Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již jedenácté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Každou zemi reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali postup na 52. MMO v Nizozemí.

Soutěž proběhla od 19. do 22. června 2011 v polském Krakově. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 19. 6. 2011. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.–2.	Tomasz Cieśla	POL	6 7 4 7 7 0	31
	Martin Vodička	SVK	7 7 7 3 7 0	31
3.–5.	Maciej Dulęba	POL	7 7 7 0 7 0	28
	Anh Dung Le	CZE	7 7 7 0 7 0	28
	Teodor Jerzak	POL	7 7 0 7 0 7	28
6.	Filip Borowiec	POL	7 7 6 6 1 0	27
7.	Damian Orlef	POL	7 7 2 7 1 0	24
8.	*Štěpán Šimsa*	CZE	7 7 0 2 0 0	16
9.	*Tomáš Zeman*	CZE	7 7 0 0 1 0	15
10.–14.	*Michael Bílý*	CZE	7 7 0 0 0 0	14
	Marián Horňák	SVK	7 7 0 0 0 0	14
	Ján Hozza	SVK	7 7 0 0 0 0	14
	Matúš Stehlík	SVK	7 4 0 2 1 0	14
	Michal Tóth	SVK	7 7 0 0 0 0	14
15.–16.	*Lubomír Grund*	CZE	7 6 0 0 0 0	13
	Ondrej Kováč	SVK	7 6 0 0 0 0	13
17.	Wojciech Porowski	POL	7 0 0 5 0 0	12
18.	*Miroslav Koblížek*	CZE	0 0 0 2 1 0	3

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili kolegové z hostitelské země, Pavel Novotný (1. úloha) a Tomáš Jurík (3. úloha). Koordinaci hodnocení zajistila mezinárodní porota, kterou tvořili Pavel Calábek, Karel Horák a Jaromír Šimša z České republiky, Jerzy Bednarczuk, Michał Pilipczuk a Andrzej Grzesik z Polska a Peter Csiba, Pavel Novotný a Peter Novotný ze Slovenska.

Texty soutěžních úloh

1. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $a^2 < bc$. Dokažte, že $b^3 + ac^2 > ab(a + c)$.

2. Na tabuli je napsáno n nezáporných celých čísel, jejichž největší společný dělitel je 1. V jednom kroku můžeme smazat dvě čísla x, y (označená tak, že $x \geqq y$) a nahradit je čísly $x - y$, $2y$. Zjistěte, pro které n-tice nezáporných celých čísel se lze popsaným způsobem dostat do situace, kdy na tabuli bude $n - 1$ nul.

3. Nechť body A, B, C, D leží na kružnici v uvedeném pořadí, přičemž $AB \nparallel CD$ a délka oblouku $\widehat{AB}$ obsahujícího body C, D je dvakrát větší než délka toho oblouku $\widehat{CD}$, který neobsahuje body A, B. Bod E je v polorovině ABC zvolen tak, že $|AC| = |AE|$ a $|BD| = |BE|$. Za předpokladu, že kolmice z bodu E na přímku AB prochází středem toho z oblouků $\widehat{CD}$, který neobsahuje body A, B, dokažte, že $|\sphericalangle ACB| = 108°$.

4. Nechť mnohočlen P s celočíselnými koeficienty splňuje následující podmínku: jestliže pro mnohočleny F, G, Q s celočíselnými koeficienty platí

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

je F nebo G konstantní mnohočlen.

Dokažte, že mnohočlen P musí být konstantní.

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme po řadě M a N středy stran AD a BC. Na stranách AB a CD zvolme po řadě body K a L tak, že $|\sphericalangle MKA| = |\sphericalangle NLC|$. Dokažte, že pokud mají přímky BD, KM a LN společný bod, platí

$$|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle BDC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle LNM| = |\sphericalangle ABD|.$$

6. Je dáno celé číslo a. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p, pro něž

$$p \mid n^2 + 3 \quad \text{a} \quad p \mid m^3 - a$$

pro nějaká celá čísla n, m.

Řešení úloh

1. Sečtením tří AG nerovností (každou levou stranu chápeme jako sedm sčítanců)

$$4a^3b + b^3c + 2c^3a \geqq 7a^2bc,$$
$$4b^3c + c^3a + 2a^3b \geqq 7b^2ca,$$
$$4c^3a + a^3b + 2b^3c \geqq 7c^2ab$$

dostaneme

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqq a^2bc + b^2ca + c^2ab. \qquad (1)$$

Z předpokladu $bc > a^2$ vynásobením ab plyne $b^2ca > a^3b$, což spolu s (1) dává

$$b^3c + c^3a > a^2bc + c^2ab \quad \text{neboli} \quad b^3 + ac^2 > ab(a + c).$$

Jiné řešení. Využijeme obě následující AG nerovnosti

$$\tfrac{2}{5}b^3 + \tfrac{3}{5}ac^2 \geqq \sqrt[5]{b^6a^3c^6} = bc\sqrt[5]{a^3bc} > abc,$$
$$\tfrac{3}{5}b^3 + \tfrac{2}{5}ac^2 \geqq \sqrt[5]{b^9a^2c^4} = b\sqrt[5]{a^2b^4c^4} > a^2b,$$

kam jsme v obou případech dosadili $bc > a^2$. Jejich sečtením získáme hledaný odhad.

