $k + 1$ je právě jedno sudé, je tedy m tvaru

$$m = 8r + 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} N &= m^3 + 3m^2 + 7m - 11 = \\ &= (8r + 1)^3 + 3(8r + 1)^2 + 7(8r + 1) - 11 = \\ &= 2.256r^3 + 192r^2 + 24r + 1 + 192r^2 + 48r + 3 + \\ &\quad + 56r + 7 - 11 = 2.256r^3 + 384r^2 + 128r = \\ &= 2.256r^3 + 128r(3r + 1). \end{aligned}$$

Z čísel r, $3r + 1$ je právě jedno sudé a právě jedno liché, je tedy součin $r(3r + 1)$ sudý a číslo N je dělitelné 256.

Druhé řešení. Rozložme daný mnohočlen na součin jednodušších mnohočlenů. Protože $x = 1$ je kořenem mnohočlenu $x^3 + 3x^2 + 7x - 11$, je

$$N = (n^2 - 1)(n^4 + 4n^2 + 11).$$

Protože n je liché, je číslo $n^2 - 1$ součinem dvou po sobě jdoucích sudých čísel $n - 1$, $n + 1$ a je tedy dělitelné osmi.

Kvadratický trojčlen $x^2 + 4x + 11$ má záporný diskriminant, takže ho nemůžeme dále rozložit na součin dvojčlenů s reálnými koeficienty. Protože $256 = 8.32$, můžeme ale psát (mod 32)

$$\begin{aligned} n^4 + 4n^2 + 11 &\equiv n^4 + 4n^2 - 21 = (n^2 - 3)(n^2 + 7) \equiv \\ &\equiv (n^2 - 3)(n^2 - 25). \end{aligned}$$

Číslo

$$(n^2 - 3)(n^2 - 1)(n^2 - 25) =$$
$$= (n^2 - 3)(n - 5)(n - 1)(n + 1)(n + 5)$$

je dělitelné 256, neboť $n^2 - 3$ je sudé, rovněž každé z čísel $n - 5, n - 1, n + 1, n + 5$ je sudé, právě jedno z čísel $n - 5$, $n + 5$ a právě jedno z čísel $n - 1$, $n + 1$ je dělitelné čtyřmi a navíc právě jedno z uvedených čísel musí být dělitelno osmi (každé čtvrté sudé číslo je dělitelné osmi). A protože

$$N = (n^2 - 1)(n^2 - 3)(n^2 - 25) + 8.32A,$$

je číslo N dělitelné 256.

Poznámky. Máme-li mnohočlen s celočíselnými koeficienty, dovedeme říci, jak mohou vypadat jeho racionální kořeny. Je-li

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

pak zřejmě pro jeho racionální kořen $x = \frac{p}{q}$ (p, q nesoudělná) platí

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Odtud plyne, že musí být $p \mid a_0$, $q \mid a_n$. Je-li speciálně $a_n = 1$, pak mohou být racionálními kořeny daného mnohočlenu jen ta celá čísla, která jsou děliteli jeho absolutního členu. Toho jsme např. využili při »uhádnutí« kořenu mnohočlenu $x^3 + 3x^2 + 7x - 11$ — může totiž mít pouze tyto racionální kořeny: $1, -1, 11, -11$.

K výpočtu hodnot mnohočlenu f se používá tzv. Hornerova algoritmu. Mnohočlen f můžeme psát ve tvaru

$$f(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots)x + a_0.$$

Výpočet hodnoty mnohočlenu je pak výhodné provádět »zevnitř«. Položíme $A_1 = a_n$ a postupně počítáme $A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ podle vzorce

$$A_{k+1} = A_k x + a_{n-k}.$$

Nakonec dostaneme $A_{n+1} = f(x)$.

Třetí řešení. Protože n je liché, položme $n = 2k + 1$, k celé. Pak je

$$\begin{aligned} N &= n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11 = \\ &= (2k+1)^6 + 3(2k+1)^4 + 7(2k+1)^2 - 11 = \\ &= (2k)^6 + 6(2k)^5 + 15(2k)^4 + 20(2k)^3 + 15(2k)^2 + \\ &\quad + 6.2k + 1 + 3(2k)^4 + 12(2k)^3 + 18(2k)^2 + \\ &\quad + 12.2k + 3 + 7(2k)^2 + 14.2k + 7 - 11 = \\ &= 2^6k^6 + 3.2^6k^5 + 9.2^5k^4 + 2^8k^3 + 5.2^5k^2 + 2^6k = \\ &= 256k^3 + 2^5k(2k^5 + 6k^4 + 9k^3 + 5k + 2). \end{aligned}$$

Stačí tedy dokázat, že pro libovolné celé k je mnohočlen

$$p(k) = 2k^6 + 6k^5 + 9k^4 + 5k^2 + 2k$$

dělitelný osmi. Vypočteme proto hodnoty $p(0), p(1), \ldots, p(7)$ (využijeme Hornerova algoritmu, přičemž počítáme modulo 8), a protože každá z nich je dělitelná osmi, je i číslo N dělitelné 256.

38

Matematickou indukcí podle k dokážeme, že součet

$$L_k = 1^m + 2^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m$$

je dělitelný číslem n^{k-1}.

Pro $k = 1$ to zřejmě platí. Předpokládejme, že dokazované tvrzení platí pro $k = p$, a uvažujme součet

$$\begin{aligned} L_{p+1} = {} & 1^m + 2^m + \ldots + (n^p)^m + \\ & + (n^p + 1)^m + (n^p + 2)^m + \ldots + (2n^p)^m + \\ & + \ldots + \\ & + ((n-1)n^p + 1)^m + ((n-1)n^p + 2)^m + \ldots + \\ & + (n^{p+1})^m . \end{aligned}$$

Podle binomické věty zde bude v $(j + 1)$-ním řádku ($j \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$)

$$(jn^p + 1)^m + (jn^p + 2)^m + \ldots + (jn^p + n^p)^m = L_p + n^p A_j,$$

kde A_j je celé číslo. Celkem je tedy

$$\begin{aligned} L_{p+1} & = L_p + L_p + n^p A_1 + \ldots + L_p + n^p A_{n-1} = \\ & = nL_p + n^p(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}). \end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu je L_p dělitelné číslem n^{p-1}, a tak je L_{p+1} dělitelné číslem n^p. Tím je indukční krok a celý důkaz hotov.

39

Nechť n je přirozené číslo, pro které platí tvrzení úlohy. Jestliže pro prvočíslo p platí $p^2 < n$, pak je n dělitelné číslem p. Skutečně, kdyby p nedělilo n, $p^2 < n$, potom by byla p^2, n nesoudělná čísla, ale p^2 není prvočíslo.

Snadno zjistíme, že čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30 úloze vyhovují. Žádné jiné číslo menší než 30 nemá vlastnost v úloze popsanou. Předpokládejme, že n má tuto vlastnost a že $n > 30$. Protože $2^2 < 30$, $3^2 < 30$, $5^2 < 30$, je n dělitelno dvěma, třemi i pěti, a tedy $n = 30k \geqq 60$. Protože $7^2 < 60$, je $n \geqq 7 . 60 = 420$. Potom $11^2 < 420$, $13^2 < 420$, $17^2 < 420$, $19^2 < 420$, a tedy $n \geqq 420 . 11 . 13 . 17 . 19 > 10^7$. Žádná další čísla $n < 10^7$ s požadovanou vlastností tedy neexistují. (Dá se dokonce dokázat, že neexistují už ani žádná taková $n \geqq 10^7$.)

40

Protože p je liché, je počet sčítanců na pravé straně sudý. Součet upravíme

$$\frac{a}{b} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right),$$

přičemž pro $1 \leqq k \leqq \frac{p-1}{2}$ je

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} = \frac{p}{k(p-k)},$$

takže

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1(p-1)} + \frac{p}{2(p-2)} + \ldots + \frac{p}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} =$$
$$= p \frac{c}{(p-1)!},$$

kde c je přirozené číslo. Součin $(p-1)!$ nemůže být dělitelný prvočíslem p, proto z rovnosti

$$(p-1)!\, a = pbc$$

plyne, že p dělí a.

Druhé řešení. Upravme pravou stranu na společného jmenovatele, dostaneme rovnost

$$a(p-1)! = b\left((p-1)! + \frac{(p-1)!}{2} + \ldots + \frac{(p-1)!}{p-1}\right).$$

Kdyby pro nějaká dvě čísla j, k, $1 \leqq j < k \leqq p-1$, bylo

$$\frac{(p-1)!}{j} \equiv \frac{(p-1)!}{k} \pmod{p},$$

bylo by také

$$j \equiv k \pmod{p},$$

protože čísla p a $(p-1)!$ jsou nesoudělná (p je prvočíslo). Tvoří tedy $p-1$ čísel $(p-1)!$, $\frac{(p-1)!}{2}$, ..., $(p-2)!$ úplnou soustavu nenulových zbytků modulo p. Je tudíž

$$a(p-1)! \equiv b(1 + 2 + \ldots + p - 1) = \frac{bp(p-1)}{2} \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod{p}.$$

Odtud plyne, že p dělí a.

Třetí řešení. Uvedením na společného jmenovatele dostaneme v čitateli součet

$$s = 2.3 \ldots (p-1) + 1.3.4 \ldots (p-1) +$$
$$+ 1.2.4 \ldots (p-1) + \ldots + 1.2 \ldots (p-2).$$

Uvažujme mnohočlen

$$(p-2)(p-3) \ldots (p-(p-1)) + \ldots +$$
$$+ (p-1)(p-2) \ldots (p-(p-3))(p-(p-1)) +$$
$$+ (p-1)(p-2) \ldots (p-(p-3))(p-(p-2))$$

stupně $p - 2$. Tento mnohočlen je zřejmě roven s, přitom jeho absolutní člen je

$$(-2)(-3)\ldots(-(p-1)) + \ldots +$$
$$+ (-1)(-2)\ldots(-(p-3))(-(p-2)) =$$
$$= (-1)^{p-2}s = -s.$$

Protože ostatní členy jsou dělitelné číslem p, je

$$s = Mp - s,$$

takže

$$s = p\frac{M}{2}$$

je dělitelné p. Celkem tedy je

$$(p - 1)!\ a = bp\frac{M}{2},$$

odkud plyne, že p dělí a.

Poznámka. Úloha souvisí s tzv. Wilsonovou větou: Číslo p je prvočíslo, právě když

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Důkaz plyne z Fermatovy věty, podle níž pro libovolné prvočíslo p a $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ platí $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. To znamená, že mnohočlen $x^{p-1} - 1$ stupně $p - 1$ má $\pmod{p}$ $p - 1$ kořenů $1, 2, \ldots, p - 1$. Obdobně jako v oboru všech celých čísel můžeme tvrdit, že platí

$$x^{p-1} \equiv 1 - (x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) \pmod{p}$$

pro všechna celá x. Položíme-li $x = 0$, dostaneme jednu část Wilsonovy věty. Obrácené tvrzení plyne z toho, že pro složené číslo p je $(p-1)!$ vždy soudělné s p, takže nemůže být $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Zderivujeme-li předchozí kongruenci dostaneme

$$(p-1)\,x^{p-2} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1))}{x-k} \pmod{p},$$

odkud pro $x = 0$ plyne dělitelnost součtu

$$(p-1)! + \frac{(p-1)!}{2} + \ldots + \frac{(p-1)!}{p-1}$$

číslem p, což bylo potřeba v uvedené úloze.

41

Protože čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kořeny mnohočlenu $p-1$, je

$$p(x) - 1 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,q(x),$$

kde q je mnohočlen stupně $m-n$ s celočíselnými koeficienty. Kdyby bylo $p(a) = 0$ pro a celé, pak by bylo

$$-1 = (a-a_1)(a-a_2)\ldots(a-a_n)\,q(a),$$

tj. $|a - a_i| = 1$ pro alespoň tři různá celá čísla a_1, a_2, a_3. To nejde.

42

Protože

$$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + 2,$$

platí pro každé $n \geqq 1$

$$f(n+1) - f(n) = f(2) - 1 + 2(n-1),$$

takže

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1) + (n-1)(f(2) - 1) + \\ &\quad + 2(1 + 2 + \ldots + n - 2) = \\ &= (n-1)f(2) + (n-2)^2. \end{aligned}$$

Součin

$$\begin{aligned} f(n)f(n+1) &= (n-1)n(f(2))^2 + f(2)(n(n-2)^2 + \\ &\quad + (n-1)^3) + ((n-2)(n-1))^2 \end{aligned}$$

bychom chtěli pro libovolné $n \in \mathrm{N}$ vyjádřit jako $(m-1)f(2) + (m-2)^2$. Položme $m - 1 = af(2) + b$, pak dostaneme

$$a(a+1) = (n-1)n, \; (b-1)^2 = ((n-2)(n-1))^2,$$
$$2a(b-1) + b = 2n^3 - 7n^2 + 7n - 1.$$

Těmto podmínkám vyhovují čísla

$$a = n - 1, \; b = (n-2)(n-1) + 1 = n^2 - 3n + 3,$$

takže $m = (n-1)f(2) + n^2 - 3n + 4 = f(n) + n$. Je tedy

$$f(n)f(n+1) = f(f(n) + n).$$

43

Číslo x může nabývat hodnot 1, 2, ..., 32. Pro pevně zvolené x, $0 < x \leqq 32$, pak můžeme za y volit libovolné z čísel $x + 1, x + 2, \ldots, x + n$, kde n je největší celé číslo, pro něž platí

$$x + (x + n) + (x + n + 1) \leqq 100,$$

tj.

$$n = \left\lfloor \frac{99 - 3x}{2} \right\rfloor.$$

Je tedy

$$n = \frac{99 - 3x}{2} \text{ pro liché } x,$$
$$n = \frac{98 - 3x}{2} \text{ pro sudé } x. \tag{1}$$

Číslo z pak volíme tak, aby platilo $y < z \leqq 100 - (x + y)$. Pro každou dvojici x, $y = x + k$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$) pak máme celkem

$$100 - (2x + k) - (x + k) = 100 - 3x - 2k$$

možností, tedy pro každou volbu $x \in \{1, 2, \ldots, 32\}$ celkem

$$\begin{aligned} m(x) = (100 - 3x - 2) + (100 - 3x - 4) + \ldots + \\ + (100 - 3x - 2n) = \\ = 100n - 3nx - n(n + 1) = n(99 - 3x - n) \end{aligned}$$

možností.

Podle vztahů (1) je pro liché x

$$m(x) = \frac{99 - 3x}{2}\left(99 - 3x - \frac{99 - 3x}{2}\right) = \left(\frac{99 - 3x}{2}\right)^2,$$

pro sudé x

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{98 - 3x}{2}\left(99 - 3x - \frac{98 - 3x}{2}\right) = \\ &= \frac{100 - 3x}{2} \cdot \frac{98 - 3x}{2}. \end{aligned}$$

Celkový počet všech řešení $x < y < z$ dané nerovnice dostaneme jako součet

$$\begin{aligned} r = m(1) + m(2) + \ldots + m(32) = \\ = 48^2 + 47.46 + 45^2 + 44.43 + \ldots + 3^2 + 2.1. \end{aligned}$$

Protože pro libovolné a je

$$(3a)^2 + (3a - 1)(3a - 2) = 18a^2 - 9a + 2,$$

dostáváme

$$r = 18(1^2 + 2^2 + \ldots + 16^2) - \\ - 9(1 + 2 + \ldots + 16) + 32.$$

Podle známých vzorců

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2} k(k + 1),$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1)$$

spočteme, že je $r = 25\,736$. Daná nerovnice tedy má 25 736 řešení $x < y < z$.

44

Nechť P obsahuje k $(0 \leqq k \leqq n - 2)$ dvouprvkových a $n - 2 - k$ jednoprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$; v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ tedy zbývá $k + 2$ čísel i takových, že $\{i\} \notin$ P. Z nich můžeme utvořit $\binom{k+2}{2}$ dvouprvkových podmnožin, stačí tedy ověřit, že vždy platí

$$\binom{k+2}{2} > k,$$

neboli

$$(k + 2)(k + 1) > 2k.$$

Tato nerovnost zřejmě platí pro každé $k \geqq 0$.

Druhé řešení. Předpokládejme, že tvrzení úlohy neplatí, tj. že existuje taková $(n-2)$-prvková podmnožina $\mathsf{P} \subset \mathsf{M}_n$, že

$$\mathsf{P} \cap \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \neq \emptyset$$

pro každou $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Kdyby pro nějaké $m \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nebylo $\{m\} \in \mathsf{P}$, pak by pro každé $j \neq m$ muselo být $\{j\} \in \mathsf{P}$ nebo $\{j, m\} \in \mathsf{P}$, takže by P obsahovala více než $n - 2$ prvků. Je tedy $\{m\} \in \mathsf{P}$ pro libovolné $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, což dává opět spor s předpokládaným počtem prvků množiny P.

Třetí řešení. Zapišme všechny prvky množiny M_n do trojúhelníkové tabulky

$$\begin{array}{ccccc}
\{1\} & \{2\} & \{3\} & \ldots & \{n\} \\
 & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \ldots & \{1, n\} \\
 & & \{2, 3\} & \ldots & \{2, n\} \\
 & & & \ldots & \\
 & & & & \{n-1, n\}.
\end{array}$$

Protože P má $n - 2$ prvků, existují aspoň dva sloupce, které neobsahují žádný prvek z P $(i < j)$:

$$\begin{array}{cc}
\{i\} & \{j\} \\
\{1, i\} & \{1, j\} \\
 & \ldots \\
\{i-1, i\} & \{i-1, j\} \\
 & \{i, j\} \\
 & \ldots
\end{array}$$

takže $\mathsf{P} \cap \{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} = \emptyset$.

45

Součet ani rozdíl žádných dvou z čísel

$$1, 2, \ldots, \frac{k-1}{2}, k \quad \text{pro liché } k,$$

$$1, 2, \ldots, \frac{k}{2}, k \quad \text{pro sudé } k$$

není dělitelný číslem k. Má-li tedy číslo n požadovanou vlastnost, musí být větší než počet uvedených čísel, tj.

$$n \geqq \frac{k+3}{2} \text{ pro liché } k, \; n \geqq \frac{k+4}{2} \text{ pro sudé } k.$$

Předpokládejme, že n splňuje uvedené nerovnosti, zvolme n různých přirozených čísel a uvažujme jejich zbytky při dělení číslem k. Jsou-li dva ze zbytků stejné, je rozdíl příslušných čísel dělitelný číslem k. Jsou-li zbytky navzájem různé, tj. jde-li o n navzájem různých čísel z množiny $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, pak alespoň dva leží v téže z podmnožin

$$\{0\}, \{1, k-1\}, \ldots, \left\{\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right\} \text{ pro liché } k,$$

$$\{0\}, \{1, k-1\}, \ldots, \left\{\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}\right\}, \left\{\frac{k}{2}\right\} \text{ pro sudé } k,$$

kterých je méně než n. Součet příslušných dvou čísel je pak dělitelný číslem k. Číslo n má tedy požadovanou vlastnost.

Nejmenší číslo n s uvedenou vlastností je

$$n = \frac{k+3}{2} \text{ pro liché } k, \; n = \frac{k+4}{2} \text{ pro sudé } k.$$

46

Nejprve dokážeme, že $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. Nechť $t \in \mathsf{A}$, $t = t_1^2 + t_2^2$, $t_1, t_2 \in \mathsf{N}_0$. Pak pro každé $x \in \mathsf{A}$, $x = x_1^2 + x_2^2$, $x_1, x_2 \in \mathsf{N}_0$, platí

$$tx = (t_1^2 + t_2^2)(x_1^2 + x_2^2) =$$
$$= (t_1x_1 + t_2x_2)^2 + |t_1x_2 - t_2x_1|^2,$$

takže $tx \in \mathsf{A}$, tj. $\mathsf{A}_t \subset \mathsf{A}$, neboli $t \in \mathsf{B}$.

Obráceně, nechť $t \in \mathsf{B}$, tj. $\mathsf{A}_t \subset \mathsf{A}$. Protože $1 = 0^2 + 1^2 \in \mathsf{A}$, plyne odtud, že také $t = t \,.\, 1 \in \mathsf{A}_t \subset \mathsf{A}$, tedy $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Tím je rovnost $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ dokázána.

47

Nechť $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Obsahuje-li některá z množin A_1, A_2, A_3, řekněme A_j, nulu, pak je $\mathsf{A}_i = \mathsf{A}_k$. Podle předpokladu je totiž pro libovolné $x \in \mathsf{A}_i$ také $x = x + 0 \in \mathsf{A}_k$, tj. $\mathsf{A}_i \subset \mathsf{A}_k$. Obráceně, z implikace

$$(x \in \mathsf{A}_k, y \in \mathsf{A}_j) \Rightarrow ((x + y) \in \mathsf{A}_i, (x - y) \in \mathsf{A}_i)$$

dostaneme pro $y = 0$ inkluzi $\mathsf{A}_k \subset \mathsf{A}_i$. Odtud plyne, že pro dvě z množin A_1, A_2, A_3 s neprázdným průnikem, $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_k \neq \emptyset$, pak už musí být $\mathsf{A}_i = \mathsf{A}_k$, neboť pro $y \in \mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_k$ z předpokladu úlohy plyne $0 = y - y \in \mathsf{A}_j$.

Můžeme tedy dále předpokládat, že nula neleží v žádné z množin A_1, A_2, A_3 a že všechny tři množiny jsou navzájem disjunktní. Ještě si všimněme, že vždy platí $x \in A_i$, právě když $-x \in A_i$ (je $-x = y - (x + y)$). Označme $m_i = \min \{|x|;\ x \in A_i\} > 0$ a zvolme označení tak, aby platilo $m_i > m_j > m_k$. Pak je $m_i > m_j - m_k$, to však je spor s definicí čísla m_i, neboť podle předpokladu je $m_j - m_k \in A_i$.

Je-li L množina všech lichých celých čísel a S množina všech sudých celých čísel, mají množiny L, L, S požadované vlastnosti a je $L \cap S = \emptyset$.

Poznámka. Z uvedeného řešení rovněž zjistíme, jak vypadají všechny trojice množin splňujících podmínky úlohy. Je buď $A_1 = A_2 = A_3 = \{0\}$, nebo $A_1 = A_2 = A_3 = \{km;\ k \text{ celé}\}$, nebo $A_i = \{2km;\ k \text{ celé}\}$, $A_j = A_k = \{(2k + 1)m;\ k \text{ celé}\}$, kde m je nějaké přirozené číslo.

48

V množině A existuje nejvýše jeden prvek větší než 24, jinak by pro $25 \leqq y < x$ bylo $|x - y| < x \leqq \frac{xy}{25}$, což je ve sporu s předpokladem. A je tedy konečná.

Nechť $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, kde $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ a $x_{N-1} < 25$. Pro $j \in \{1, 2, \ldots, N - 1\}$ označme $d_j = x_{j+1} - x_j$, pak platí

$$d_j \geqq \frac{x_j x_{j+1}}{25} = \frac{x_j(x_j + d_j)}{25},$$

neboli

$$d_j \geqq \frac{x_j^2}{25 - x_j}.$$

Zřejmě $x_5 \geqq 5$, pak ale $d_5 \geqq \frac{25}{20} > 1$, neboli $x_6 \geqq 7$, dále $d_6 \geqq \frac{49}{18} > 2$, neboli $x_7 \geqq 10$, $d_7 \geqq \frac{100}{15} > 6$, neboli $x_8 \geqq 17$, $d_8 \geqq \frac{289}{8} > 36$, tedy $x_9 \geqq 54$. Musí tedy být $N \leqq 9$. Zároveň ale vidíme, že množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, 54\}$ vyhovuje naší úloze.

Poznámka. Není těžké popsat všechny množiny A vyhovující dané podmínce. Např. množiny

$$
\begin{array}{ll}
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17, a_1\}, & \text{kde } a_1 \geqq 54, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 18, a_2\}, & \text{kde } a_2 \geqq 70, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 19, a_3\}, & \text{kde } a_3 \geqq 80, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20, a_4\}, & \text{kde } a_4 \geqq 100, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 21, a_5\}, & \text{kde } a_5 \geqq 132, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 22, a_6\}, & \text{kde } a_6 \geqq 184, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 23, a_7\}, & \text{kde } a_7 \geqq 288, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 24, a_8\}, & \text{kde } a_8 \geqq 600, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 20, a_9\}, & \text{kde } a_9 \geqq 100, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 21, a_{10}\}, & \text{kde } a_{10} \geqq 132, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 22, a_{11}\}, & \text{kde } a_{11} \geqq 184, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 23, a_{12}\}, & \text{kde } a_{12} \geqq 288, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 24, a_{13}\}, & \text{kde } a_{13} \geqq 600, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 24, a_{14}\}, & \text{kde } a_{14} \geqq 600, \\
\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 24, a_{15}\}, & \text{kde } a_{15} \geqq 600, \\
\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, a_{16}\}, & \text{kde } a_{16} \geqq 600,
\end{array}
$$

jsou všechny devítiprvkové množiny, které vyhovují dané podmínce.

Platí-li tvrzení úlohy pro n sudé, platí i pro $n + 1$, protože $n + 1$ dělí součet $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$, takže pak stačí vzít $a_{n+1} = n + 1$.

Nechť tedy $n = 2k$, pak je $1 + 2 + \ldots + n = k(2k + 1)$. Především musí platit $a_{2k} | k(2k + 1)$. Zkusme tedy položit $a_{2k} = k$, pak by mělo být $a_{2k-1} | k . 2k$, vezměme proto $a_{2k-1} = 2k$, atd. Dostaneme tak pořadí

$$(k + 1, 1, k + 2, 2, \ldots, 2k, k)$$

čísel $1, 2, \ldots, 2k$. Vyzkoušíme, vyhovuje-li podmínce úlohy. Pro $1 \leqq i \leqq k$ je

$$(k + 1) + 1 + (k + 2) + \ldots + (i - 1) + (k + i) =$$
$$= ik + \frac{i(i + 1)}{2} + \frac{i(i - 1)}{2} = i(k + i)$$

a

$$(k + 1) + 1 + (k + 2) + \ldots + (k + i) + i =$$
$$= i(k + i + 1),$$

takže uvedené pořadí požadavkům úlohy vyhovuje.

Poznámka. Není těžké sestavit všechna vhodná pořadí pro malá n, řekněme $n \leqq 8$. Jejich prozkoumáním můžeme odhalit ještě další obecná řešení, jako např. $(2k, 2, k + 1, 3, \ldots, 2k - 1, 1)$ pro sudé $n = 2k$ nebo následující dvě pořadí

$$(2k + 1, 1, 2, k + 2, 3, \ldots, k, 2k, k + 1),$$
$$(k + 2, 1, k + 3, 2, \ldots, 2k + 1, k, k + 1)$$

pro lichá $n = 2k + 1$, která nedostaneme z již uvedených pořadí pro $n = 2k$.

50

Podle definice kombinačního čísla je

$$\binom{2k-1}{k} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!\,k!} =$$

$$= \frac{1.3.5.\ \dots (2k-1).2.4.\ \dots (2k-2)}{(k-1)!\,k!} =$$

$$= (2k-1)!!\,\frac{2^{k-1}}{k!},$$

přičemž číslo $(2k-1)!! = 1.3.5.\ \dots .(2k-1)$ je liché.

Pro nejvyšší mocninu 2^{α}, která dělí číslo $k!$, platí

$$a = \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{4}\right] + \dots + \left[\frac{k}{2^s}\right],$$

kde $2^s \leqq k < 2^{s+1}$. Je tedy

$$a \leqq \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \dots + \frac{k}{2^s} = k\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = k - \frac{k}{2^s} \leqq k - 1$$

s rovností, právě když $k = 2^s$.

Číslo $\binom{2k-1}{k}$ je liché, právě když $a = k - 1$, tj. právě pro všechna přirozená čísla k tvaru $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné.

Poznámka. Je-li k přirozené číslo, p prvočíslo, pak pro největší exponent a takový, že p^a dělí $k!$, platí

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{k}{p^i}\right]$$

(součet vpravo obsahuje jen konečný počet nenulových sčítanců). Z k činitelů součinu $1.2. \ldots .k$ je jich totiž $\left[\frac{k}{p}\right]$ dělitelných p (každý p-tý), $\left[\frac{k}{p^2}\right]$ dělitelných p^2 (každý p^2-tý), atd.

Druhé řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé celé nezáporné číslo s se 2^s-tý řádek Pascalova trojúhelníku skládá jen z lichých čísel. V tomto řádku jsou kombinační čísla

$$\binom{2^s - 1}{j} = \frac{(2^s - 1)(2^s - 2) \ldots (2^s - j)}{1.2. \ldots .j}, \qquad (1)$$

$$0 \leqq j \leqq 2^s - 1.$$

Vzhledem k tomu, že pro každá dvě přirozená čísla n, r, $n \leqq s$, je $2^s - r$ dělitelno číslem 2^n, právě když je r dělitelné číslem 2^n, je v rozkladech čitatele i jmenovatele (1) na prvočinitele prvočíslo 2 ve stejné mocnině, a proto kombinační číslo (1) je liché.

Ještě ukážeme, že prostřední číslo v každém z ostatních řádků Pascalova trojúhelníku je sudé. To plyne z toho, že pokud v-tý řádek obsahuje samá lichá čísla, je uprostřed $(v + 1)$-ního řádku $v - 1$ sudých čísel, která vznikla jako součty sousedních čísel v-tého řádku, uprostřed $(v + 2)$-hého řádku je $v - 2$ sudých čísel pocházejících ze sudých čísel $(v - 1)$-ního řádku, atd. Tento klín sudých čísel zasahuje až do $(2v - 1)$-ního řádku, kde je uprostřed sudé číslo.

Vidíme, že jsou-li ve v-tém řádku jen lichá čísla, pak první další řádek, kde to může zase nastat, je až $2v$-tý řádek.

51

Označme M_i množinu žáků, kteří chodí do i-tého kroužku. Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5| = \sum_{i=1}^{5} |M_i| - \sum_{i<j} |M_i \cap M_j| + \\ + \sum_{i<j<k} |M_i \cap M_j \cap M_k|.$$

(Další členy obsahují průniky čtyř a pěti kroužků a ty jsou prázdné.) Podle podmínek úlohy je

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5| = 64, |M_i| \geqq 19, \\ |M_i \cap M_j \cap M_k| \geqq 1.$$

Je tedy

$$\sum_{i<j} |M_i \cap M_j| \geqq 5.19 + \binom{5}{3}.1 - 64 = 41.$$

Na levé straně je $\binom{5}{2} = 10$ sčítanců, a tak není možné, aby žádný z nich nebyl větší než 4.

Poznámka. Tzv. princip inkluze a exkluze vyjadřuje počet prvků sjednocení konečných množin pomocí počtů prvků jejich průniků. Tak pro dvě množiny M_1, M_2 zřejmě je

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|,$$

pro tři množiny

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - \\ - |M_1 \cap M_2| - |M_2 \cap M_3| - |M_1 \cap M_3| + \\ + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|.$$

Obecně pak platí

$$\begin{aligned}
&|\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{M}_k| = |\mathsf{M}_1| + |\mathsf{M}_2| + \ldots + |\mathsf{M}_k| - \\
&- |\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2| - |\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_3| - \ldots - |\mathsf{M}_{k-1} \cap \mathsf{M}_k| + \\
&+ |\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2 \cap \mathsf{M}_3| + \ldots + |\mathsf{M}_{k-2} \cap \mathsf{M}_{k-1} \cap \mathsf{M}_k| - \ldots + \\
&+ (-1)^{k+1} |\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{M}_k| = \\
&= \sum (-1)^{r+1} |\mathsf{M}_{j_1} \cap \mathsf{M}_{j_2} \cap \ldots \cap \mathsf{M}_{j_r}|,
\end{aligned}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.

52

Dané body označme $A_1, \ldots, A_5$ a jako R_i označme množinu daných rovin obsahujících bod A_i (všechny indexy budou navzájem různé prvky množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Protože žádné čtyři dané body neleží v rovině, je

$$\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j \cap \mathsf{R}_k \cap \mathsf{R}_l = \emptyset$$

a podle principu inkluze a exkluze (viz poznámku k předchozí úloze) je

$$\begin{aligned}
|\mathsf{R}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{R}_5| = \sum_i |\mathsf{R}_i| - \sum_{i<j} |\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j| + \\
+ \sum_{i<j<k} |\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j \cap \mathsf{R}_k|.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dokážeme, že existují indexy i, j, pro které $|\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j| \leqq 1$, což znamená, že dvojice bodů A_i, A_j leží nejvýše v jedné z daných rovin a jejich spojnice tedy nemůže být průsečnicí dvou daných rovin. Podle a) je $|\mathsf{R}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{R}_5| = 7$ a podle b) $|\mathsf{R}_i| \leqq 4$. Protože v žádné rovině neleží čtyři dané body, je $\sum_{i<j<k} |\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j \cap \mathsf{R}_k|$ počet všech daných rovin, které obsa-

hují po třech daných bodech. Počítáme-li každý bod tolikrát, v kolika daných rovinách je obsažen, dostaneme

$$3 \sum_{i<j<k} |\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j \cap \mathsf{R}_k| \leqq \sum_i |\mathsf{R}_i| \leqq 5.4,$$

neboť každý z pěti daných bodů leží nejvýše ve čtyřech daných rovinách. Je tedy

$$\sum_{i<j<k} |\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j \cap \mathsf{R}_k| \leqq 6$$

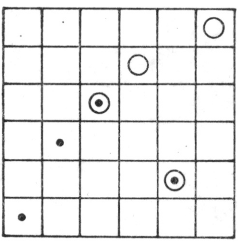
a podle (1)

$$\sum_{i<j} |\mathsf{R}_i \cap \mathsf{R}_j| \leqq 5.4 + 6 - 7 = 19.$$

Protože vlevo je $\binom{5}{2} = 10$ sčítanců, musí být některý menší než 2.

53

Pro pevné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme M množinu všech polí tabulky, v kterých je napsáno číslo i, doplňme trojúhelníkovou tabulku na čtvercovou $n \times n$ (obr. 10) a označme M' množinu souměrně sdruženou s M podle úhlopříčky procházející levým horním rohem. Z předpokladu úlohy plyne,



Obr. 10

že v každém řádku leží právě jedno políčko z množiny $M \cup M'$. Označíme-li D množinu polí uvedené úhlopříčky, platí

$$n = |M \cup M'| = |M| + |M'| - |M \cap M'| = \\ = 2|M| - |M \cap D|,$$

takže $|M \cap D|$ je pro liché n rovněž liché číslo a číslo i se proto na úhlopříčce vyskytuje aspoň jednou. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

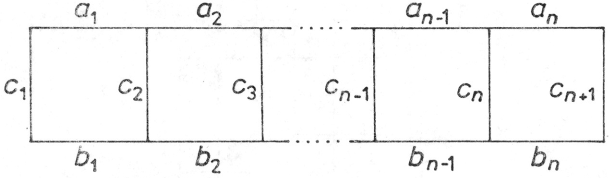
Poznámka. Pro sudá n tvrzení úlohy neplatí, jak ukazuje tabulka

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & \\ & 2 & 3 & & & & \\ & 3 & 4 & 5 & & & \\ & 4 & 5 & 6 & 7 & & \\ & & \ldots & & & & \\ n-1 & n & 1 & 2 & \ldots & n-3 & \\ & n & 1 & 2 & 3 \ldots & n-2 & n-1, \end{array}$$

v níž jsou na úhlopříčce jen lichá čísla (každé dvakrát).

54

Strany čtverců označme jako v obr. 11. Určíme nejprve P_1 a P_2. P_1 je počet všech neprázdných podmnožin čtyřprvkové



Obr. 11

množiny, tedy $P_1 = 2^4 - 1 = 15$. Pro $n = 2$ rozdělíme všechna přípustná obarvení na dvě části. Těch obarvení, u nichž je c_2 obarvena, je $2^6 = 64$. Těch, u nichž c_2 není obarvena, je $(2^3 - 1)^2 = 49$. Celkem je tedy $P_2 = 64 + 49 = 113$.

Pro $n > 2$ odvodíme rekurentní vzorec. Všechna přípustná obarvení opět rozdělíme na dvě části. Takových obarvení, že je obarvena alespoň jedna ze stran a_n, b_n, c_{n+1}, je $(2^3 - 1)P_{n-1} = 7P_{n-1}$. Pokud strany a_n, b_n, c_{n+1} nejsou obarveny, musí být obarvena strana c_n a ke každému ze čtyř možných obarvení stran a_{n-1}, b_{n-1} doplníme P_{n-2} obarvení zbylých stran. Celkem je tedy pro $n > 2$

$$P_n = 7P_{n-1} + 4P_{n-2}.$$

Z tohoto rekurentního vzorce plyne matematickou indukcí, že pro každé přirozené n je P_n liché číslo, neboť P_1 a P_2 jsou lichá. Tím je vyřešena část b).

Z rekurentního vzorce plyne, že

$$P_7 > 7P_6 > 7^2P_5 > \dots > 7^5P_2 = 7^5 . 113 > 10^6.$$

Na druhé straně je $P_n + P_{n-1} < 8(P_{n-1} + P_{n-2})$, takže

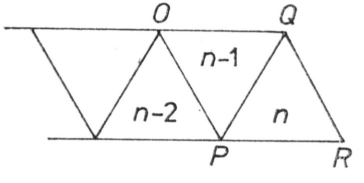
$$P_6 + P_5 < 8(P_5 + P_4) < 8^2(P_4 + P_3) < \dots < 8^4(P_2 + P_1) =$$
$$= 8^4 . 128 < 10^6,$$

a tak $P_6 < 10^6$. Protože $P_6 < 10^6 < P_7$, je hledané číslo $n = 7$. Tím je vyřešena i část a).

55

Označme B_n počet všech přípustných obarvení pro útvar složený z n trojúhelníků. Je-li $n > 3$, můžeme obarvení rozdělit do tří navzájem disjunktních skupin podle toho, jak jsou obarveny vrcholy n-tého trojúhelníku PQR (obr. 12).

Do 1. skupiny dáme obarvení, při nichž je vrchol R obarven — takových obarvení je B_{n-1}.



Obr. 12

Do 2. skupiny dáme obarvení, při nichž vrchol R není obarven a vrchol Q je obarven — takových obarvení je B_{n-2}.

Do 3. skupiny dáme obarvení, při nichž vrcholy R a Q nejsou obarveny, takže musí být obarven vrchol P — takových obarvení je B_{n-3}. Platí tedy rekurentní vzorec

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}. \tag{1}$$

Přímo zjistíme, že $B_1 = 7$, $B_2 = 13$, $B_3 = 24$.

Vzhledem k rekurentnímu vztahu (1) se v posloupnosti (B_n) střídají vždy dvě lichá a dvě sudá čísla. Proto je číslo B_{1984} sudé.

Druhé řešení. Při každém z B_n přípustných obarvení ($n > 1$) útvaru U_n složeného z n trojúhelníků je útvar U_{n-1} složený z prvních $n-1$ trojúhelníků útvaru U_n přípustně obarven. Všech obarvení útvaru U_n, při nichž je U_{n-1} přípustně obarven, je $2B_{n-1}$ (pro vrchol R (obr. 12) jsou dvě možnosti). Z těch jsou přípustná všechna kromě těch, co nemají obarven žádný z vrcholů P, Q, R. Ta však mají obarven vrchol O a je jich zřejmě B_{n-4} pro $n > 4$, 4 pro $n = 4$, 2 pro $n = 3$ a 1 pro $n = 2$. Platí tedy pro $n > 4$

$$B_n = 2B_{n-1} - B_{n-4},$$

takže B_{1984} má stejnou paritu jako $B_4 = 2B_3 - 4$ a je sudé.

56

Dané úsečky označme $I_1, I_2, \ldots, I_{n^2+1}$ tak, aby číslování úseček souhlasilo s uspořádáním jejich levých krajních bodů na přímce zleva doprava. Předpokládejme, že tvrzení a) neplatí, tj. že žádných $n + 1$ z daných úseček nemá společný bod, a dokažme, že pak platí tvrzení b).

Pro žádné $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ podle našeho předpokladu nemá $n + 1$ úseček

$$I_{(k-1)n+1}, I_{(k-1)n+2}, \ldots, I_{kn}, I_{kn+1}$$

společný bod. Mezi úsečkami

$$I_{(k-1)n+1}, I_{(k-1)n+2}, \ldots, I_{kn}$$

tedy existuje úsečka, označme ji U_k, která nemá s úsečkou I_{kn+1} společný bod (jinak by levý krajní bod úsečky I_{kn+1} patřil do každé z uvedených úseček). Pak ovšem U_k nemá společný bod ani s žádnou z úseček I_j, kde $j > kn + 1$. Dostáváme tak $n + 1$ úseček

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, I_{n^2+1}$$

z nichž žádné dvě nemají společný bod.

57

Pro dané přirozené číslo $n > 1$ označme $f(n)$ největší možný počet prvků množiny M. Zvolíme-li $\mathsf{M} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \ldots,$

$\langle 1, n\rangle\}$, bude M vyhovovat podmínkám a) i b). Je tedy $f(n) \geqq n - 1$. Ukážeme, že platí rovnost $f(n) = n - 1$.

Pro $n = 2$ je $\mathsf{M} = \{\langle 1, 2\rangle\}$ a $f(2) = 1$. Budeme pokračovat matematickou indukcí. Nechť $n > 2$ a předpokládejme, že pro každé přirozené číslo k, $2 \leqq k < n$, platí $f(k) = k - 1$. Nechť M je množina s vlastnostmi a) a b), která má největší možný počet prvků. Množina M musí obsahovat interval $\langle 1, n\rangle$. Kdyby ho totiž neobsahovala, neměla by maximální počet prvků, neboť $\mathsf{M} \cup \{\langle 1, n\rangle\}$ rovněž splňuje podmínky a) a b). Označme $\mathsf{M}' = \mathsf{M} - \{\langle 1, n\rangle\}$. Rozlišíme tři případy:

1. Žádný z intervalů $I \in \mathsf{M}'$ neobsahuje číslo n. Potom M' splňuje obě podmínky pro $n - 1$ a podle indukčního předpokladu je $|\mathsf{M}'| \leqq n - 2$, takže $|\mathsf{M}| \leqq n - 1$.

2. Žádný z intervalů $I \in \mathsf{M}'$ neobsahuje číslo 1. Nechť $\mathsf{M}'' = \{\langle u - 1, v - 1\rangle; \langle u, v\rangle \in \mathsf{M}'\}$. Potom podle indukčního předpokladu je $|\mathsf{M}''| \leqq n - 2$, takže $|\mathsf{M}| \leqq n - 1$.