2. *Odpověď.* Součet daných čísel musí být mocnina čísla 2.

Označme S celkový součet daných čísel a d jejich největší společný dělitel. Na počátku je $d = 1$, zatímco na konci by mělo být $d = S$, protože součet S všech čísel na tabuli se nemění.

Po každém popsaném kroku se aktuální hodnota největšího společného dělitele buď nezmění, anebo vzroste na dvojnásobek. To plyne z rovnosti $(x - y, y) = (x, y)$ a z toho, že je buď $(a, 2b) = (a, b)$, nebo $(a, 2b) = 2(a, b)$ podle toho, jestli 2 dělí $a/(a, b)$ či nikoli. Vzhledem k tomu, že $(a, b, c) = \big((a, b), c\big)$, snadno uvedený postřeh rozšíříme na největšího společného dělitele všech čísel na tabuli. Zůstane-li tedy nakonec na tabuli jediné nenulové číslo, musí tím číslem být mocnina dvojky.

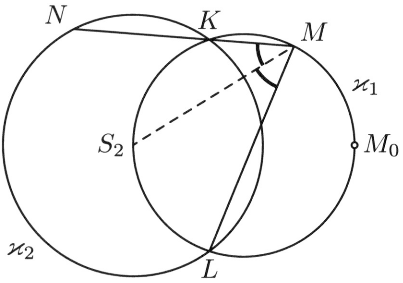
Je-li naopak S mocninou čísla 2, ukážeme jak postupovat, abychom dostali $n - 1$ nul. Zapišme všechna čísla na tabuli v dvojkové soustavě. Pokud jsou na tabuli ještě aspoň dvě nenulová čísla, vezměme ta dvě z nich, která mají na konci nejméně nul (taková čísla jsou aspoň dvě, protože celkový součet je mocnina dvojky). Po popsané operaci místo nich zřejmě dostaneme dvě čísla, jež mají na konci aspoň o jednu nulu víc. Je tedy jasné, že po konečném počtu kroků musíme skončit tím, že na tabuli bude jediné nenulové číslo.

3. Nejdříve zformulujeme a dokážeme pomocné tvrzení.

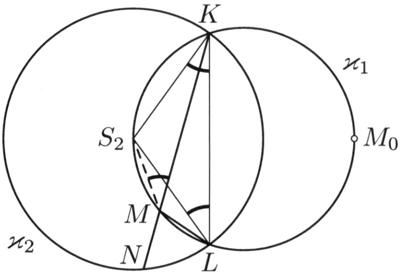
V rovině jsou dány dvě kružnice $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ protínající se v bodech K, L, přičemž střed S_2 kružnice $\varkappa_2$ leží na $\varkappa_1$. Pokud $M \in \varkappa_1$ $(M \notin \varkappa_2)$ a přímka KM protíná $\varkappa_2$ v bodě N (různém od K), je $|MN| = |ML|$.

Důkaz. Pokud $M = S_2$, je tvrzení triviální. Zabývejme se tedy případem $M \neq S_2$. Označme ještě M_0 bod kružnice $\varkappa_1$, pro nějž je S_2M_0 průměrem $\varkappa_1$. Zřejmě nemůže být $M = M_0$, protože v takovém případě by byly MK a ML tečnami kružnice $\varkappa_2$. Nejdříve dokážeme, že přímka MS_2 je osou úhlu NML.

Pokud M leží na oblouku KL kružnice $\varkappa_1$ neobsahujícím S_2 (obr. 37), jsou úhly KMS_2, S_2ML obvodovými úhly nad shodnými tětivami S_2K, S_2L, mají proto stejnou velikost.



Obr. 37



Obr. 38

Pokud M leží na oblouku KL kružnice $\varkappa_1$ obsahujícím bod S_2, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že leží na oblouku S_2L neobsahujícím bod K (obr. 38). Čtyřúhelník KS_2ML je tětivový, takže $|\sphericalangle S_2MN| = 180^\circ - |\sphericalangle S_2MK| = 180^\circ - |\sphericalangle S_2LK| = 180^\circ - |\sphericalangle S_2KL| = |\sphericalangle S_2ML|$.