3. Některý interval z M' obsahuje číslo n a některý interval z M' obsahuje číslo 1. Nechť p je největší přirozené číslo takové, že $\langle 1, p\rangle \in \mathsf{M}'$, a nechť q je nejmenší přirozené číslo, pro něž $\langle q, n\rangle \in \mathsf{M}'$. Označme

$$\mathsf{M}_p = \{I \in \mathsf{M}'; I \subset \langle 1, p\rangle\},$$
$$\mathsf{M}_q = \{I \in \mathsf{M}'; I \subset \langle q, n\rangle\}.$$

Zřejmě $q = p + 1$. Počet prvků M' je roven součtu počtů prvků M_p a M_q, takže

$$|\mathsf{M}| = |\mathsf{M}'| + 1 = |\mathsf{M}_p| + |\mathsf{M}_q| + 1.$$

Podle indukčního předpokladu je

$$|\mathsf{M}_p| \leqq f(p) = p - 1$$

a podobně jako v 2. případě také

$$|\mathsf{M}_q| \leqq f(n - q + 1) = n - q.$$

Je tedy

$$|\mathsf{M}| \leqq p - 1 + n - q + 1 = n - 1.$$

58

Označme s_i počet těch intervalů, které mají levý koncový bod i. Je tedy

$$m = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}.$$

Má-li interval I levý koncový bod i, patří $i + 1$ do I. Číslo $i + 1$ tedy patří jak do intervalů s levým koncovým bodem i, tak do intervalů s levým koncovým bodem $i + 1$. Podle b) odtud plyne

$$s_i + s_{i+1} \leqq k.$$

Je-li n liché, $n = 2p + 1$, je

$$m = (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4) + \dots + (s_{2p-1} + s_{2p}) \leqq pk.$$

Podobně pro n sudé, $n = 2q$, je

$$m = (s_1 + s_2) + \dots + (s_{2q-2} + s_{2q-1}) + s_{2q} \leqq$$
$$\leqq (q - 1)k + k = qk.$$

Je tedy

$$m \leqq \left[\frac{n}{2}\right] k.$$

Ukážeme, že je to nejlepší horní odhad čísla m, tj. že existuje posloupnost intervalů $I_1, I_2, \dots, I_m$ s vlastnostmi a) i b) taková, že $m = \left[\frac{n}{2}\right] k$. Stačí totiž položit

$$I_1 = \ldots = I_k = \langle 1, 2 \rangle,$$
$$I_{k+1} = \ldots = I_{2k} = \langle 3, 4 \rangle,$$
$$\ldots$$
$$I_{(k-1)\left[\frac{n}{2}\right]+1} = \ldots = I_{k\left[\frac{n}{2}\right]} = \left\langle 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1, 2\left[\frac{n}{2}\right] \right\rangle.$$

Druhé řešení. Každý z intervalů $I_1, I_2, \ldots, I_m$ obsahuje sudé číslo ne větší než n. Sudých čísel nejvýše rovných n je $\left[\frac{n}{2}\right]$. Protože každé může být nejvýše v k intervalech, je

$$m \leqq k\left[\frac{n}{2}\right].$$

Dál postupujeme jako v 1. řešení.

59

Rovina ϱ procházející středem koule a dvěma z daných bodů rozdělí kouli na dvě polokoule, uvnitř jedné z nich leží nejvýše čtyři dané body. Rovina $\sigma \perp \varrho$ procházející středem koule a jedním z těchto bodů rozdělí uvedenou polokouli na dvě čtvrtiny, přičemž uvnitř jedné z nich leží nanejvýš jeden z daných bodů. Rozdělme tuto čtvrtinu na dvě osminy rovinou τ procházející průsečnicí rovin ϱ a σ. Vnitřek aspoň jedné z nich neobsahuje žádný z daných bodů.

Druhé řešení. Rovina ϱ procházející středem koule a dvěma z daných bodů rozdělí kouli na dvě polokoule, přičemž uvnitř jedné z nich leží nejvýše čtyři dané body. Dvěma z nich a středem koule veďme rovinu σ. Dále sestrojme roviny

τ, ω určené vždy jedním ze zbývajících dvou bodů (pokud existují) a průsečnicí rovin ϱ, σ. Roviny σ, τ, ω rozdělí uvažovanou polokouli na nejvýše čtyři výseče, v jejichž vnitřku neleží žádný z daných bodů. Alespoň jedna z těchto výsečí má objem nejméně $\frac{1}{8}$.

60

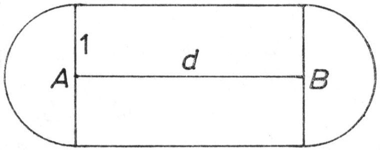
Abychom uvedené tvrzení dokázali, stačí najít šest koulí s poloměrem nejvýše $\frac{5}{6}$ takových, že sjednocení jejich vnitřků obsahuje danou jednotkovou kouli. Pak bude úloha vyřešena, neboť alespoň jedna z nalezených koulí musí ve svém vnitřku obsahovat alespoň 13 daných bodů.

Do dané koule K vepišme krychli Q $= ABCDEFGH$ a uvažujme koule K_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, jejichž průměry jsou stěnové úhlopříčky krychle Q. Každá z koulí K_i má poloměr $\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{5}{6}$. Ukážeme, že sjednocení všech šesti koulí obsahuje kouli K.

Čtyři tělesové úhlopříčky krychle Q, které se protínají ve středu S koule K, rozkládají krychli na šest čtyřbokých jehlanů, jejichž podstavy tvoří stěny krychle Q a jejichž společným vrcholem je střed S. Protože S leží v průniku všech šesti koulí K_i, každý z těchto jehlanů leží v jedné z uvedených koulí, takže krychle Q leží celá ve sjednocení koulí K_i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Roviny proložené stěnami krychle Q oddělují z koule K ještě šest kulových úsečí. Také každá z těchto úsečí leží v některé kouli K_i. Podstava každé z těchto úsečí má totiž střed a poloměr shodný se středem a poloměrem některé z uvedených koulí. Leží tedy celá koule K ve sjednocení koulí K_i a aspoň jedna z nich obsahuje nejméně 13 daných bodů.

61

Nechť AB je libovolná úsečka čáry L. Uvažujme množinu všech bodů roviny daného čtverce, které mají od úsečky AB vzdálenost nejvýše 1. Touto množinou je sjednocení všech kruhů $(X; 1)$ pro $X \in AB$ (obr. 13), a je-li $d = |AB|$, je její obsah $2d + \pi$.



Obr. 13

Pro dvě sousední úsečky KL, LM lomené čáry L je takovou množinou sjednocení obou odpovídajících oválů, přičemž jejich průnik obsahuje celý kruh $(L; 1)$. Pro obsah P sjednocení n oválů odpovídajících jednotlivým úsečkám lomené čáry tedy platí

$$P \leqq \sum_{i=1}^{n} (2d_i + \pi) - (n-1)\pi = \pi + 2\sum_{i=1}^{n} d_i = \pi + 2d,$$

kde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ jsou délky úseček tvořících čáru L, d je délka lomené čáry L.

Vyhovuje-li čára L podmínce úlohy, pokrývají uvedené ovály celý daný čtverec. Platí tedy

$$50^2 = 2\,500 \leqq P \leqq \pi + 2d,$$

takže

$$d \geqq \frac{2\,500 - \pi}{2} > 1248,$$

což jsme chtěli dokázat.

62

Pro $n = 1$ dokazované tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, a dokažme je pro $n = k + 1$. Uvažujme $3k + 3$ body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Nejmenší konvexní množina, která je všechny obsahuje (tzv. konvexní obal), je mnohoúhelník $A_1A_2\ldots A_s$ ($s \geqq 3$), jehož všechny vrcholy patří k daným bodům.

Nejprve předpokládejme, že uvnitř trojúhelníku $A_1A_2A_3$ neleží žádný z daných bodů. Uvnitř poloroviny opačné k $A_1A_3A_2$ pak leží $3k$ daných bodů, a ty jsou podle indukčního předpokladu vrcholy k navzájem disjunktních trojúhelníků. Přidáme-li k nim trojúhelník $A_1A_2A_3$, dostaneme $k + 1$ trojúhelníků vyhovujících požadavkům úlohy.

Zbývá případ, kdy uvnitř trojúhelníku $A_1A_2A_3$ leží nějaké z daných bodů. Vyberme z nich bod B tak, aby úhel BA_1A_2 byl co nejmenší (tím je bod B jednoznačně určen). Pak uvnitř poloroviny opačné k A_1BA_2 leží $3k$ z daných bodů, a ty jsou podle indukčního předpokladu vrcholy k navzájem disjunktních trojúhelníků. Přidáme-li k nim trojúhelník A_1A_2B, dostaneme $k + 1$ trojúhelníků vyhovujících požadavkům úlohy.

Poznámka. Z důkazu vidíme postup, který vede k rozdělení $3n$ bodů na n trojic určujících n navzájem disjunktních trojúhelníků.

63

Uvažujme libovolný čtverec, v jehož vnitřku neleží žádný uzel sítě. Ukážeme, že délka jeho strany je nejvýše a.

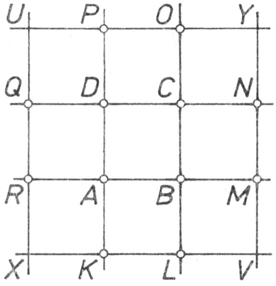
Čtverec přemístíme a případně zvětšíme tak, aby jeho dvě protilehlé strany procházely uzly sítě. Přitom budeme dbát, aby se do vnitřku čtverce nedostal žádný uzel sítě. Uvažovaný čtverec nejprve posuneme tak, aby se na jeho obvod dostal uzel A dané sítě (pokud tam již neleží). Dále ho přemístíme tak, aby uzel A zůstal na obvodu a dostal se tam další uzel sítě B. (Pokud to není možné, znamená to, že úhlopříčka uvažovaného čtverce je menší než a a s důkazem jsme hotovi.) Uzly A, B nemohou ležet na téže straně čtverce, to by pak zřejmě uvnitř něho ležel uzel sítě. Neprocházejí-li dvě protilehlé strany čtverce uzly sítě, leží body A, B na dvou sousedních stranách se společným vrcholem V. V tom případě zvětšujeme čtverec stejnolehlostí se středem V (uzly A, B pak zůstávají na stranách), dokud se na třetí straně neobjeví další uzel sítě C. Body A, C nebo B, C leží na protilehlých stranách.

Zbývá dokázat, že pokud na protilehlých stranách čtverce o straně velikosti b leží uzly sítě U, V a uvnitř něho uzly sítě neleží, je $b \leqq a$. Jde-li o dva sousední uzly sítě, je $|UV| = a$, a protože $|UV| \geqq b$, je $b \leqq a$.

Kdyby uzly sítě U, V nebyly sousední, zřejmě by bylo $|UV| \geqq a\sqrt{3}$, a protože zároveň $|UV| \leqq b\sqrt{2}$, platilo by $b \geqq a\sqrt{\frac{3}{2}}$. To by znamenalo, že čtverec o straně b obsahuje kruh o poloměru $a\sqrt{\frac{3}{8}}$ a vnitřek čtverce obsahuje kruh o poloměru $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. To však není možné, protože každý kruh o poloměru $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ obsahuje uzel sítě, neboť soustava kruhů o tomto poloměru se středy v uzlech sítě pokrývá rovinu. Střed O libovolného kruhu o poloměru $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ tedy leží v kruhu $\left(S; a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, kde S je nějaký uzel sítě, a pak také $S \in \left(O; a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

64

Uvažujme množinu všech kruhů v rovině se středy v uzlech sítě a poloměrem $\sqrt{5}$. Každý bod roviny leží aspoň ve 14 takových kruzích: Leží-li totiž bod ve čtverci s vrcholy v uzlech A, B, C, D (obr. 14), pokrývají ho kruhy se středy v uzlech K, L, M, N, O, P, Q, R a čtyři kruhy se středy ve vrcholech čtverce $ABCD$, dále aspoň jeden z kruhů se středy U, V

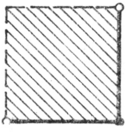


Obr. 14

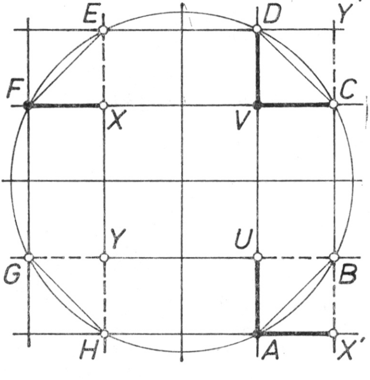
a aspoň jeden z kruhů se středy X, Y. Kruh A tedy obsahuje aspoň 14 uzlů sítě.

Útvar B je sjednocením čtyř kruhů o průměru 1. Kdyby uvnitř B ležely více než 4 uzly sítě, ležely by alespoň v jednom z těchto kruhů dva uzly sítě. Ty by musely být krajními body průměru uvažovaného kruhu, neboť jejich vzdálenost je aspoň 1. Pak však nemohou být oba vnitřními body útvaru B. Do kruhu A tedy patří alespoň $14 - 4 = 10$ uzlů sítě, které neleží uvnitř B.

Druhé řešení. Uvažujme vnitřek jednotkového čtverce spolu s vnitřkem dvou sousedních stran a jejich společným vrcholem (obr. 15). Každý takový »čtverec«, jehož strany jsou



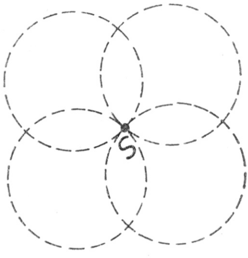
Obr. 15



Obr. 16

rovnoběžné s přímkami čtvercové sítě, zřejmě obsahuje právě jeden uzel sítě. Kruh o poloměru $\sqrt{5}$ obsahuje 12 takových »čtverců« (obr. 16); kromě toho jeden z »trojúhelníků« ABU, EFX (a podobně i jeden z »trojúhelníků« CDV, GHY) obsahuje uzel sítě, právě když ho obsahuje »čtverec« $AX'BU$ (resp. $CY'DV$). Libovolný kruh o poloměru $\sqrt{5}$ tedy obsahuje aspoň 14 uzlů sítě.

Útvar B je sjednocením čtyř otevřených kruhů o průměru 1 doplněných bodem S (obr. 17). Protože každý takový »kruh«

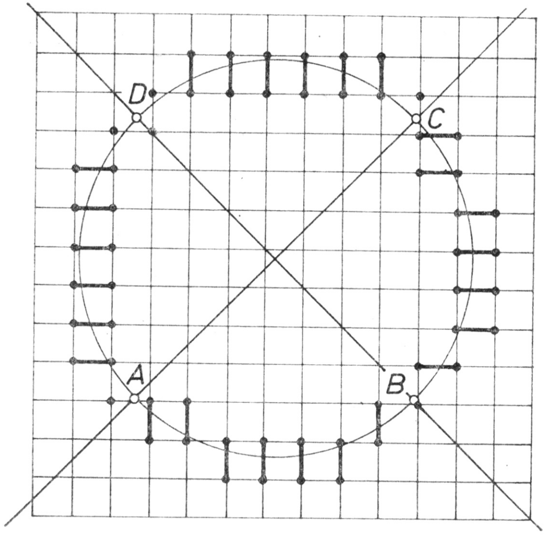


Obr. 17

může obsahovat nejvýše jeden uzel sítě (vzdálenost dvou uzlů je alespoň 1), leží uvnitř útvaru B nejvýše 4 uzly sítě. Tím je důkaz hotov.

65

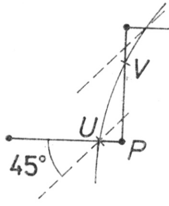
Označme A, B, C, D průsečíky hranice daného kruhu s přímkami, které procházejí jeho středem a svírají s přímkami čtvercové sítě úhel 45° (obr. 18). Tyto body rozdělí kružnici na čtyři oblouky. Čtvercům sítě, v nichž leží některý z bodů A, B, C, D, budeme říkat kritické. Vyznačme všechny

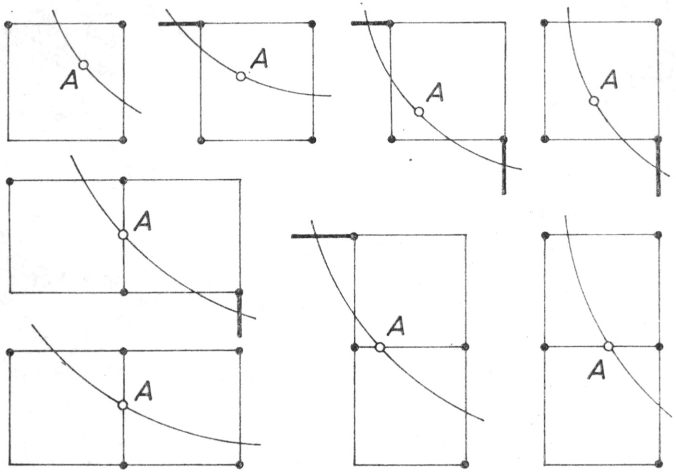


Obr. 18

vodorovné strany čtverců sítě, které protínají oblouk AD nebo BC, a všechny svislé strany, které protínají oblouk AB nebo CD (budeme mluvit o vyznačených stranách), ale přitom nejsou stranami kritických čtverců. Ukážeme, že všechny hraniční uzly, které nejsou vrcholy kritických čtverců, jsou koncovými body vyznačených úseček: Vezměme nějaký takový hraniční uzel, ten je podle definice koncovým bodem některé strany čtverce protínající uvažovanou kružnici — nechť je to např. svislá strana (pro vodorovnou stranu bychom uvažovali analogicky). Pokud tato svislá strana protíná oblouk AB nebo CD, je vyznačena; protíná-li oblouk AD (u oblouku BC bychom uvažovali analogicky), je uvažovaný hraniční uzel koncovým bodem vodorovné vyznačené strany protínající oblouk AD (obr. 19). To je způsobeno tím, že pro průsečík P vodorovné a svislé přímky, jež protínají oblouk AD v bodech U, resp. V, platí $|PU| < |PV|$. Všechny hraniční uzly, které nejsou vrcholy kritických čtverců, tedy leží na vyznačených úsečkách. Mezi všemi koncovými body vyznačených úseček je počet hraničních uzlů ležících vně K stejný jako počet hraničních uzlů ležících uvnitř K, neboť každá vyznačená úsečka

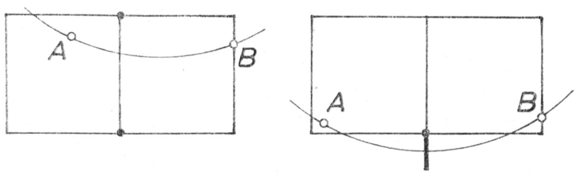
Obr. 19





Obr. 20

spojuje jeden vnitřní a jeden vnější hraniční uzel a žádné dvě nemají společný bod. Zbývá vyšetřit kritické čtverce. Pro bod A dostaneme osm možností znázorněných na obr. 20. Vidíme, že v každém případě je mezi vrcholy kritických čtverců, které neleží na vyznačených stranách, právě o jeden hraniční uzel ležící vně K více než hraničních uzlů ležících uvnitř. Stejně je tomu i pro body B, C, D, jak je vidět ze symetrie. Mají-li dva z kritických čtverců příslušných různým bodům společnou stranu, pak mají společný právě jeden hraniční uzel uvnitř a právě jeden hraniční uzel vně, anebo nemají společný žádný hraniční uzel, který by neležel na vyznačené straně (obr. 21).



Obr. 21

Zároveň se nemůže stát, aby uzel sítě byl vrcholem kritického čtverce pro každý z bodů A, B, C, D a byl přitom pokaždé počítán jako vnitřní hraniční uzel (to by kruh K obsahoval jediný uzel sítě). Je tedy celkový počet hraničních uzlů vně K o čtyři větší než počet hraničních uzlů uvnitř.

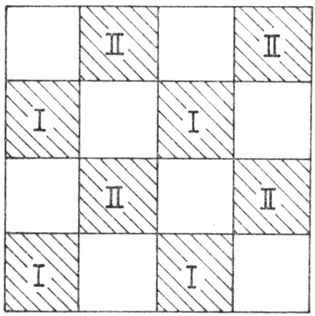
Druhé řešení. Vyznačme všechny strany čtverců sítě, které protínají hranici daného kruhu (oba jejich koncové body jsou hraniční uzly). Hraniční uzly budeme počítat takto: Zvolíme některou vyznačenou stranu jako výchozí a budeme postupovat po kružnici od průsečíků s výchozí stranou třeba ve směru otáčení hodinových ručiček. Jakmile dojdeme k průsečíku s vyznačenou stranou, připočítáme jeden vnitřní a jeden vnější hraniční uzel, pokud jsme některý z nich nepočítali již dříve. Obejdeme-li celou kružnici, spočteme tak všechny hraniční uzly. Setkáme se při tom se stranami vodorovnými a svislými. Dojdeme-li ke straně, která je rovnoběžná se stranou bezprostředně předcházející, zvětší se počet hraničních uzlů uvnitř i vně K o jeden. Dojdeme-li ke straně kolmé na stranu bezprostředně předcházející, mají obě strany jeden hraniční uzel společný a započteme jen druhý.

Můžeme předpokládat, že např. vlevo existují aspoň dvě vodorovné vyznačené strany (jinak by uvnitř K ležel jediný uzel sítě). Ze dvou vyznačených stran, které leží nejvíc vlevo, zvolme tu, která je výš. Popsaným způsobem postupujme tak dlouho, až dojdeme ke svislé straně ležící nejvýš (k libovolné z nich, je-li jich víc). Procházíme-li tímto »kvadrantem«, dvojice sousedních na sebe kolmých stran se pravidelně střídají. Následuje-li po vodorovné straně svislá, přibude jeden hraniční uzel vně, následuje-li po svislé straně vodorovná, přibude jeden hraniční uzel uvnitř. Projdeme-li celý »kvadrant«, napočítáme o jeden hraniční uzel vně víc než uvnitř, neboť jsme vyšli od vodorovné strany a skončili u svislé. Podobně je tomu i u ostatních tří »kvadrantů« a skončíme pod zvolenou vodorovnou stranou. Je tedy vidět, že vně K leží o čtyři hraniční uzly více než uvnitř.

Poznámka. Je zřejmé, že pokud uvnitř K leží jediný uzel sítě, je rozdíl hraničních uzlů roven třem, a pokud uvnitř neleží žádný uzel, neexistují ani žádné hraniční uzly.

66

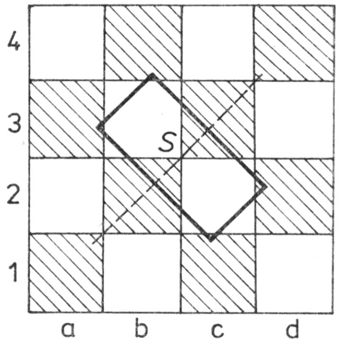
Nejdelší úsečka, kterou obdélník 2×1 obsahuje, je jeho úhlopříčka a její velikost je $\sqrt{5} < 3$. Odtud plyne, že obdélník může mít neprázdný průnik nejvýše se čtyřmi řádky, resp. sloupci. Bude tedy vždy ležet v nějaké části dané šachovnice se 4×4 poli. V této části je právě osm černých polí, označme je střídavě symboly I a II (obr. 22). Žádný obdélník 2×1 ne-



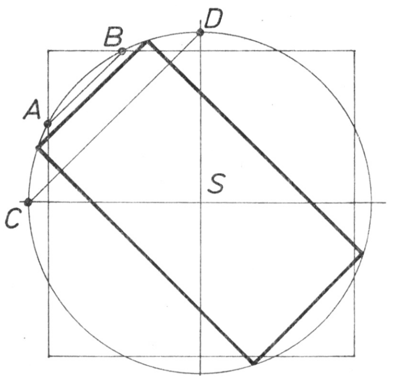
Obr. 22

může současně obsahovat vnitřní body všech čtyř polí označených stejným symbolem. Pak by totiž musel obsahovat čtverec o straně větší než 1, což není možné. Obsahuje tedy vnitřní body nejvýše tří černých polí označených I a nejvýše tří černých polí označených II, tedy nejvýše šesti černých polí.

Sestrojíme obdélník 2×1, který obsahuje vnitřní body šesti černých polí. Jeho střed S bude ležet ve společném vrcholu dvou černých polí a jeho kratší strana bude mít směr jejich společné úhlopříčky (obr. 23). Kružnice opsaná tomuto obdélníku protne hranici bílého čtverce $b3$ ve středech A, B jeho dvou sousedních stran (obr. 24). Přitom je $|AB| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ a $|CD| = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1$. Vrcholy sestrojeného obdélníku leží tedy



Obr. 23

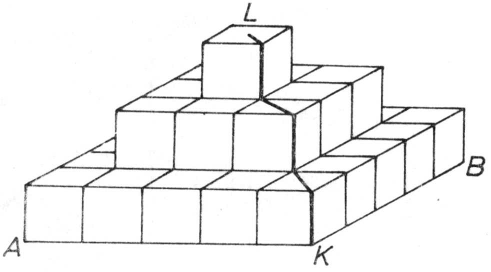


Obr. 24

na uvedené kružnici uvnitř černých čtverců $a3$, $b4$, $c1$, $d2$. Obdélník samozřejmě obsahuje i vnitřní body černých polí $b2$ a $c3$ se společným vrcholem S.

67

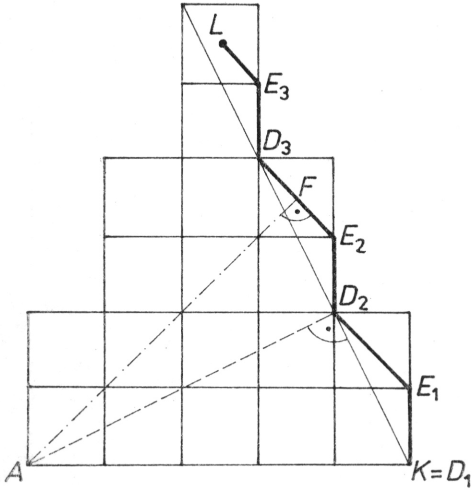
Vzhledem k souměrnosti pyramidy můžeme předpokládat, že spojnice bodů A, B prochází některým bodem C na spojnici bodů L a K, která leží v rovině souměrnosti bodů A a B (obr. 25 pro $n = 3$). Abychom našli bod C, pro který je spoj-



Obr. 25

nice AC nejkratší, rozvineme příslušnou část povrchu pyramidy do roviny (obr. 26).

Je zřejmé, že z bodů úsečky D_kE_k $(1 \leqq k \leqq n)$ má nejmenší vzdálenost od bodu A bod D_k. Z bodů úsečky E_kD_{k+1} má nejmenší vzdálenost od bodu A vždy některý z jejích krajních bodů s výjimkou případu, kdy je $|AE_k| = |AD_{k+1}|$ (to nastane pro liché $n = 2k - 1$). V tomto případě má z bodů úsečky E_kD_{k+1} od bodu A nejmenší vzdálenost její střed F, pak je ale $|AF| > |AD_k|$ (je totiž $|\sphericalangle AD_kF| > |\sphericalangle AD_kD_{k+1}| \geqq 90°$).



Obr. 26

Zjistili jsme tedy, že hledaným bodem C je vždy některý z bodů D_k $(1 \leqq k \leqq n)$.

Podle Pythagorovy věty je

$$\begin{aligned} |AD_k|^2 &= (2n - k)^2 + (2k - 2)^2 = \\ &= 5k^2 - k(4n + 8) + 4n^2 + 4 = \\ &= 5\left(k - \frac{2}{5}(n + 2)\right)^2 + z, \end{aligned}$$

kde z nezávisí na k. Vzdálenost $|AD_k|$ je tedy nejkratší, právě když k je nejbližší celé číslo k číslu $\frac{2}{5}(n + 2)$. Tato čísla udává v závislosti na zbytku čísla n při dělení pěti tabulka

n	k
$5c$	$2c+1=\dfrac{2n+5}{5}$
$5c+1$	$2c+1=\dfrac{2n+3}{5}$
$5c+2$	$2c+2=\dfrac{2n+6}{5}$
$5c+3$	$2c+2=\dfrac{2n+4}{5}$
$5c+4$	$2c+2=\dfrac{2n+2}{5}$

Hledaná nejkratší spojnice bodů A, B se tedy skládá z nejkratší spojnice bodů A, D_k a ze souměrně sdružené spojnice bodů D_k, B. Přitom D_k je libovolný ze dvou bodů ležících v průniku roviny souměrnosti bodů A, B, povrchu pyramidy a podstavy k-té vrstvy (počítáno zdola, k udává tabulka). Nejkratší spojnici bodů A, D_k na povrchu dané pyramidy snadno sestrojíme.

Poznámky. Nejbližší celé číslo k číslu $\frac{2}{5}(n+2)$ můžeme také vyjádřit jako

$$\left[\frac{2(n+2)}{5}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{4n+13}{10}\right].$$

Nalezený výsledek platí i pro $n=1$.

Nechť n je přirozené číslo vyhovující podmínce úlohy, označme k počet vrcholů příslušného konvexního mnohostěnu. Sečteme-li hrany v každém vrcholu, dostaneme dvojnásobný počet hran, tj.

$$2n = 4 + 3(k - 1) = 3k + 1.$$

Protože $1 = 2.8 - 3.5$, můžeme předchozí neurčitou rovnici upravit na tvar

$$2(n - 8) = 3(k - 5), \qquad (1)$$

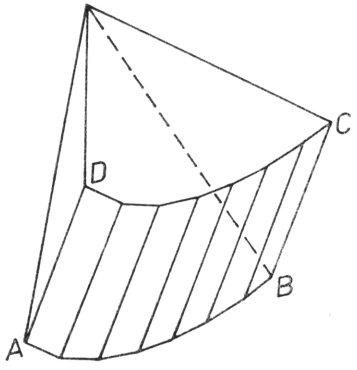
přičemž $k \geqq 5$, neboť čtyřstěn zřejmě nevyhovuje podmínce úlohy. Řešením rovnice (1) jsou všechny dvojice čísel n, k tvaru

$$n = 8 + 3t, \quad k = 5 + 2t, \quad t \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

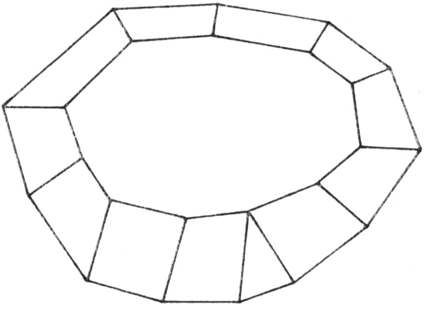
Ukážeme, že pro každé takové n existuje konvexní mnohostěn, který má požadované vlastnosti.

Pro $n = 8$ ($t = 0$) vyhovuje např. čtyřboký jehlan. Předpokládejme, že jsme již sestrojili pro $t \geqq 0$ mnohostěn s $n = 8 + 3t$ hranami, který splňuje podmínky úlohy. Vezměme jeho libovolný vrchol, z kterého vycházejí právě tři hrany, a na každé z nich zvolme jeden vnitřní bod. Uvedené tři body určují rovinu, která rozdělí původní mnohostěn na trojboký jehlan a konvexní mnohostěn s $8 + 3(t + 1)$ hranami, který zřejmě má požadované vlastnosti. Z principu matematické indukce plyne existence konvexního mnohostěnu s danou vlastností pro každé $n = 8 + 3t$, $t \geqq 0$ celé.

Jiný příklad mnohostěnu s $n = 8 + 3t$ hranami, který splňuje podmínku úlohy, je na obr. 27, kde mezi hranami BC



Obr. 27



Obr. 28

a AD je $t \geqq 0$ hran, a na obr. 28, kde $t + 3$ hran spojuje vrcholy $(t + 2)$-úhelníku s vrcholy $(t + 3)$-úhelníku.

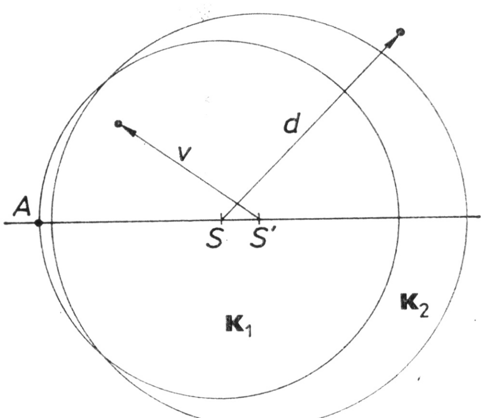
69

Bodem budeme vždy mínit body dané množiny. Ukážeme, že požadovanou vlastnost má kruh, který ze všech kruhů obsahujících body všech tří barev obsahuje nejmenší počet bodů.

Takový kruh existuje (pro každou trojici bodů tří barev sestrojme nejmenší kruh, který je obsahuje, a z nich pak vyberme ten, který obsahuje nejméně bodů). Označme ho K_0. Uvažujme kruh K, který obsahuje body všech tří barev a přitom od dvou barev aspoň po dvou bodech. Sestrojíme kruh, který obsahuje body všech tří barev a obsahuje méně bodů než K; tím bude důkaz hotov.

Snadno sestrojíme kruh K_1, který obsahuje tytéž body jako kruh K, přičemž alespoň dva leží na jeho hranici. (Neleží-li na hranici kruhu K žádný bod, zmenšujme ho, dokud se na hranici nějaký bod neobjeví. Je-li na hranici tohoto kruhu jediný bod, zmenšujme ho dále stejnolehlostí se středem v tomto bodě, dokud se na hranici neobjeví další bod.)

Barva alespoň jednoho z těchto dvou bodů — označme ho A — je zastoupena v kruhu K_1 ještě jednou. Snadno tedy sestrojíme kruh K_2, který obsahuje tytéž body jako kruh K_1 kromě bodu A: Označme d vzdálenost středu kruhu $K_1 = (S; r)$ od nej-



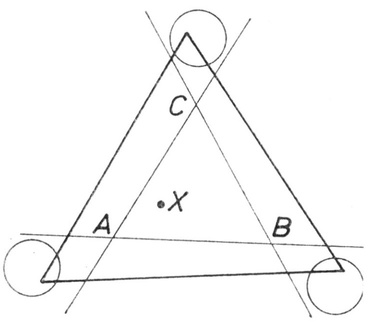
Obr. 29

bližšího z bodů vně kruhu K_1 (obr. 29). Na polopřímce opačné k SA sestrojme bod S' tak, aby $|AS'| = \frac{r + d}{2}$. Dále označme v největší ze vzdáleností bodu S' od bodů v kruhu K_1 různých od A. Zřejmě $v < \frac{r + d}{2}$. Zvolíme-li $r' \in \left(v, \frac{r + d}{2}\right)$, máme zaručeno, že kruh $K_2 = (S'; r')$ obsahuje tytéž body jako kruh K_1 kromě bodu A.

Kruh K_2 tedy obsahuje body všech tří barev a přitom o jeden bod méně než kruh K.

70

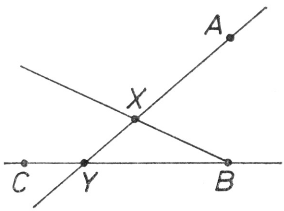
Nechť M je taková množina. Uvažujme libovolný bod X roviny a nějaký rovnostranný trojúhelník ABC, uvnitř kterého leží bod X (obr. 30). Sestrojme uvnitř každého z úhlů vrcholových k úhlům trojúhelníku ABC jednotkový kruh. Pak v každém ze tří sestrojených kruhů leží nějaký bod množiny M. Takové body zřejmě nemohou ležet v přímce a trojúhelník



Obr. 30

jimi určený obsahuje trojúhelník ABC, tedy i bod X. Z konvexity plyne $X \in \mathsf{M}$. Každý bod roviny tedy leží v množině M.

Druhé řešení. Nechť M je taková množina. Protože každý nenulový úhel v rovině obsahuje nějaký kruh o poloměru 1, obsahuje každý nenulový úhel v rovině aspoň jeden bod množiny M. Nechť X je libovolný bod roviny a A libovolný bod množiny M. Můžeme předpokládat, že $X \neq A$. Přímka AX rozdělí rovinu na dvě poloroviny, v jedné z nich vezměme bod $B \in \mathsf{M}$ a dále vezměme bod $C \in \mathsf{M}$ uvnitř úhlu vrcholo-

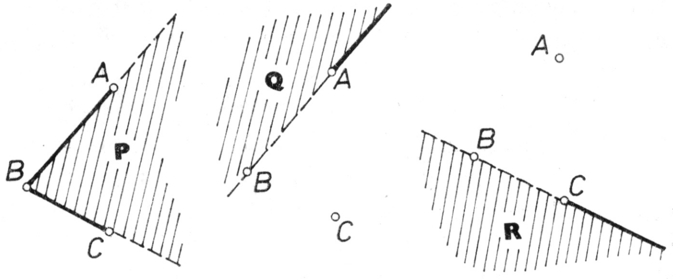


Obr. 31

vého k úhlu AXB (obr. 31). Je-li Y průsečík úsečky BC s přímkou AX, je $Y \in \mathsf{M}$ a přitom X leží uvnitř úsečky YA, takže také $X \in \mathsf{M}$.

71

Neleží-li body A, B, C v přímce, je hledaný počet 3. Množina M je sjednocením tří konvexních množin P, Q, R (obr. 32), kde P je množina všech vnitřních bodů úhlu ABC a všech vnitřních bodů úseček AB, BC; Q je množina všech vnitřních bodů poloroviny opačné k ABC a všech vnitřních bodů polopřímky opačné k AB; R je množina



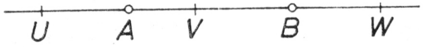
Obr. 32

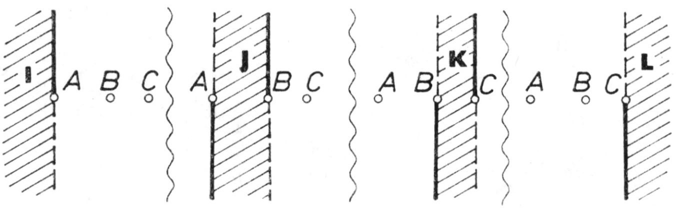
všech vnitřních bodů poloroviny opačné k BCA a všech vnitřních bodů polopřímky opačné k CB.

Zbývá ukázat, že množina M nemůže být sjednocením dvou konvexních množin S, T. Zvolme na přímce AB tři body U, V, W (obr. 33). Pro $\mathsf{M} \subset \mathsf{S} \cup \mathsf{T}$ by jedna z množin S, T obsahovala dva z bodů U, V, W a díky konvexitě i některý z bodů A, B, C, takže $\mathsf{M} \neq \mathsf{S} \cup \mathsf{T}$.

Leží-li body A, B, C v přímce, je hledaný počet 4. Mno

Obr. 33



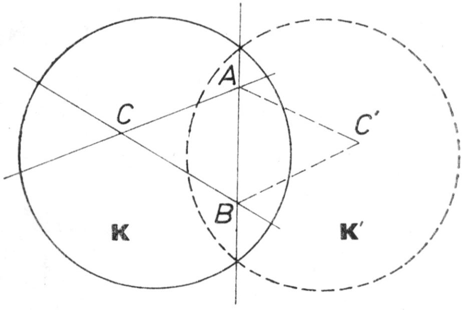


Obr. 34

žina M je sjednocením čtyř konvexních množin I, J, K, L znázorněných na obr. 34. Analogicky jako v prvním případě dokážeme, že množina M nemůže být sjednocením tří konvexních množin.

72

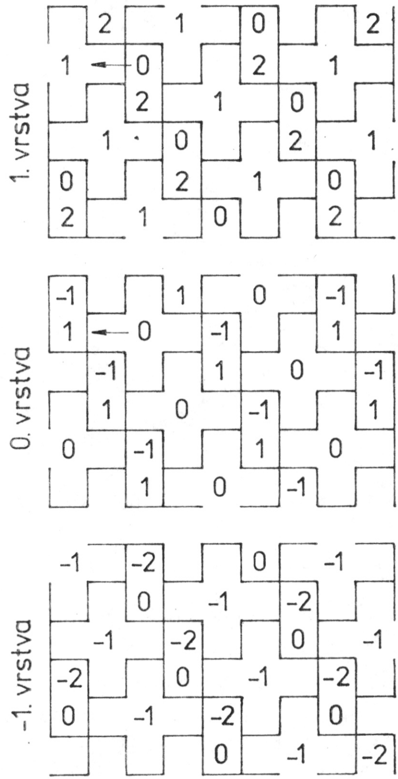
Předpokládejme, že tři tětivy dělí kruh K na sedm částí stejného obsahu (obr. 35). Jejich průsečíky označme A, B, C



Obr. 35

tak, aby při vrcholech A, B trojúhelníku ABC byly ostré úhly. Přímka AB dělí kruh K na dvě části s obsahy $\frac{3}{7}$ a $\frac{4}{7}$. Sestrojme kruh K′ souměrně sdružený s kruhem K podle přímky AB. V této souměrnosti přejde bod C do bodu C'. Kdyby bod C' ležel v kruhu K, byl by trojúhelník ABC' vlastní částí jedné sedminy kruhu (zde využíváme ostrosti úhlů při vrcholech A, B), což není možné. Bod C' leží tedy vně kruhu K, a tak bod C leží vně kruhu K′. Množina K − K′

má tedy obsah větší než $\frac{1}{7}$, a to odporuje skutečnosti, že množina $K \cap K'$ má obsah $\frac{6}{7}$.



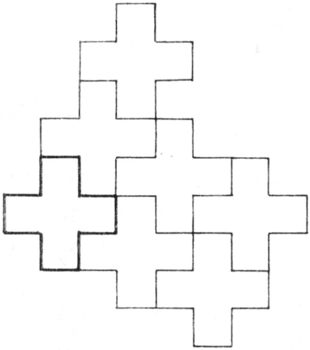
Obr. 36

Uvažujme krychlovou síť v prostoru tvořenou navzájem rovnoběžnými vrstvami krychlí stejné velikosti jako u daných dílů. Zvolme jednu vrstvu, označme ji nulou a všechny ostatní vrstvy očíslujme postupně celými čísly tak, aby nad n-tou vrstvou byla $(n + 1)$-ní vrstva. Rozmístíme-li nyní středové krychle jednotlivých dílů v nulté vrstvě podle obr. 36 na místa označená nulou, zůstanou nevyplněné právě všechny dvojice sousedních krychlí na místech označených -1 a 1. Přitom rozmístěné díly zaplní ještě místa označená 0 v -1. a 1. vrstvě. Rozmístíme-li další díly v 1. vrstvě tak, aby středové krychle jednotlivých dílů byly na místech označených 1, a podobně v -1. vrstvě do míst označených -1, bude nultá vrstva vyplněna beze zbytku. Pokračujeme-li analogicky i v dalších vrstvách (tj. díly se středy v n-té vrstvě posuneme např. o dvě krychle doleva a pak je zvedneme do následující vrstvy), vidíme, že takto vyplníme beze zbytku každou vrstvu, a tedy i celý prostor.

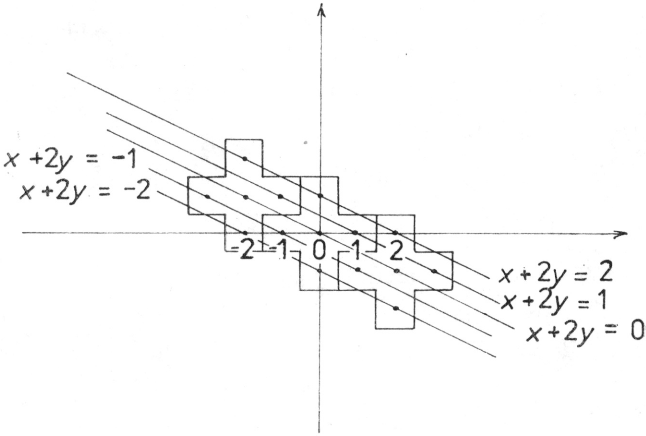
Poznámka. Není těžké zjistit, že po sedmi vrstvách se rozmístění dílů v jednotlivých vrstvách začne periodicky opakovat.