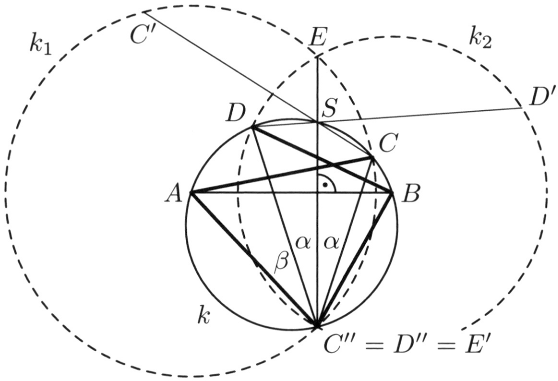
V osové souměrnosti podle přímky MS_2, v níž se kružnice $\varkappa_2$ zobrazí sama na sebe (její střed leží na ose souměrnosti), je obrazem přímky ML přímka MN. Ta protíná kružnici $\varkappa_2$ (pokud $M \neq M_0$) ve dvou bodech K a N. Obrazem bodu $L \in \varkappa_2$ nemůže ovšem být bod K, protože KL není pro $M \neq M_0$ kolmé na MS_2. Je tedy $|MN| = |ML|$, což jsme chtěli dokázat.

Přistupme nyní k řešení úlohy. Označme S průsečík oblouku CD s kolmicí z bodu E na AB. Je-li k_1 kružnice se středem A procházející bodem C a k_2 kružnice se středem B procházející bodem D, je bod E průsečíkem obou kružnic k_1, k_2. Kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$ označme k. Přímka SC protíná kružnici k_1 v bodě C'

a přímka SD kružnici k_2 v bodě D'. Další průsečík kružnice k_1 s kružnicí k označme C'' ($C'' \neq C$) a podobně D'' další průsečík kružnice k_2 s kružnicí k ($D'' \neq D$). Ukážeme, že $C'' = D''$.

Bod S leží na chordále kružnic k_1, k_2, proto z jeho mocnosti k těmto kružnicím plyne $|SC| \cdot |SC'| = |SD| \cdot |SD'|$. Protože podle zadání $|SC| = |SD|$, je i $|SC'| = |SD'|$. S využitím úvodního tvrzení tak máme $|SC''| = |SC'| = |SD'| = |SD''|$.

Kdyby body C'', D'' byly různé, byl by trojúhelník $SD''C''$ rovnoramenný a jeho výška z vrcholu S by procházela středem kružnice k stejně jako osa oblouku CD. Čtyřúhelník $CDD''C''$ (resp. $CDC''D''$) by tak byl rovnoramenný lichoběžník ($|SC| = |SD|$). A protože body A, B leží na osách úseček CC'', DD'', byl by i $ABCD$ rovnoramenný lichoběžník, což odporuje předpokladu $AB \nparallel CD$. Všechny tři uvažované kružnice tak mají společný bod $C'' = D''$, jehož označení dále zjednodušíme na E'.



Obr. 39

Označme $\alpha = |\sphericalangle DE'S| = |\sphericalangle SE'C|$ a $\beta = |\sphericalangle AE'D|$. Pak $|\sphericalangle AE'B'| = 2|\sphericalangle CE'D| = 4\alpha$ (neboť oblouk AB je dvakrát delší než oblouk CD), a proto $|\sphericalangle CE'B| = |\sphericalangle AE'B| - |\sphericalangle AE'C| = 2\alpha - \beta$ (obr. 39). Z rovností $|BD| = |BE'|$, $|AC| = |AE'|$ vyjádříme velikosti zbylých dvou úhlů trojúhelníku ABE':

$$2\alpha + \beta = |\sphericalangle AE'C| = |\sphericalangle ACE'| = |\sphericalangle ABE'|,$$

$$4\alpha - \beta = |\sphericalangle BE'D| = |\sphericalangle BDE'| = |\sphericalangle BAE'|.$$

Odtud

$$180^\circ = 4\alpha + (2\alpha + \beta) + (4\alpha - \beta) = 10\alpha,$$

tudíž $\alpha = 18^\circ$ a $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - |\sphericalangle AE'B| = 180^\circ - 4\alpha = 108^\circ$.