Druhé řešení. Uvažujme nejprve obdobnou úlohu v rovině pro útvary složené z pěti čtverců (obr. 37). Již z názoru je patrno, že těmito útvary lze vyplnit rovinu. Pokusme se přesto o přesný důkaz tohoto tvrzení.

Uvažme kartézskou soustavu souřadnic takovou, že čtverce tvořící jednotlivé díly budou jednotkové a jejich středy budou mřížové body. Stačí si pak uvědomit (obr. 38), že



Obr. 37



Obr. 38

středy jednotlivých dílů budou např. všechny mřížové body ležící na přímce s rovnicí $x + 2y = 0$. Podobně středy ostatních čtverců budou ležet na přímkách $x + 2y = \pm 1$, resp. $x + 2y = \pm 2$. Umístíme-li tedy středy jednotlivých dílů tak, aby jejich souřadnice $[x, y]$ byly celočíselné a ležely na přímkách $x + 2y = 5k$, kde k je celé číslo, budou středy ostatních čtverců ležet na přímkách $x + 2y = 5k \pm 1$, resp. $x + 2y = 5k \pm 2$. Přitom se žádné dva díly nemohou překrývat a každý mřížový bod leží na některé z přímek $x + 2y = m$ pro nějaké m celé.

Právě naznačené řešení teď snadno přeneseme do prostoru: Uvažujme kartézskou soustavu souřadnic v prostoru takovou, že krychle tvořící daný díl budou jednotkové a jejich středy budou mřížové body. Jsou-li $[x_S, y_S, z_S]$ souřadnice středu S daného dílu a $[x, y, z]$ souřadnice středu libovolné z jeho krychlí, platí

$$|x - x_S| + |y - y_S| + |z - z_S| \leqq 1. \tag{1}$$

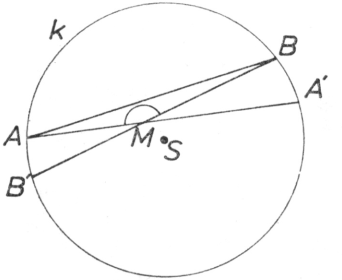
Umístěme nyní středy dílů tak, aby jejich souřadnice $[x, y, z]$ byly celočíselné a číslo $x + 2y + 3z$ bylo dělitelné sedmi. Jsou-li $[x_1, y_1, z_1] \neq [x_2, y_2, z_2]$ souřadnice středů dvou různých dílů, je číslo $(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2)$ dělitelné sedmi, takže musí být, jak snadno zjistíme, $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \geqq 3$; podle (1) se tedy žádné dva díly nepřekrývají. A naopak každý mřížový bod se souřadnicemi $[t, u, v]$ je pokryt některým dílem, jehož střed bude mít souřadnice

$[t, u, v]$, když $t + 2u + 3v \equiv 0 \pmod 7$,
$[t \pm 1, u, v]$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 1 \pmod 7$,

$[t, u \pm 1, v]$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 2 \pmod 7$,
$[t, u, v \pm 1]$, když $t + 2u + 3v \equiv \mp 3 \pmod 7$.

74

Mezi úhlopříčkami daného pravidelného 1982-úhelníku neprocházejícími bodem M najdeme takovou, od níž má bod M nejmenší vzdálenost. Její vrcholy označme A, B a dále označme A', B' průsečíky přímek AM, BM s kružnicí k opsanou danému 1982-úhelníku (obr. 39). Uvnitř kratší-



Obr. 39

ho oblouku BA' neleží žádný vrchol daného mnohoúhelníku, protože jinak by nebyla úhlopříčka AB bodu M nejblíže. Ze stejných důvodů neleží žádný vrchol ani uvnitř kratšího z oblouků AB'.

Je-li S střed kružnice k, platí pro dva sousední vrcholy X, Y daného mnohoúhelníku

$$|\sphericalangle XSY| = \frac{2\pi}{1982},$$

takže

$$|\sphericalangle A'SB| \leqq \frac{2\pi}{1982}, \quad |\sphericalangle ASB'| \leqq \frac{2\pi}{1982}.$$

Pro úhel AMB je tedy

$$|\sphericalangle AMB| = \pi - |\sphericalangle A'AB| - |\sphericalangle ABB'| =$$

$$= \pi - \frac{1}{2}(|\sphericalangle A'SB| + |\sphericalangle ASB'|) \geqq \pi - \frac{2\pi}{1982}.$$

Druhá nerovnost $|\sphericalangle AMB| < \pi$ je patrna z toho, že bod M neleží na úhlopříčce AB.

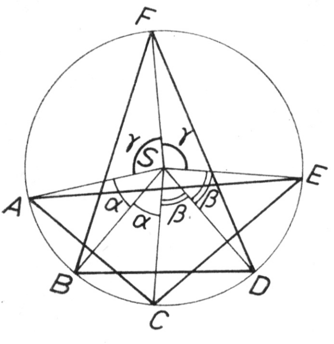
75

Označme (obr. 40) $\alpha = |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC|$, $\beta = |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle DSE|$, $\gamma = |\sphericalangle ESF| = |\sphericalangle FSA|$. Protože

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi,$$

je

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$



Obr. 40

Pro každou polohu bodu S vzhledem k trojúhelníkům ACE, BDF je (považujme poloměr opsané kružnice za jednotkový)

$$S(ACE) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) +$$
$$+ \sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) +$$
$$+ \sin(\gamma + \alpha)\cos(\gamma - \alpha)),$$
$$S(BDF) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)).$$

Dokazovaná nerovnost $S(ACE) \leqq S(BDF)$ je tedy ekvivalentní nerovnosti

$$\sin(\alpha + \beta)(1 - \cos(\alpha - \beta)) +$$
$$+ \sin(\beta + \gamma)(1 - \cos(\beta - \gamma)) +$$
$$+ \sin(\gamma + \alpha)(1 - \cos(\gamma - \alpha)) \geqq 0,$$

jejíž platnost je zřejmá, neboť

$$0 < \alpha + \beta < \pi, \quad 0 < \beta + \gamma < \pi, \quad 0 < \gamma + \alpha < \pi.$$

Rovnost nastane, právě když

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \gamma) = \cos(\gamma - \alpha) = 1,$$

tj. právě když $\alpha = \beta = \gamma$. Rovnost tudíž nastane právě jen pro pravidelný šestiúhelník.

76

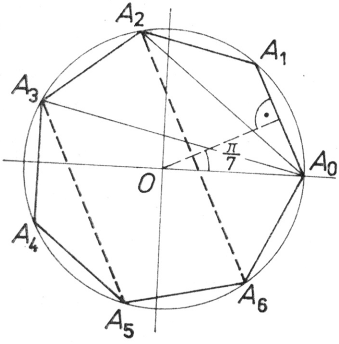
Dokazovaná rovnost je ekvivalentní rovnosti

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A_2|} + \frac{|A_0A_1|}{|A_0A_3|} = 1. \tag{1}$$

V pravidelném sedmiúhelníku zřejmě je (obr. 41)

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A_2|} = \frac{|A_0A_1|}{|A_3A_5|} \quad \text{a} \quad \frac{|A_0A_1|}{|A_0A_3|} = \frac{|A_0A_1|}{|A_2A_6|} \,. \tag{2}$$

Umístíme-li pravidelný sedmiúhelník v komplexní rovině tak, aby jeho střed byl v počátku, vrcholu A_0 příslušelo



Obr. 41

číslo 1 a vrcholu A_1 komplexní jednotka z, budou vrcholům A_k příslušet čísla z^k, $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, přičemž $z^7 = 1$. Protože $A_0A_1 \parallel A_2A_6 \parallel A_3A_5$, plyne z rovností (2)

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A_2|} + \frac{|A_0A_1|}{|A_0A_3|} = \frac{z-1}{z^3-z^5} + \frac{z-1}{z^2-z^6} =$$

$$= (z-1)\frac{z^2-z^6+z^3-z^5}{(z^3-z^5)(z^2-z^6)} =$$

$$= \frac{z^3-z^2-z^7+z^6+z^4-z^3-z^6+z^5}{z^5-z^9-z^7+z^{11}} = 1$$

díky rovnosti $z^7 = 1$. Platí tedy (1) a rovnost je dokázána.

Druhé řešení. Opišme pravidelnému sedmiúhelníku kružnici o poloměru 1 (obr. 41), pak platí

$$|A_0A_1| = 2 \sin \frac{\pi}{7}, \; |A_0A_2| = 2 \sin \frac{2\pi}{7}, \; |A_0A_3| = 2 \sin \frac{3\pi}{7}.$$

Máme tedy dokázat, že platí rovnost

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}, \tag{3}$$

neboli

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} \right).$$

Protože $\sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7}$, dostaneme na pravé straně předchozí rovnosti podle známého vzorce

$$\sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} =$$

$$= \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}.$$

Tím je rovnost (3) dokázána.

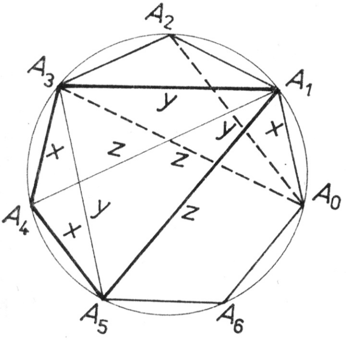
Třetí řešení. Označme $x = |A_0A_1|$, $y = |A_0A_2|$, $z = |A_0A_3|$, ze shodnosti jednotlivých stran a odpovídajících si úhlopříček pravidelného sedmiúhelníku plyne, že stačí dokázat rovnost

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

neboli

$$xz + xy = yz.$$

Ta plyne z Ptolemaiova vzorce pro tětivový čtyřúhelník $A_1A_3A_4A_5$ (obr. 42).



Obr. 42

Poznámka. Jsou-li a, b, c, d velikosti stran tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ a e, f velikosti jeho úhlopříček, platí

$$ac + bd = ef$$

(Ptolemaiův vzorec). K jeho odvození můžeme použít kosinové věty. Z trojúhelníků ABC, ACD máme

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos |\sphericalangle ABC|, \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos |\sphericalangle CDA| = \\ &= c^2 + d^2 + 2cd \cos |\sphericalangle ABC|. \end{aligned}$$

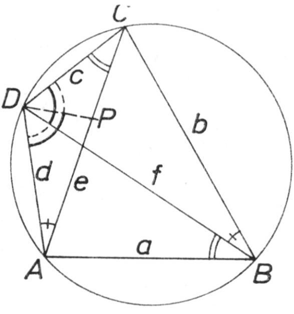
Vyjádříme-li z obou těchto vztahů $\cos |\sphericalangle ABC|$ a porovnáme, dostaneme

$$e^2(ab + cd) = (ad + bc)(ac + bd).$$

Analogicky z trojúhelníků ABD, BCD plyne

$$f^2(ad + bc) = (ab + cd)(ac + bd).$$

Vynásobením posledních dvou rovností dostaneme Ptolemaiův vzorec.



Obr. 43

Jiný důkaz Ptolemaiova vzorce dostaneme využitím podobnosti. Sestrojme bod P na úhlopříčce AC tak, aby $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle BDC|$ (obr. 43). Pak jsou trojúhelníky DAP, DBC a trojúhelníky CDP, BDA podobné, takže

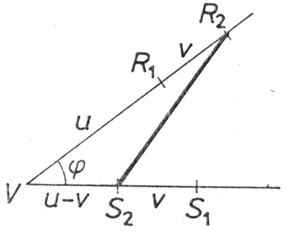
$$\frac{d}{|AP|} = \frac{f}{b}, \ \frac{c}{|CP|} = \frac{f}{a}.$$

Odtud plyne

$$ac + bd = (|AP| + |CP|)f = ef.$$

77

Předpokládejme, že se bod X pohybuje rovnoměrně po hranici trojúhelníku ABC. Potom se bod Y, který spolu s X půlí obvod trojúhelníku, pohybuje také rovnoměrně, a to stejnou rychlostí jako bod X. Pokud žádný z bodů X, Y není ve vrcholu trojúhelníku, jsou oba tyto body na různých stranách trojúhelníku (podle trojúhelníkové nerovnosti), tedy na ramenech úhlu. Uvažujme nyní (obr. 44) konvexní

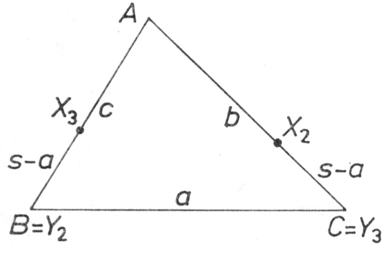


Obr. 44

úhel velikosti φ s vrcholem V, na jednom jeho ramenu body R_1, R_2 a na druhém S_1, S_2 tak, že $|VR_1| = |VS_1| = u$, $|VR_2| = u + v$, $|VS_2| = u - v$ ($u \geqq v \geqq 0$). Podle kosinové věty je

$$|R_2S_2|^2 = 2u^2(1 - \cos \varphi) + 2v^2(1 + \cos \varphi),$$

a tedy $|R_2S_2|$ je největší pro největší možné $v \leqq u$, tj. pro $S_2 = V$. To však pro naši úlohu znamená, že největší vzdá-



Obr. 45

lenost mohou mít body X, Y jen v případě, že jeden z bodů X nebo Y bude ve vrcholu trojúhelníku. Porovnejme proto tyto tři vzdálenosti (obr. 45). Je-li bod Y_2 ve vrcholu B, je bod X_2 na straně AC, a to ve vzdálenosti $s - a$ od bodu C, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ je poloviční obvod trojúhelníku ABC (je totiž $|Y_2C| + |CX_2| = s$). Ze stejného důvodu je pro $Y_3 = C$ bod X_3 ve vzdálenosti $s - a$ od bodu B na straně AB.

Podle kosinové věty je

$$|X_2 Y_2|^2 = a^2 + (s - a)^2 - 2a(s - a) \cos \gamma$$

a

$$|X_3 Y_3|^2 = a^2 + (s - a)^2 - 2a(s - a) \cos \beta.$$

Zvolíme-li označení tak, aby $a \geqq b \geqq c$, je také $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$, tj. $\cos \beta \leqq \cos \gamma$, a proto

$$|X_2 Y_2|^2 \leqq |X_3 Y_3|^2. \tag{1}$$

Porovnáme-li stejným způsobem pro $Y_1 = A$ vzdálenosti $|X_2 Y_2|$ a $|X_1 Y_1|$, dostaneme

$$|X_1 Y_1|^2 \leqq |X_2 Y_2|^2. \tag{2}$$

Přitom v (1) nastane rovnost, právě když $\beta = \gamma$, a v (2) nastane rovnost, právě když $\alpha = \beta$. Proto vzdálenost je vždy největší pro dvojici X_3, Y_3, tj. právě když je jeden z bodů X, Y ve vrcholu proti nejkratší straně.

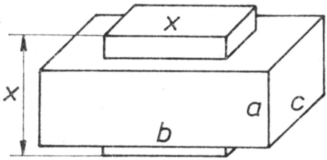
78

Označme x neznámou velikost hrany krychle a $V(x)$ objem rozdílu těles $\mathsf{Q} \cup \mathsf{K}$ a $\mathsf{Q} \cap \mathsf{K}$. Tento rozdíl je složen z bodů, které jsou v Q, ale nejsou v K, a z bodů, které jsou v K, ale nejsou v Q.

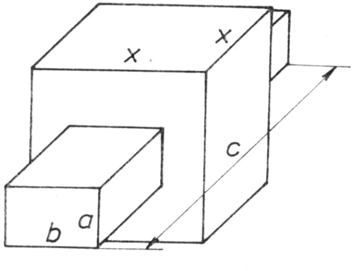
Je-li $x > c$, lze $V(x)$ zmenšit zmenšením x, je-li $x < a$, lze $V(x)$ zmenšit zvětšením x. Stačí se tedy omezit na čísla $x \in \langle a, c \rangle$. Budeme rozlišovat dva případy:

1. $a \leqq x \leqq b$. Pak je (obr. 46) objem $V(x)$ roven součtu objemu $a(bc - x^2)$ vnějšího prstence a objemu $x^2(x - a)$ dvou kvádrů, takže

$$V(x) = x^3 - 2ax^2 + abc.$$



Obr. 46



Obr. 47

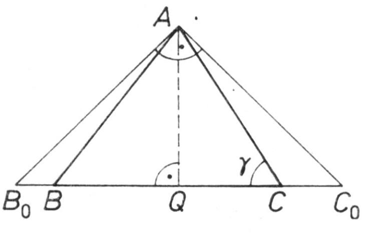
2. $b \leqq x \leqq c$. Pak je (obr. 47) objem $V(x)$ roven součtu objemu $(x^2 - ab)x$ prstence a objemu $ab(c - x)$ dvou kvádrů, takže

$$V(x) = x^3 - 2abx + abc.$$

Protože derivace funkce V v intervalu (b, c) je $V'(x) = 3x^2 - 2ab > 0$, může v intervalu $\langle b, c\rangle$ nastat minimum jen pro $x = b$. V intervalu (a, b) je $V'(x) = 3x^2 - 4ax$. Pokud $\frac{4}{3} a < b$, je $V'(x) < 0$ pro $a < x < \frac{4}{3} a$, $V'(x) > 0$ pro $\frac{4}{3} a < x < b$ a $V'(x) = 0$ pro $x = \frac{4}{3} a$. Pokud $\frac{4}{3} a \geqq b$, je $V'(x) < 0$ pro $a < x < b$. Odtud tedy plyne, že hledaná velikost hrany krychle je $\frac{4}{3} a$, je-li $b > \frac{4}{3} a$, nebo b, je-li $b \leqq \frac{4}{3} a$.

79

Daný trojúhelník T označme ABC tak, aby pro jeho úhly platilo $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$. Předpokládejme nejprve, že $\gamma \geqq 45°$ (obr. 48). Patu výšky na stranu BC označme Q. Potom pra-



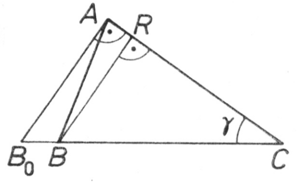
Obr. 48

voúhlý rovnoramenný trojúhelník AB_0C_0 se základnou B_0C_0 na přímce BC obsahuje trojúhelník ABC a má obsah $|AQ|^2$. Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník A_0BC s hlavním vrcholem A_0 v polorovině BCA je obsažen v trojúhelníku

ABC a má obsah $\frac{1}{4}\ |BC|^2$. Protože strana BC je nejdelší ze stran trojúhelníku ABC, leží bod A v průniku kruhů $(B, |BC|)$, $(C, |BC|)$, takže výška AQ není větší než výška rovnostranného trojúhelníku se stranou BC, tj. $|AQ| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\ |BC|$. Z jednotkového obsahu trojúhelníku ABC máme $|BC| . |AQ| = 2$, takže

$$|AQ|^2 \leqq \sqrt{3},\ |BC|^2 \geqq \frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

Zbývá případ $\gamma < 45°$ (obr. 49). Potom pravoúhlý trojúhelník AB_0C s pravým úhlem při vrcholu A a s vrcholem B_0



Obr. 49

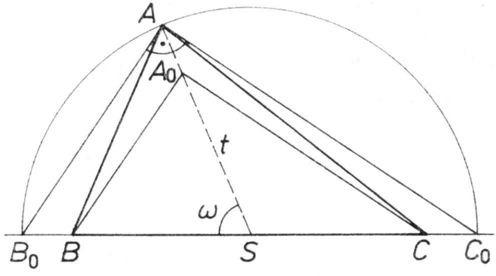
na přímce BC obsahuje trojúhelník ABC a pro jeho obsah S platí

$$S = \frac{|B_0C|}{|BC|} \leqq \frac{|B_0C|}{|AC|} = \frac{1}{\cos\gamma} < \sqrt{2} < \sqrt{3}\,.$$

Pravoúhlý trojúhelník BCR, kde R je pata výšky trojúhelníku ABC na stranu AC, je obsažen v trojúhelníku ABC a pro jeho obsah P platí

$$P = \frac{|RC|}{|AC|} \geqq \frac{|RC|}{|BC|} = \cos\gamma > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Druhé řešení. Daný trojúhelník T označme ABC tak, aby pro velikosti jeho stran platilo $a \geqq b \geqq c$ (obr. 50). Dále označme S střed strany BC, $|AS| = t$, $|\sphericalangle ASB| = \omega$.



Obr. 50

Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, je $2t > a$. Pravoúhlý trojúhelník AB_0C_0 s vrcholy B_0, C_0 na přímce BC, pro něž $|SB_0| = |SC_0| = t$, tedy obsahuje trojúhelník ABC. Trojúhelník ABC má obsah

$$1 = \frac{at}{4}(\sin\omega + \sin(\pi - \omega)) = \frac{at}{2}\sin\omega$$

a trojúhelník AB_0C_0 má obsah

$$P = \frac{t^2}{2}(\sin\omega + \sin(\pi - \omega)) = t^2 \sin\omega.$$

Odtud dostaneme

$$P = \frac{2t}{a}. \qquad (1)$$

Z kosinové věty vypočteme velikost těžnice

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

takže podle (1) je

$$P = \sqrt{2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - 1} \leqq \sqrt{3},$$

neboť $\dfrac{b}{a} \leqq 1$, $\dfrac{c}{a} \leqq 1$.

Pravoúhlý trojúhelník A_0BC, kde $A_0B \parallel AB_0$, $A_0C \parallel AC_0$, je obsažen v trojúhelníku ABC a přitom jsou trojúhelníky A_0BC, AB_0C_0 podobné s koeficientem $\dfrac{2t}{a} = P$. Trojúhelník A_0BC má tedy obsah

$$\frac{1}{P^2} \cdot P = \frac{1}{P} \geqq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

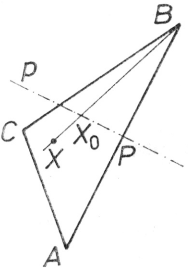
80

Nejprve se budeme zabývat netupoúhlým trojúhelníkem a ukážeme, že $m(X)$ je největší a $M(X)$ nejmenší, právě když X je střed S kružnice opsané.

Dejme tomu, že pro bod $X \neq S$ trojúhelníku ABC je $M(X) \leqq M(S) = r$. Pak je $|AX| \leqq r$, $|BX| \leqq r$, $|CX| \leqq r$ a bod X tedy leží v každém z kruhů (A, r), (B, r), (C, r). Na hranici každého z nich leží bod S, a proto je $|\sphericalangle\, XSA| < \dfrac{\pi}{2}$, $|\sphericalangle\, XSB| < \dfrac{\pi}{2}$, $|\sphericalangle\, XSC| < \dfrac{\pi}{2}$. Tyto tři úhly mají společné rameno XS, takže jejich sjednocení je úhel s vrcholem S menší než π, který obsahuje body A, B, C. To však odporuje tomu, že netupoúhlý trojúhelník obsahuje střed kružnice opsané.

Dejme tomu, že pro bod X trojúhelníku ABC je $m(X) \geqq m(S) = r$. Pak je $|AX| \geqq r$, $|BX| \geqq r$, $|CX| \geqq r$ a bod X neleží uvnitř žádného z kruhů (A, r), (B, r), (C, r). Tuto vlastnost má jediný bod trojúhelníku ABC, a to bod S. Kolmice spuštěné z bodu S na strany spolu s úsečkami SA, SB, SC rozdělí totiž trojúhelník ABC na pravoúhlé trojúhelníky s přeponami SA, SB, SC, přičemž každý z nich leží až na bod S uvnitř některého z uvedených kruhů. Je tedy $X = S$.

Dále uvažujme tupoúhlý trojúhelník ABC s nejdelší stranou AB a označme P její střed a p její osu. Zřejmě $M(P) = |AP| = |BP|$. Zvolme bod X trojúhelníku ABC ležící v polorovině pA, $X \neq P$ (obr. 51), a označme X_0 společný

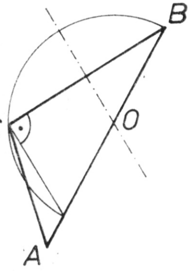


Obr. 51

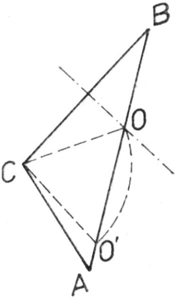
bod úsečky BX s osou p. Pak $|BX| \geqq |BX_0| > |BP|$ pro $X_0 \neq P$, $|BX| > |BX_0| = |BP|$ pro $X_0 = P$, takže $M(X) > M(P)$. Stejně postupujeme pro body poloroviny pB. Vidíme, že $M(X)$ nabývá minima, právě když X je střed nejdelší strany.

Zbývá vyšetřit maximum funkce m v tupoúhlém trojúhelníku ABC. Zvolme označení tak, aby $|AB| \geqq |BC| \geqq |AC|$

a označme O společný bod strany AB s osou strany BC. Z tupoúhlosti trojúhelníku ABC vyplývá (obr. 52), že $|OA| > |OB|$, takže $m(O) = |OB| = |OC|$. Pro všechny body $X \neq O$ trojúhelníku OBC je buď $|BX| < |BO|$, nebo $|CX| < |CO|$, a tedy $m(X) < m(O)$. Na přímce AB sestrojme dále bod $O' \neq O$ tak, aby $|CO| = |CO'|$ (obr. 53). Pro



Obr. 52



Obr. 53

všechny body $X \neq O$, O' trojúhelníku COO' je zřejmě $|CX| < |CO|$, a tedy $m(X) < m(O)$. Leží-li bod O' uvnitř strany AB, je $|AO'| \leqq |O'C|$, neboť předpokládáme $|AC| \leqq \leqq |BC|$. Pro všechny body $X \neq O'$ trojúhelníku $AO'C$ je buď $|AX| < |AO'|$, nebo $|CX| < |CO'|$, tedy $m(X) < m(O')$. Přitom $m(O') \leqq m(O)$ s rovností, právě když $|AO'| = |BO|$, tj. právě když $|AC| = |BC|$. V tupoúhlém trojúhelníku je tedy $m(X)$ největší, právě když X je průsečík nejdelší strany s osou druhé nejdelší strany. (V rovnoramenném tupoúhlém trojúhelníku existují takové body dva.)

Poznámka. Všimněte si, že jsme vlastně našli minimum funkce M v rovině, nejen v trojúhelníku. Maximum funkce m

v rovině neexistuje: ke každému číslu c můžeme najít bod X, pro který je $m(X) > c$.

81

Součin $|AB| . |BC| . |CD| . |DA|$ odhadneme pomocí nerovnosti

$$ab \leqq \frac{(a + b)^2}{4}, \tag{1}$$

přičemž použijeme Ptolemaiův vzorec

$$|AB| . |CD| + |BC| . |AD| = |AC| . |BD|,$$

který platí pro libovolný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ (viz poznámka k řešení úlohy 76). Dostaneme tak

$$4 \leqq |AB| . |BC| . |CD| . |DA| \leqq$$
$$\leqq \frac{(|AB| . |CD| + |BC| . |AD|)^2}{4} = \frac{|AC|^2 . |BD|^2}{4} \leqq 4,$$

neboť AC, BD jsou tětivy kružnice o poloměru 1. Nastává zde tedy rovnost, a proto $|AC| = 2$, $|BD| = 2$. Rovnost bude i v (1), takže $|AB| . |CD| = |BC| . |AD| = 2$. Tětivy AC, BD jsou tedy průměry kružnice, a proto $|AB| = |CD| = \sqrt{2}$, $|BC| = |AD| = \sqrt{2}$, tj. $ABCD$ je čtverec.

Druhé řešení. Využijeme následujícího principu: *Mějme dánu kružnici a na ní tři navzájem různé body X, Y, Z. Pohybuje-li se bod Z' po oblouku XZY, je součin $|XZ'| . |YZ'|$ největší, právě když $|XZ'| = |YZ'|$.* Právě tehdy má totiž trojúhelník XYZ' největší obsah, který je roven $\frac{1}{2} |XZ'|$.

$. |YZ'| \sin |\sphericalangle XZ'Y|$, a obvodový úhel $XZ'Y$ má při pohybu bodu Z' konstantní velikost.

Uvažujme nyní čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice k o poloměru 1. Sestrojme nejprve čtyřúhelník $AB'CD'$ vepsaný do kružnice k tak, aby $|AB'| = |CB'|$, $|AD'| = |CD'|$. Podle zmíněného principu je

$$(|AB| . |BC|)(|CD| . |DA|) \leqq (|AB'| . |B'C|)(|CD'| . |D'A|),$$

a pokud $B' \neq B$ nebo $D' \neq D$, platí ostrá nerovnost. Dále sestrojme čtyřúhelník $A'B'C'D'$ vepsaný do kružnice k tak, aby $|B'A'| = |D'A'|$, $|B'C'| = |D'C'|$. Teď je

$$(|D'A| . |AB'|)(|B'C| . |CD'|) \leqq (|D'A'| . |A'B'|)(|B'C'| . |C'D'|),$$

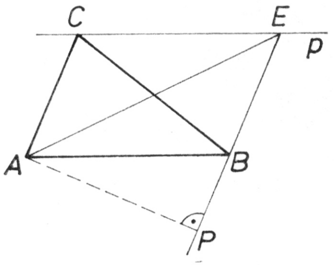
a pokud $A' \neq A$ nebo $C' \neq C$, platí ostrá nerovnost. Zároveň je zřejmé, že $A'B'C'D'$ je čtverec o straně $\sqrt{2}$. Platí tedy pro daný čtyřúhelník $ABCD$

$$|AB| . |BC| . |CD| . |DA| \leqq |A'B'| . |B'C'| . |C'D'| . |D'A'| = 4$$

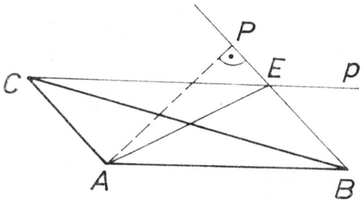
s rovností, právě když $ABCD$ je čtverec. Odtud plyne tvrzení úlohy.

82

Rozbor. Předpokládejme, že trojúhelník ABC je řešením úlohy, a doplňme jej na rovnoběžník $ABEC$. Z bodu A veďme kolmici na přímku BE a její patu označme P. Zřejmě je $|AE| = 2t_a$, $|AP| = v_b$, takže $|AE| : |AP| = 2 : 1$, je tedy $|\sphericalangle AEP| = 30°$. Úhel AEB není pravý, to by bylo $|AP| = |AE|$. Je-li $\sphericalangle AEB$ ostrý (obr. 54), leží bod P na polopřímce EB a $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AEP| = 30°$. Je-li $\sphericalangle AEB$ tupý (obr. 55), leží bod P na polopřímce opačné k polopřímce EB a $|\sphericalangle AEB| = 180° - |\sphericalangle AEP| = 150°$.



Obr. 54

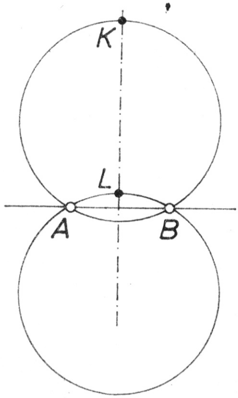


Obr. 55

Konstrukce. Známou konstrukcí sestrojíme množinu M všech bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem 30° nebo 150°. (Jsou to dvě kružnice se společnou tětivou AB s výjimkou bodů A, B.) Je-li E společný bod množiny M a přímky p a S střed úsečky AE, protnou se přímky BS, p v hledaném bodě C.

Zkouška. Označme P patu kolmice vedené z bodu A na přímku BE. Je-li $|\sphericalangle AEB| = 30°$ (obr. 54), je $|\sphericalangle AEP| = |\sphericalangle AEB| = 30°$. Je-li $|\sphericalangle AEB| = 150°$ (obr. 55), je $|\sphericalangle AEP| = 180° - |\sphericalangle AEB| = 30°$. V trojúhelníku AEP je tedy $|AE| : |AP| = 2 : 1$ a v trojúhelníku ABC je $t_a = v_b$.

Diskuse. Body C, E si vzájemně jednoznačně odpovídají, a proto se počet řešení úlohy shoduje s počtem společných bodů množiny M a přímky p. Označme K, L průsečíky osy úsečky AB s množinou M ležící v té polorovině ohraničené přímkou AB, která obsahuje přímku p (obr. 56), a nechť vzdálenost přímek p, AB je $d > 0$ a $|AB| = c > 0$. Vzdálenost bodu K



Obr. 56

od přímky AB je $\frac{c}{2} \operatorname{tg} 75° = \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$, vzdálenost bodu L od přímky AB je $\frac{c}{2} \operatorname{tg} 15° = \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3})$. Pro počet řešení tedy dostáváme, že

pro $d > \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$ úloha nemá řešení,

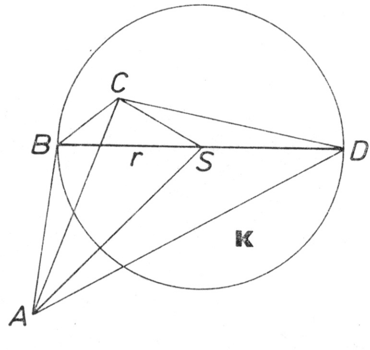
pro $d = \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$ má úloha 1 řešení,

pro $\frac{c}{2}(2 - \sqrt{3}) < d < \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$ má 2 řešení, pro $d = \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3})$ má 3 řešení,

pro $0 < d < \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3})$ má 4 řešení.

83

Uvažujme čtyřúhelník $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy a jehož úhlopříčka BD je průměrem daného kruhu K. Střed kruhu K označme S a jeho poloměr r. Podle



Obr. 57

trojúhelníkové nerovnosti je (obr. 57)

$$|AS| < |AC| + |BS| \leqq 2r + r = 3r.$$

Vrchol A každého takového čtyřúhelníku $ABCD$ tedy leží uvnitř kruhu $(S, 3r)$. Ukážeme, jak ke každému bodu A, pro nějž $|AS| < 3r$, najdeme konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňující požadavky úlohy.

Pro $A = S$ stačí vzít čtverec $ABCD$ o straně $\frac{r}{2}$. Je-li

$A \neq S$, má kruh $(A, 2r)$ s kruhem K společný takový bod P, který je vnitřním bodem obou kruhů a neleží na přímce AS. Označíme-li B, D průsečíky přímky PS s hranicí kruhu K a C bod na polopřímce AP takový, že $|AC| = 2r$, bude čtyřúhelník $ABCD$ splňovat podmínky úlohy.

84

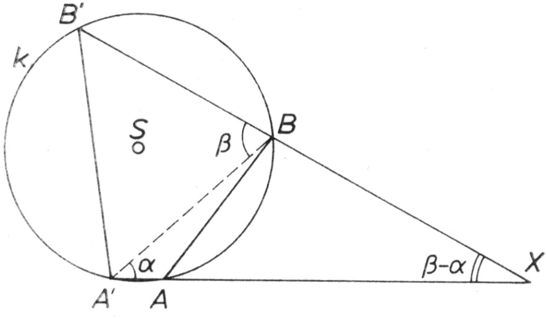
Nechť body A', B' leží na kružnici k, $|A'B'| = v$. Označme 2α velikost dutého úhlu ASB a 2β velikost dutého úhlu $A'SB'$ (β je určeno velikostí v). Je tedy $0 < \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$, $v = 2r \sin \beta$.

Budeme rozlišovat dvě možnosti pro vzájemnou polohu bodů A, B, A', B':

a) tětivy AB, $A'B'$ se neprotínají,

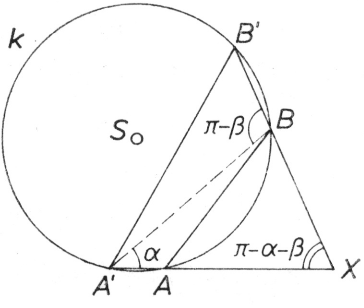
b) tětivy AB, $A'B'$ se protínají ve vnitřním bodě.

V případě a) je čtyřúhelník $ABB'A'$ konvexní, jinak by průsečík přímek AA', BB'(tj. bod X) neležel vně kružnice k.

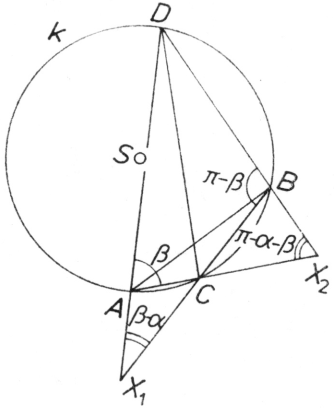


Obr. 58

Protože $v > |AB|$, leží body A', B' v polorovině ABS, je tedy $|\sphericalangle AA'B| = \alpha$. Leží-li střed S ve čtyřúhelníku $ABB'A'$ (obr. 58), je $|\sphericalangle A'BB'| = \beta$, takže $|\sphericalangle AXB| = \beta - \alpha$; neleží-li střed S v čtyřúhelníku $ABB'A'$ (obr. 59), je $|\sphericalangle A'BB'| = \pi - \beta$, takže $|\sphericalangle AXB| = \pi - \alpha - \beta$.



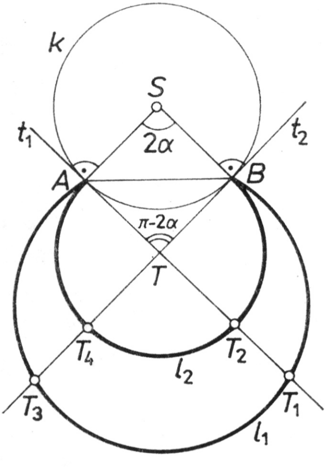
Obr. 59



Obr. 60

V případě b) označme CD tětivu délky v, která protíná AB ve vnitřním bodě. Určíme množinu všech průsečíků X_1 přímek AD, BC a průsečíků X_2 přímek AC, BD (obr. 60), protože každý z nich můžeme dostat jako průsečík přímek AA', BB' podle toho, zda $C = A'$, $D = B'$ nebo $C = B'$, $D = A'$. Protože vzájemná výměna bodů A, B nemá vliv na průsečíky X_1, X_2, můžeme předpokládat, že střed S leží např. v polorovině CDA. Pak bude $|\sphericalangle ADB| = \alpha$, $|\sphericalangle CAD| = \beta$, $|\sphericalangle CBD| = \pi - \beta$, takže $|\sphericalangle AX_1B| = \beta - \alpha$, $|\sphericalangle AX_2B| = \pi - \alpha - \beta$.

Vidíme tedy, že hledané body X leží v obou případech v polorovině opačné k ABS na obloucích l_1 a l_2 (obr. 61), ze kterých je úsečku AB vidět pod úhlem $\beta - \alpha$, resp. pod



Obr. 61

úhlem $\pi - \alpha - \beta$. (Je-li $\beta = \frac{\pi}{2}$, pak ovšem $\beta - \alpha = \pi - \alpha - \beta$.)

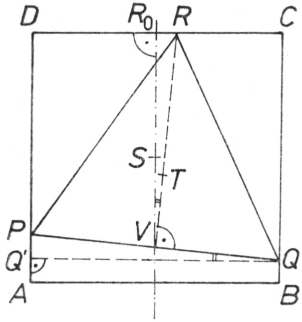
Označme T_1, T_2, T_3, T_4 průsečíky tečen t_1, t_2 kružnice k v bodech A, B s oblouky l_1, l_2 (obr. 61). Ukážeme, že hledanou množinou bodů X je množina

$$\mathsf{M} = l_1 \cup l_2 - \{T_1, T_2, T_3, T_4\}. \tag{1}$$

Leží-li bod X na některém z oblouků l_1, l_2 a přitom neleží na žádné z tečen t_1, t_2, protnou přímky XA, XB kružnici k ještě v dalším bodě A', resp. B'. Je-li T průsečík tečen t_1, t_2, je $|\sphericalangle ATB| = \pi - 2\alpha$, a protože $\pi - 2\alpha > \pi - \alpha - \beta \geqq \beta - \alpha$, leží bod T uvnitř kružnic oblouků l_1, l_2. Oblouky l_1, l_2 jsou tedy body T_1, T_2, T_3, T_4 rozděleny na šest částí. Pro každou z nich dostaneme jednu ze situací znázorněných na obr. 58–60. Protože v každém případě $|\sphericalangle AXB| = \beta - \alpha$ nebo $\pi - \alpha - \beta$, bude $|\sphericalangle A'BB'| = \beta$ nebo $\pi - \beta$, a tedy $|A'B'| = 2r \sin \beta = v$.

85

Uvažujme libovolný rovnostranný trojúhelník PQR s vrcholy na stranách daného čtverce $ABCD$. Protože dva vrcholy trojúhelníku PQR nemohou zřejmě ležet na téže straně daného čtverce, můžeme předpokládat, že je např. $P \in AD$, $Q \in BC$, $R \in CD$. (Pro ostatní možnosti využijeme souměrnosti.) Označme střed daného čtverce S a předpokládejme, že $|AB| = 1$. Hledaná množina M bude souměrná podle osy R_0S strany CD (obr. 62), budeme proto předpokládat, že je $R \in R_0C$. Označme Q' patu kolmice spuštěné z bodu Q



Obr. 62

na stranu AD. Střed V strany PQ zřejmě leží na přímce R_0S a pravoúhlé trojúhelníky $PQ'Q$ a RR_0V jsou podobné. Je tedy

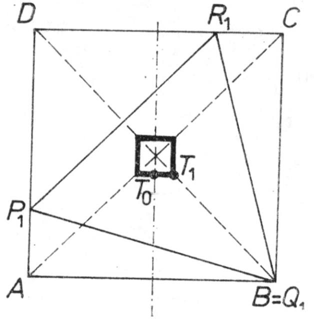
$$\frac{|PQ|}{|Q'Q|} = \frac{|RV|}{|R_0V|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{|PQ|}{|R_0V|},$$

takže

$$|R_0V| = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Odtud plyne, že vzdálenost těžiště T trojúhelníku PQR od strany CD je $\frac{2}{3}|R_0V| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Za uvedených předpokladů vyplní tedy těžiště uvažovaných rovnostranných trojúhelníků úsečku T_0T_1, jejíž vzdálenost od strany CD je $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (obr. 63), přičemž bod T_1 ležící na úhlopříčce BD je těžištěm rovnostranného trojúhelníku $P_1Q_1R_1$, kde $Q_1 = B$ a $P_1R_1 \perp BD$. Vzhledem k souměr-



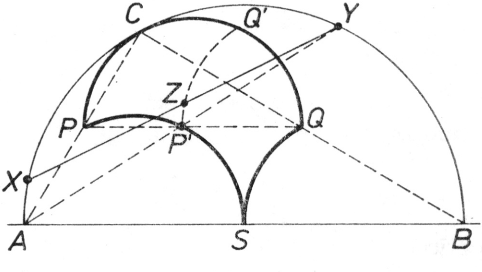
Obr. 63

nosti množiny M a její invarianci vůči pravoúhlému otočení kolem středu čtverce je M obvod čtverce, který dostaneme ze čtverce $ABCD$ stejnolehlostí se středem S a koeficientem

$$k = \frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 3).$$

86

Označme S střed půlkružnice k, P střed úsečky AC, Q střed úsečky BC (obr. 64). Body P, S, Q, C jsou vrcholy



Obr. 64

obdélníku. Je-li $X = A$ a bod Y probíhá oblouk CB, střed Z úsečky XY probíhá oblouk PS kružnice nad průměrem AS. Je-li $Y = B$ a bod X probíhá oblouk AC, střed Z probíhá oblouk SQ kružnice nad průměrem SB. Je-li $X = C$ a bod Y probíhá oblouk CB, střed Z probíhá oblouk CQ kružnice nad průměrem PQ. Je-li $Y = C$ a bod X probíhá oblouk AC, střed Z probíhá oblouk PC kružnice nad průměrem PQ. Tyto čtyři oblouky mají stejný poloměr r a vymezují v rovině oblast, která je hledanou množinou M. Zvolíme-li totiž bod Y na oblouku CB a necháme bod X probíhat oblouk AC, střed Z proběhne oblouk $P'Q'$ stejnolehlý s obloukem AC ve stejnolehlosti se středem Y a koeficientem $\frac{1}{2}$, přičemž P' leží na oblouku PS a Q' na oblouku CQ. Je tedy poloměr oblouku $P'Q'$ roven r, a probíhá-li bod Y oblouk CB, příslušné oblouky $P'Q'$ probíhají právě uvedenou oblast.