4. Dokážeme tvrzení úlohy sporem. Předpokládejme, že P není konstantní, a uvažme nejprve případ, kdy je mnohočlen P lineární, tedy $P(x) = ax+b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Vezměme $Q(x) = ax^2+(b+1)x$, pak je

$$P(Q(x)) = a(ax^2+(b+1)x)+b = a^2x^2+a(b+1)x+b = (ax+b)(ax+1)$$

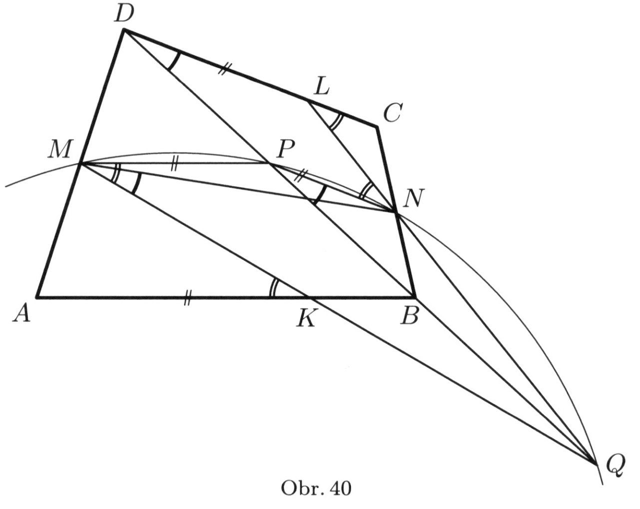
rozklad mnohočlenu $P(Q(x))$ na součin dvou nekonstantních mnohočlenů $ax+b$ a $ax+1$, což odporuje předpokladu úlohy.

Je-li stupeň mnohočlenu P aspoň 2, tedy $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, kde $n > 1$ a $a_n \neq 0$, vezměme mnohočlen $Q(x) = P(x)+x$. Pro mnohočlen $P(Q(x))$, který má stupeň $n^2 > n$, platí

$$P(Q(x)) - P(x) = P(P(x)+x) - P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\big((P(x)+x)^i - x^i\big).$$

Z rovnosti $a^i - b^i = (a-b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + \ldots + b^{i-1})$ ovšem plyne, že každý z mnohočlenů $(P(x)+x)^i - x^i$ je dělitelný mnohočlenem $P(x)$. Proto i mnohočlen $P(Q(x))$ je mnohočlenem $P(x)$ dělitelný. To vede opět ke sporu, protože stupeň mnohočlenu $P(Q(x))$ je větší než stupeň mnohočlenu P, a ten je tudíž netriviálním dělitelem mnohočlenu $P(Q(x))$. Tím je tvrzení dokázáno.

5. Označme P střed úhlopříčky BD a Q průsečík přímek BD, KM a LN (obr. 40). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod B leží mezi body Q a D. Protože PM a PN jsou střední příčky trojúhelníků ABD a DCB,



Obr. 40

je $PM \parallel AB$ a $PN \parallel CD$. Je tedy $|\sphericalangle PNL| = |\sphericalangle NLC| = |\sphericalangle MKA| = |\sphericalangle KMP|$, což znamená, že body P, M, Q, N leží na kružnici. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou NQ tak plyne $|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle QMN| = |\sphericalangle QPN| = |\sphericalangle BDC|$. Podobně vychází $|\sphericalangle LNM| = 180° - |\sphericalangle QNM| = 180° - |\sphericalangle QPM| = |\sphericalangle MPD| = |\sphericalangle ABD|$.

6. Tvrzení nejprve dokážeme pro $a = 0$. Tehdy má druhá podmínka tvar $p \mid m^3$, takže je splněna pro každé prvočíslo p volbou $m = p$. Stačí tedy dokázat, že mezi děliteli čísel $n^2 + 3$ $(n \in \mathbb{Z})$ je nekonečně mnoho prvočísel. Připusťme, že všech takových prvočísel je naopak konečně mnoho, a označme je $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Číslo $(3p_1p_2\ldots p_r)^2 + 3 = 3(3p_1^2p_2^2\ldots p_r^2 + 1)$ však má netriviálního dělitele $3p_1^2p_2^2\ldots p_r^2+1$, který není dělitelný žádným z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_r$, což je spor.

Nyní tvrzení dokážeme pro $a \neq 0$. Z rovností

$$(9a^2k^3)^2 + 3 = 3(27a^4k^6 + 1)$$

a

$$(9a^3k^4)^3 - a = a(3^6a^8k^{12} - 1) = a(27a^4k^6 - 1)(27a^4k^6 + 1)$$

plyne, že pro každé k celé je číslo $27a^4k^6 + 1$ společným dělitelem čísel $n^2 + 3$ a $m^3 - a$, kde $n = 9a^2k^3$ a $m = 9a^3k^4$. Stačí tedy dokázat, že pro libovolné dané a mezi děliteli čísel $27a^4k^6 + 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ existuje nekonečně mnoho různých prvočísel.

Předpokládejme naopak, že takových prvočísel je jen konečně mnoho, a označme je $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Pro $k = p_1p_2\ldots p_r + 1$ je však zřejmé, že číslo $27a^4k^6 + 1 > 1$ není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Má tedy dalšího prvočinitele $p \notin \{p_i : 1 \leqq i \leqq r\}$. Dospěli jsme tak ke sporu, který dokazuje tvrzení úlohy.