Obsah množiny M je zřejmě roven obsahu obdélníku $PSQC$, tj. polovině obsahu trojúhelníku ABC.

87

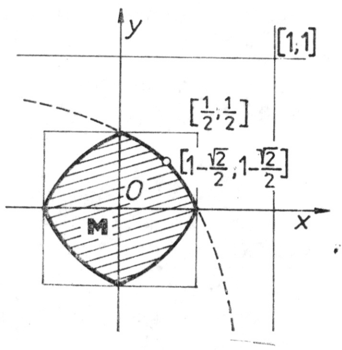
Podmínka je zřejmě ekvivalentní s podmínkou, aby průnik $\mathsf{C} \cap \mathsf{C}_X$ měl obsah alespoň 0,5.

V rovině ϱ zaveďme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby čtverec C měl střed v počátku a strany rovnoběžné s osami souřadnic. Uvažujme čtverec C', který má strany rovnoběžné s osami souřadnic a střed v bodě $[x, y]$ — pro jednoduchost se omezíme na body $[x, y]$ v I. kvadrantu. Pak je $\mathsf{C} \cap \mathsf{C}' \neq \emptyset$, právě když $x \leqq 1$, $y \leqq 1$, a $\mathsf{C} \cap \mathsf{C}'$ je pak obdélník s obsahem $(1 - x)(1 - y)$. V I. kvadrantu je tedy množinou všech středů $[x, y]$ čtverců C', pro něž má C ∩ C' obsah alespoň 0,5, průnik I. kvadrantu s vnitřní oblastí rovnoosé hyperboly

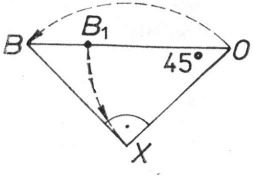
$$(1 - x)(1 - y) = 0,5$$

$\left(\text{má střed } [1, 1], \text{ asymptoty } x = 1, y = 1 \text{ a vrchol } \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)$. V ostatních kvadrantech dostaneme body množiny M všech středů takovýchto čtverců na základě souměrnosti podle souřadnicových os (obr. 65).

Naším úkolem tedy je najít množinu všech středů X otočení o 90° zobrazujících počátek O do bodů právě popsané množiny M. K tomu si stačí uvědomit (obr. 66), že zobra-

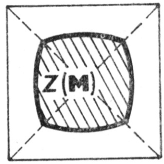


Obr. 65



Obr. 66

zí-li otočení o 90° kolem středu X bod O na bod B, pak zobrazení Z složené ze stejnolehlosti se středem O a koeficientem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a z otočení kolem bodu O o 45° zobrazí bod B do bodu X. Hledaná množina je tedy obrazem množiny M v zobrazení Z (obr. 67).

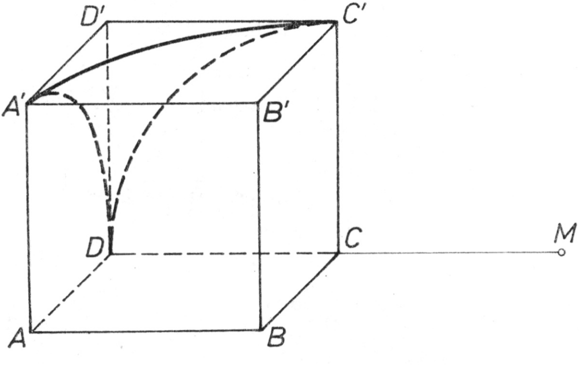


Obr. 67

88

Mějme v prostoru čtyři navzájem různé body P, Q, P', Q' tak, že $|PQ| = |P'Q'|$. Nejsou-li úsečky PQ, $P'Q'$ souhlasně rovnoběžné, existuje jediné otočení kolem osy, které zobrazí P na P' a Q na Q' (osou tohoto otočení je průsečnice rovin souměrnosti úseček PP', QQ'). Jsou-li úsečky PQ, $P'Q'$ souhlasně rovnoběžné, pak v případě $P'P \perp PQ$ existuje nekonečně mnoho takových otočení (podle libovolné osy rovnoběžné s PQ a ležící v rovině souměrnosti PP'), jinak žádné takové otočení neexistuje.

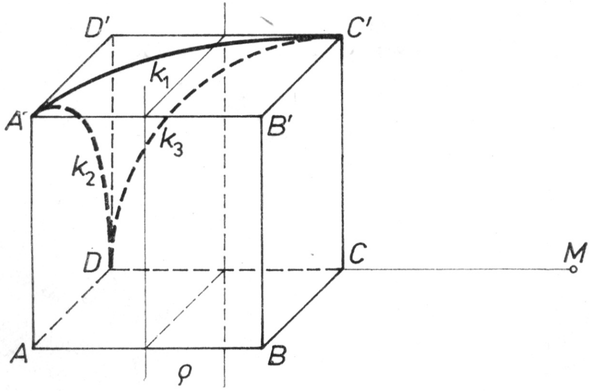
Zobrazí-li otočení bod A na bod B a bod C na bod X, bude $|AC| = |BX|$, takže bod X bude ležet na kulové ploše $(B, |AC|)$. Obráceně, je-li X bod této kulové plochy, $X \neq M$, kde $ABMC$ je rovnoběžník, existuje otočení kolem osy, které zobrazí A na B a C na X. Pro $X = M$ žádné takové otočení neexistuje. Množinou všech obrazů bodu C v otočeních kolem osy, která zobrazují A na B, je tedy $(B, |AC|) - \{M\}$. Hledanou množinou je pak její průnik s povrchem dané krychle, což je sjednocení tří čtvrtkružnic s poloměrem $|AB|$ a se středy A, B', C (obr. 68).



Obr. 68

Druhé řešení. Využijeme toho, že každé otočení kolem osy v prostoru dostaneme jako složení dvou souměrností podle rovin protínajících se v uvedené ose. Osa každého otočení, které zobrazí bod A na bod B, leží v rovině souměrnosti ϱ úsečky AB (obr. 69). Každé takové otočení tedy dostaneme složením souměrnosti R podle roviny ϱ a souměrnosti S podle určité roviny σ různoběžné s ϱ a obsahující bod B.

Souměrnost R zobrazí bod C na bod D. Pro každou rovinu $\sigma \neq BCB'$ obsahující bod B pata kolmice spuštěné z bodu D na rovinu σ leží na kulové ploše $\varkappa$ sestrojené nad průměrem BD (podle Thaletovy věty). Dostaneme tak všechny body kulové plochy $\varkappa$ kromě bodu C, který odpovídá rovině BCB'.

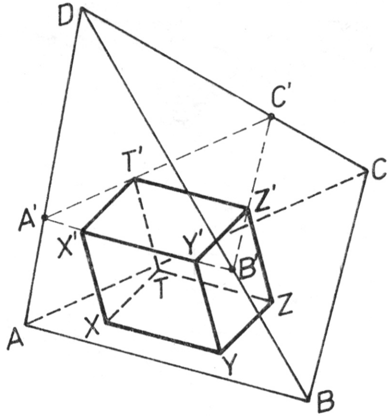


Obr. 69

Obraz bodu D v souměrnosti S podle uvažované roviny σ pak bude ležet na kulové ploše $\varkappa'$, která je obrazem kulové plochy $\varkappa$ ve stejnolehlosti se středem D a koeficientem 2. Obrazy bodu C ve všech uvažovaných otočeních tedy vyplní kulovou plochu $\varkappa' = (B, |BD|)$ vyjma bodu M souměrně sdruženého s bodem D podle středu C. Kulová plocha $\varkappa'$ protne povrch dané krychle ve třech čtvrtkružnicích k_1, k_2, k_3 (obr. 69) se středy B', A, C a poloměrem $|AB|$. Hledanou množinou je tedy $k_1 \cup k_2 \cup k_3$.

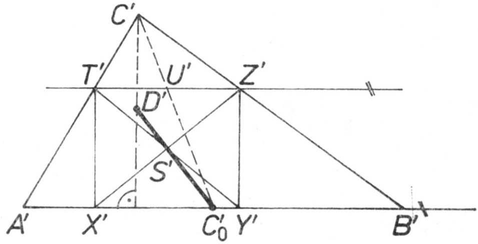
89

Nechť $XYZTX'Y'Z'T'$ je kvádr požadovaných vlastností. Rovina $X'Y'Z'$ horní podstavy kvádru rovnoběžná s rovinou ABC protne čtyřstěn $ABCD$ v trojúhelníku $A'B'C'$ (obr. 70). Přitom je $X'Y' \subset A'B'$, $Z' \in B'C'$, $T' \in C'A'$. Naopak každý



Obr. 70

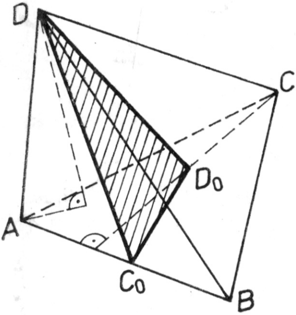
takový kvádr $XYZTX'Y'Z'T'$ dostaneme tak, že libovolným vnitřním bodem A' hrany AD vedeme rovinu $\sigma \parallel ABC$, která protne čtyřstěn $ABCD$ v trojúhelníku $A'B'C'$, a v rovině σ vedeme libovolnou přímku $v \parallel A'B'$ tak, aby protla strany $B'C'$ a $C'A'$ ve vnitřních bodech Z', resp. T'. Na straně $A'B'$ pak určíme body X', Y' tak, aby $X'Y'Z'T'$ byl obdélník. Zřejmě každému takovému obdélníku odpovídá právě jeden kvádr $XYZTX'Y'Z'T'$ splňující podmínky úlohy.



Obr. 71

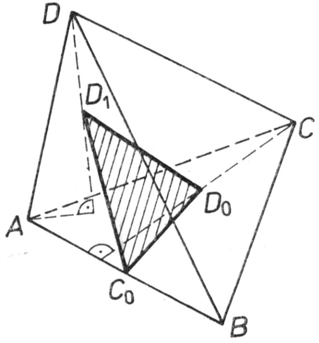
Označme U' střed strany $Z'T'$ (obr. 71). Střed S' obdélníku $X'Y'Z'T'$ půlí kolmici z bodu U' na stranu $A'B'$, dostaneme ho tedy z bodu U' afinním zobrazením s osou $A'B'$ a koeficientem $\frac{1}{2}$. Množinou všech bodů U' je zřejmě vnitřek těžnice $C'C_0'$ v trojúhelníku $A'B'C'$, takže množinou středů všech obdélníků $X'Y'Z'T'$ v rovině $A'B'C'$ je její obraz v uvedeném afinním zobrazení, tj. vnitřek úsečky $D'C_0'$, kde D' je střed výšky trojúhelníku $A'B'C'$ z vrcholu C'.

Množinou středů S' horních podstav všech kvádrů $XYZTX'Y'Z'T'$ požadovaných vlastností pak bude vnitřek trojúhelníku C_0D_0D (obr. 72), kde C_0 je střed strany AB a D_0 střed výšky trojúhelníku ABC z vrcholu C. Průsečík S tělesových úhlopříček příslušného kvádru a střed S' jeho horní podstavy si vzájemně jednoznačně odpovídají (S půlí kolmici z bodu S' na podstavu ABC). Hledanou množinou průsečíků tělesových úhlopříček všech uvažovaných kvádrů je tedy obraz trojúhelníku C_0D_0D v afinním zobrazení s rovinou afinity



Obr. 72

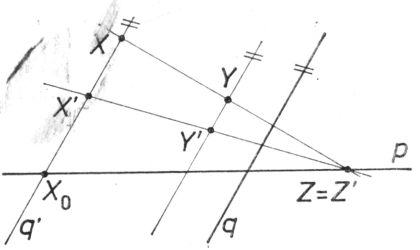
ABC a koeficientem $\frac{1}{2}$, tj. vnitřek trojúhelníku $C_0D_0D_1$ (obr. 73), kde D_1 je střed výšky čtyřstěnu $ABCD$ z vrcholu D.



Obr. 73

Poznámka. Afinním zobrazením obecně rozumíme každé zobrazení roviny (prostoru), ve kterém je obrazem přímky (roviny) přímka (rovina). Kromě shodných a podobných zobrazení má tuto vlastnost i následující zobrazení.

V rovině uvažujme dvě různoběžné přímky p, q a reálné číslo k. Bodem X roviny veďme přímku $q' \parallel q$ a její průsečík

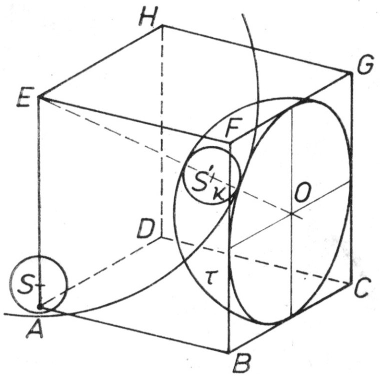


Obr. 74

s osou p označme X_0. Bodu X přiřadíme bod $X' \in q'$ ležící v téže polorovině, pokud $k > 0$, nebo v polorovině opačné, pokud $k < 0$, a takový, že $|X_0X'| = k|X_0X|$. Jsou-li X', Y' obrazy bodů X, Y v uvedeném afinním zobrazení, protínají se přímky XY, $X'Y'$ na ose p (obr. 74), anebo je $XY \parallel X'Y' \parallel \parallel p$. Analogicky definujeme v prostoru afinní zobrazení určené rovinou ϱ, směrem přímky q různoběžné s ϱ a koeficientem k.

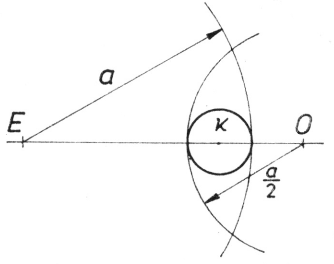
90

Každá koule κ souměrně sdružená podle roviny procházející bodem E s koulí, která má střed S na hraně AE a poloměr $|SA|$, se zřejmě zevnitř dotýká koule $(E, |EA|)$ (obr. 75). Je-li κ obsažena také v kouli τ, je průměr koule κ nejvýše $a + \frac{a}{2} - - |EO|$ (obr. 76) a v tomto případě střed S' koule κ leží na přímce EO. Úloze vyhovuje jediný bod $S \in AE$, $|AS| =$



Obr. 75

$= \frac{3a}{4} - \frac{|EO|}{2} = \frac{a}{4}(3 - \sqrt{6})$, a jediná rovina σ, která je rovinou souměrnosti polopřímek EA, EO.



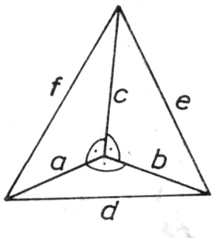
Obr. 76

91

Nejprve předpokládejme, že některé tři stěny mají pravé úhly při společném vrcholu (obr. 77). Pro délky hran takového čtyřstěnu pak platí

$$e^2 + f^2 = b^2 + c^2 + a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 = d^2 + 2c^2 > d^2,$$

takže hrany e, f svírají ostrý úhel. Analogicky zjistíme, že



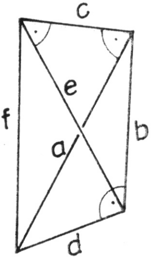
Obr. 77

i hrany d, e a d, f svírají ostré úhly. V čtyřstěnech tohoto typu je tedy čtvrtá stěna ostroúhlý trojúhelník.

Dále předpokládejme, že některé tři stěny mají pravé úhly při třech různých vrcholech (obr. 78). Pro délky jeho hran pak platí

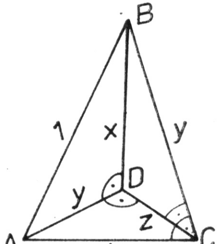
$$e^2 + d^2 = b^2 - c^2 + a^2 - b^2 = a^2 - c^2 < a^2 + c^2 = f^2.$$

Čtvrtá stěna je tedy tupoúhlý trojúhelník.



Obr. 78

Zjistili jsme, že podmínkám úlohy mohou vyhovovat jen ty čtyřstěny, v jejichž dvou vrcholech svírají hrany po dvou pravých úhlech. Předpokládejme, že takový čtyřstěn $ABCD$



Obr. 79

vyhovuje daným podmínkám, nechť pravé úhly jsou při vrcholech C, D (obr. 79), pak je $|AB| = 1$. Označme $|AC| = x$, $|BC| = y$. Trojúhelníky ABC, ABD (nebo BAD) jsou podobné a mají společnou přeponu, jsou tedy shodné. Protože $|BD| > |BC|$, je $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, $|AD| = y$, $|BD| = x$. Označíme-li velikost zbývající hrany $z = |CD|$, bude $1 > x > y > z$. Trojúhelníky ABD a ADC mají totiž přepony $|AB| = 1 > |AC| = x$ a odvěsny x, y, resp. y, z. Z toho plyne, že je buď

$$1 : x : y = x : y : z, \tag{1}$$

nebo

$$1 : x : y = x : z : y.$$

Druhý případ však zřejmě nemůže nastat. Z poměru (1) máme $y = x^2$, $z = x^3$. Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 + y^2 = x^2 + x^4 = 1$$

a odtud

$$x^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \; y^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \; z^2 = \sqrt{5} - 2.$$

Úloze vyhovuje jediný čtyřstěn $ABCD$ s hranami $|AB| = 1$, $|AC| = |BD| = x$, $|AD| = |BC| = y$, $|CD| = z$.

92

Těžnice čtyřstěnu je spojnice vrcholu s těžištěm protilehlé stěny; víme, že těžiště čtyřstěnu dělí těžnici v poměru 3 : 1.

Nechť T_1, T_2, T_3, T_4 jsou těžiště stěn BCD, ACD, ABD, ABC. Každý bod G_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dělí příslušnou úsečku KT_i v poměru 3 : 1, je tedy čtyřstěn $G_1G_2G_3G_4$ stejnolehlý s čtyřstěnem $T_1T_2T_3T_4$ podle středu K s koeficientem stejnolehlosti $\frac{3}{4}$. Protože koeficient stejnolehlosti na volbě bodu K nezávisí a protože stejnolehlost s koeficientem k mění objem tělesa $|k|^3$-krát, je tvrzení dokázáno. Navíc je zřejmě čtyřstěn $T_1T_2T_3T_4$ stejnolehlý s čtyřstěnem $ABCD$ s koeficientem $-\frac{1}{3}$ a středem v těžišti čtyřstěnu $ABCD$. Objem čtyřstěnu $G_1G_2G_3G_4$ je tedy $\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ objemu čtyřstěnu $ABCD$.

Druhé řešení. Umístěme čtyřstěn $ABCD$ do kartézské soustavy souřadnic. Označme $\mathbf{g}_i$ vektor $\mathbf{OG}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a položme $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$, $\mathbf{b} = \mathbf{OB}$, $\mathbf{c} = \mathbf{OC}$, $\mathbf{d} = \mathbf{OD}$, $\mathbf{k} = \mathbf{OK}$. Pak platí

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4},$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}}{4}, \quad \mathbf{g}_4 = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4}.$$

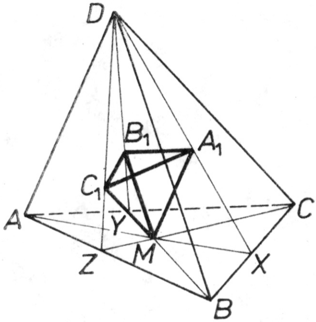
Čtyřstěn $G_1G_2G_3G_4$ má hrany $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \frac{1}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{4}\mathbf{AB}$, $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_3 = \frac{1}{4}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \frac{1}{4}\mathbf{AC}$, $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = \frac{1}{4}\mathbf{AD}$, $\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3 = \frac{1}{4}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{1}{4}\mathbf{BC}$, $\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{d} - \mathbf{b}) = \frac{1}{4}\mathbf{BD}$, $\mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \frac{1}{4}\mathbf{CD}$.

Velikosti hran čtyřstěnu $G_1G_2G_3G_4$ tedy nezávisí na volbě bodu K a jeho objem bude $\frac{1}{64}$ objemu daného čtyřstěnu.

93

a) Průsečík přímky AM s hranou BC označme X (obr. 80), čtyřstěny $MBCD$ a $ABCD$ mají stejnou podstavu BCD, pro jejich objemy proto platí

$$\frac{V(MBCD)}{V(ABCD)} = \frac{|MX|}{|AX|} = \frac{|MA_1|}{|AD|},$$



Obr. 80

protože trojúhelníky MA_1X a ADX jsou podobné. Podobně je

$$\frac{V(MABD)}{V(ABCD)} = \frac{|MC_1|}{|CD|}, \quad \frac{V(MACD)}{V(ABCD)} = \frac{|MB_1|}{|BD|},$$

takže

$$\frac{|MA_1|}{|AD|} + \frac{|MB_1|}{|BD|} + \frac{|MC_1|}{|CD|} =$$

$$= \frac{V(MBCD) + V(MACD) + V(MABD)}{V(ABCD)} = 1. \qquad (1)$$

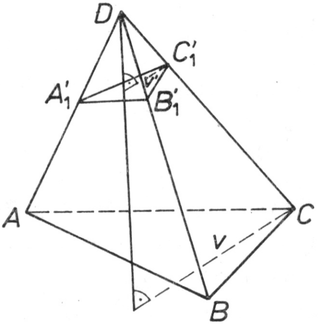
b) Využijeme rovností

$$|\sphericalangle A_1MC_1| = |\sphericalangle ADC|, |\sphericalangle A_1MB_1| = |\sphericalangle ADB|,$$
$$|\sphericalangle B_1MC_1| = |\sphericalangle BDC|$$

a sestrojíme čtyřstěn $DA_1'B_1'C_1'$ shodný s čtyřstěnem $A_1B_1C_1M$ (obr. 81). Jeho objem je

$$V(DA_1'B_1'C_1') = \frac{1}{6}|DA_1'|.|DB_1'| \sin |\sphericalangle A_1'DB_1'| . v' =$$

$$= \frac{1}{6}|MA_1|.|MB_1| \sin |\sphericalangle ADB|.|MC_1| \frac{v}{|DC|},$$



Obr. 81

zatímco

$$V(ABCD) = \frac{1}{6} |DA| . |DB| \sin |\sphericalangle ADB| . v .$$

Je tedy

$$\frac{V(A_1B_1C_1M)}{V(ABCD)} = \frac{|MA_1| . |MB_1| . |MC_1|}{|DA| . |DB| . |DC|} . \tag{2}$$

c) Objem čtyřstěnu $A_1B_1C_1M$ bude největší, bude-li největší podíl (2). Z rovnosti (1) a z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem plyne

$$\frac{|MA_1| \, |MB_1| \, |MC_1|}{|DA| \, |DB| \, |DC|} \leqq \frac{1}{27} ,$$

přičemž rovnost nastane, právě když

$$\frac{|MA_1|}{|DA|} = \frac{|MB_1|}{|DB|} = \frac{|MC_1|}{|DC|} = \frac{1}{3} . \tag{3}$$

Protože trojúhelníky ADX a MA_1X, BDY a MB_1Y, CDZ a MC_1Z jsou podobné (obr. 80), jsou rovnosti (3) ekvivalentní rovnostem

$$\frac{|MX|}{|AX|} = \frac{|MY|}{|BY|} = \frac{|MZ|}{|CZ|} = \frac{1}{3} ,$$

a ty jsou splněny, právě když bod M je těžiště trojúhelníku ABC.

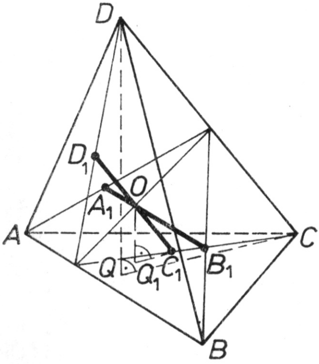
94

Veďme bodem O příčky $A_1B_1 \parallel AB$ a $C_1D_1 \parallel CD$ (obr. 82) a nechť DQ je výška čtyřstěnu $ABCD$ a OQ_1 výška čtyřstěnu $OBCD$. Pro objemy čtyřstěnů zřejmě platí

$$\frac{V(OABC)}{V(ABCD)} = \frac{|OQ_1|}{|DQ|} = \frac{|OC_1|}{|CD|}, \tag{1}$$

neboť trojúhelníky OC_1Q_1 a DCQ jsou podobné. Podobně je

$$\frac{V(OABD)}{V(ABCD)} = \frac{|OD_1|}{|CD|}. \tag{2}$$



Obr. 82

Výměnou vrcholů $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$ ve vztazích (1) a (2) dostaneme

$$\frac{V(OACD)}{V(ABCD)} = \frac{|OA_1|}{|AB|}, \ \frac{V(OBCD)}{V(ABCD)} = \frac{|OB_1|}{|AB|},$$

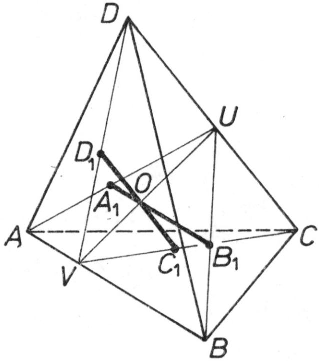
takže dohromady máme

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} + \frac{|C_1D_1|}{|CD|} =$$

$$= \frac{V(OABC) + V(OABD) + V(OACD) + V(OBCD)}{V(ABCD)} = 1.$$

Stejný výsledek dostaneme i pro další dvě dvojice BC, AD a AC, BD mimoběžných hran čtyřstěnu $ABCD$. Je tedy skutečně uvedený součet roven 3.

Druhé řešení. Veďme bodem O příčky $A_1B_1 \parallel AB$ a $C_1D_1 \parallel CD$ (obr. 83). Označme U průsečík přímek AA_1



Obr. 83

a BB_1 ($U \in CD$) a V nechť je průsečík přímek CC_1 a DD_1 ($V \in AB$). Body U, O, V leží v přímce, která je průsečnicí rovin ABO a CDO. Přitom body A_1, B_1, C_1, D_1 a O leží v rovině, která je rovnoběžná s oběma mimoběžkami AB, CD. Z podobnosti trojúhelníků ABU, A_1B_1U a z podobnosti trojúhelníků CDV, C_1D_1V plyne

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|OU|}{|UV|}, \quad \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{|OV|}{|UV|}.$$

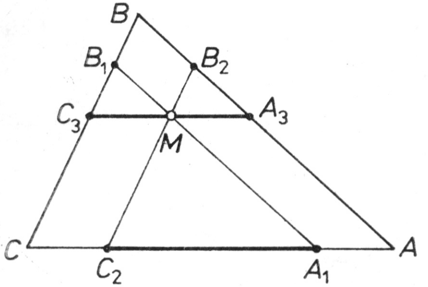
Je tedy

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} + \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{|OU| + |OV|}{|UV|} = 1.$$

Stejný výsledek dostaneme i pro další dvě dvojice mimoběžných hran BC, AD a AC, BD. Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. Projdeme-li obě předchozí řešení, zjistíme, že tvrzení úlohy platí i pro bod O na povrchu čtyřstěnu. Využijeme-li výsledku a) úlohy 93, dostaneme analogické tvrzení v rovině:

Je-li M bod trojúhelníku ABC a vedeme-li jím tři příčky rovnoběžné se stranami trojúhelníku, pak součet poměrů délek těchto příček a délek s nimi rovnoběžných stran je 2.



Obr. 84

Dokažme ještě uvedené tvrzení přímo. Označme příčky vedené bodem M podle obr. 84. Pak

$$2\left(\frac{|A_1B_1|}{|AB|} + \frac{|B_2C_2|}{|BC|} + \frac{|C_3A_3|}{|CA|}\right) =$$

$$= \frac{|A_1C|}{|AC|} + \frac{|B_1C|}{|BC|} + \frac{|B_2A|}{|AB|} + \frac{|C_2A|}{|AC|} + \frac{|C_3B|}{|BC|} + \frac{|A_3B|}{|AB|} =$$

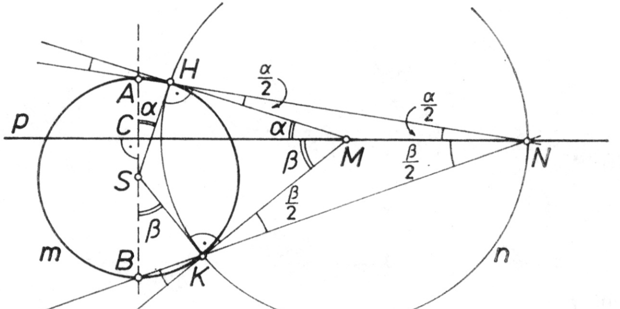
$$= 3 + \frac{|A_1C_2|}{|AC|} + \frac{|B_1C_3|}{|BC|} + \frac{|A_3B_2|}{|AB|} =$$

$$= 3 + \frac{|A_1C_2|}{|AC|} + \frac{|MC_3|}{|AC|} + \frac{|MA_3|}{|AC|} = 4.$$

Pro bod M na hranici trojúhelníku ABC je důkaz ještě jednodušší.

95

Označme α velikost úhlu CMH a β velikost úhlu CMK. Sestrojíme-li kružnici n se středem M a poloměrem $|MH| = |MK|$ (obr. 85) a označíme-li N průsečík kružnice n s polo-



Obr. 85

přímkou opačnou k MC, bude zřejmě podle věty o obvodových úhlech

$$|\sphericalangle MNH| = \frac{\alpha}{2}, |\sphericalangle MNK| = \frac{\beta}{2}.$$

Označme A a B druhé průsečíky přímek NH a NK s kružnicí m. Trojúhelníky HNM, AHS a podobně i trojúhelníky KNM, BKS jsou rovnoramenné, platí tedy

$$|\sphericalangle\, ASH| = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha,$$

$$|\sphericalangle\, BSK| = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \beta.$$

Protože čtyřúhelník $SKMH$ je tětivový a zřejmě $|\sphericalangle\, HSK| = \pi - (\alpha + \beta)$, plyne odtud $|\sphericalangle\, ASB| = \pi$. AB je tedy průměrem kružnice m.

Je-li nyní $d = 0$, je $S = C$, a protože $\alpha = \beta$, je

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}} = 1$$

bez ohledu na polohu bodu M. Navíc je $p \perp AB$. Je-li $0 < d < r$, pak z tětivového čtyřúhelníku $SCHM$ vidíme, že $|\sphericalangle\, CSH| = \alpha = |\sphericalangle\, ASH|$, takže je rovněž $p \perp AB$. Odtud plyne, že je

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}} = \frac{r - d}{r + d}\,.$$

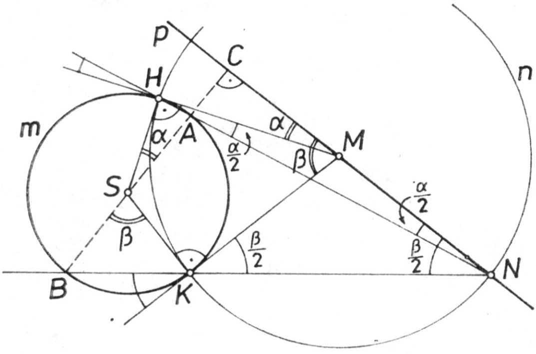
Pro $d = r$ je $H = C$, $\alpha = 0$,

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}} = 0.$$

Pro $d > r$ je situace obdobná (obr. 86). Opět je $|\sphericalangle ASH| = \alpha$, $|\sphericalangle HSK| = \pi - (\beta - \alpha)$, takže $|\sphericalangle ASB| = \pi$, a podobně dostaneme i vztah $p \perp AB$. Pro uvažovaný podíl pak platí

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}} = \frac{d - r}{d + r}.$$

Pro libovolné $d \geqq 0$ je uvažovaný podíl roven $\dfrac{|d - r|}{d + r}$.

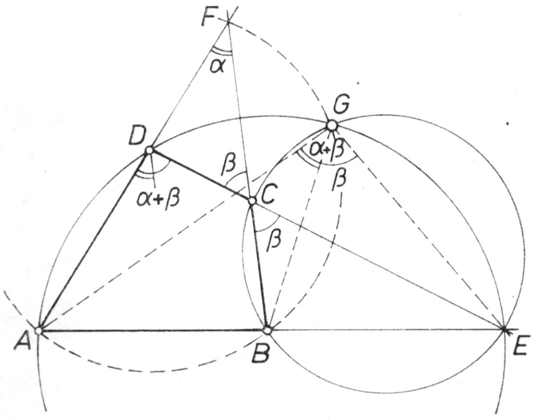


Obr. 86

96

Označení vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$ můžeme bez újmy na obecnosti zvolit tak, aby bod E ležel na polopřímce AB a bod F na polopřímce AD.

a) Označme G druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ADE, BCE (obr. 87). (Za uvedených předpokladů bude bod G vždy ležet uvnitř úhlu ECF.) Abychom dokázali, že bod G leží na kružnici ABF, stačí ukázat, že $|\sphericalangle AGB| = |\sphericalangle AFB|$. Označme $|\sphericalangle AFB| = \alpha$, $|\sphericalangle DCF| = \beta$. Pro

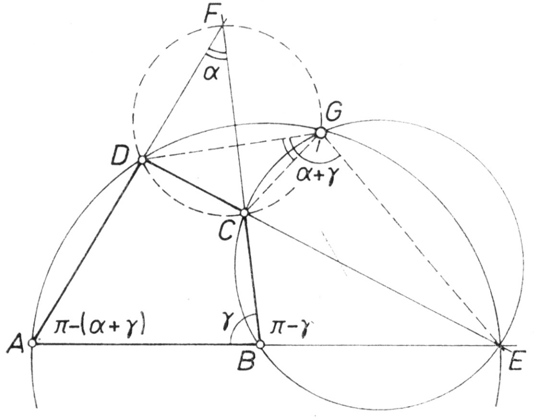


Obr. 87

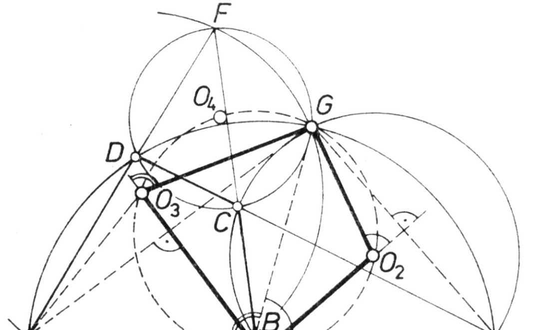
obvodové úhly v kružnici $BCGE$ je $|\sphericalangle BGE| = |\sphericalangle BCE| = \beta$ a pro obvodové úhly v kružnici $ADGE$ je $|\sphericalangle AGE| = |\sphericalangle ADE| = \alpha + \beta$. Je tedy

$$|\sphericalangle AGB| = |\sphericalangle AGE| - |\sphericalangle BGE| = \alpha.$$

Podobně dokážeme, že i kružnice CDF prochází bodem G, tj. že $|\sphericalangle CGD| = |\sphericalangle CFD|$ (obr. 88). Označme $|\sphericalangle CFD| = \alpha$, $|\sphericalangle ABF| = \gamma$. Pro obvodové úhly v kružnici $BCGE$ je $|\sphericalangle CGE| = \pi - |\sphericalangle CBE| = \pi - (\pi - \gamma) = \gamma$ a pro obvo-



Obr. 88



Obr. 89

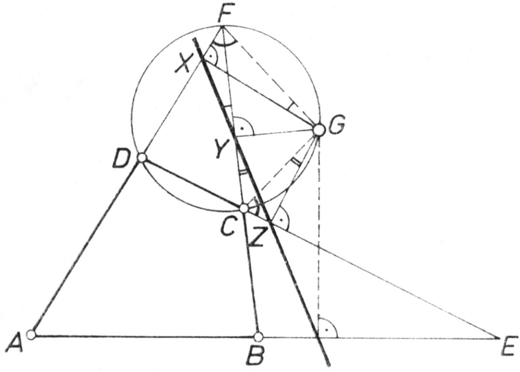
dové úhly v kružnici $ADGE$ je $|\sphericalangle DGE| = \pi - |\sphericalangle DAE| =$
$= \pi - (\pi - \alpha - \gamma) = \alpha + \gamma$. Je tedy

$$|\sphericalangle CGD| = |\sphericalangle DGE| - |\sphericalangle CGE| = \alpha + \gamma - \gamma = \alpha.$$

b) Abychom dokázali, že střed O_1 kružnice ADE, střed O_2 kružnice BCE, střed O_3 kružnice ABF a bod G leží na kružnici, stačí ukázat, že $|\sphericalangle O_1O_2G| + |\sphericalangle O_1O_3G| = \pi$. Využijeme-li vztahů středových a obvodových úhlů a kolmosti středných ke společným tětivám $O_1O_2 \perp EG$, $O_1O_3 \perp AG$, dostaneme (obr. 89)

$$\pi - |\sphericalangle O_1O_2G| = \frac{1}{2}|\sphericalangle GO_2E| = |\sphericalangle GBE| =$$
$$= \pi - |\sphericalangle ABG| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AO_3G| =$$
$$= |\sphericalangle O_1O_3G|.$$

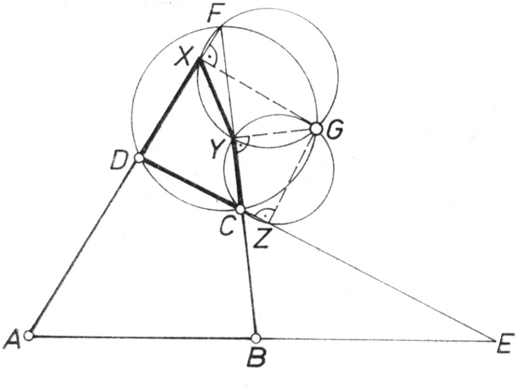
Analogicky dokážeme, že na této kružnici leží i střed O_4 kružnice CDF.



Obr. 90

c) Označme X, Y, Z paty kolmic z bodu G na přímky AD, BC, CD (obr. 90). Dokážeme, že $|\sphericalangle FYX| = |\sphericalangle CYZ|$. Body X, Y leží na Thaletově kružnici s průměrem FG. Pro její obvodové úhly je $|\sphericalangle FYX| = |\sphericalangle FGX|$. Body Y, Z leží na Thaletově kružnici s průměrem CG a pro její obvodové úhly je $|\sphericalangle CYZ| = |\sphericalangle CGZ|$. Protože $DCGF$ je tětivový čtyřúhelník, je $|\sphericalangle DFG| = |\sphericalangle ZCG|$, takže pravoúhlé trojúhelníky XFG a ZCG jsou podobné a $|\sphericalangle FGX| = |\sphericalangle CGZ|$, tj. $|\sphericalangle FYX| = |\sphericalangle CYZ|$. Dokázali jsme tedy, že paty kolmic z bodu kružnice opsané trojúhelníku na jeho prodloužené strany leží v přímce.*) Protože bod G je podle a) společným bodem kružnic opsaných trojúhelníkům ABF, CDF, ADE, BCE, leží všechny čtyři paty v přímce.

Poznámky. V části c) jsme odvodili Simpsonovu větu. Uveďme ještě její důkaz vyplývající přímo z tvrzení a).

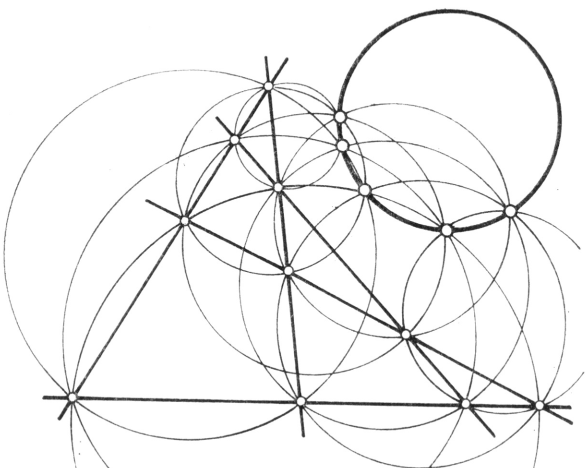


Obr. 91

*) tzv. Simpsonova věta

Označme X, Y, Z paty kolmic z libovolného bodu G kružnice opsané trojúhelníku DCF na přímky DF, CF, DC (obr. 91) a uvažujme čtyřúhelník $DCYX$. Jeho prodloužené strany DX, CY se protínají v bodě F. Ukážeme, že jeho prodloužené strany XY a DC se protínají v bodě Z, tj. že body X, Y, Z leží v přímce.

Body X, Y leží na Thaletově kružnici nad průměrem FG, proto se kružnice opsané trojúhelníkům DCF, XYF protínají ještě v bodě G. Podle výsledku a) prochází kružnice GYC průsečíkem prodloužených stran XY, DC čtyřúhelníku $DCYX$. Tímto průsečíkem je ale bod Z přímky DC, neboť podle Thaletovy věty leží zároveň na kružnici GYC s průměrem CG.



Obr. 92

Na závěr uveďme ještě další zajímavé vlastnosti uvedené konfigurace bodů a přímek. Při jejich důkazu rovněž vystačíme s vlastnostmi obvodových a středových úhlů.

Uvažujme pět navzájem různoběžných přímek, z nichž žádné tři neprocházejí jedním bodem. Ke každému z $\binom{5}{4} = 5$ čtyřúhelníků tvořených uvažovanými pěti přímkami můžeme sestrojit příslušný bod G. Všech těchto pět bodů leží na jedné kružnici (obr. 92). Přidáme-li k uvedené konfiguraci ještě šestou přímku s ostatními různoběžnou a neprocházející žádným z dosavadních průsečíků a sestrojíme-li ke každé pětici přímek příslušnou »kružnici pěti bodů«, bude všech $\binom{6}{5} = 6$ uvedených kružnic procházet jedním bodem!