59. ročník matematické olympiády na středních školách

Přípravná soustředění před 51. MMO

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 139–142.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405200

Přípravná soustředění před 51. MMO

V průběhu 59. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 12. do 16. dubna 2010 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 11 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující přehled:

David Klaška	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	94
Miroslav Olšák	8/8 G Buďánka, Praha 5	87
Tomáš Zeman	7/8 G J. Keplera, Praha 6	76
Jáchym Sýkora	4/4 G Ch. Dopplera, Praha 5	67
Petr Ryšavý	8/8 G J. Heyrovského, Praha 5	63
Radek Marciňa	4/4 G Ch. Dopplera, Praha 5	60
Filip Hlásek	7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	58
Lukáš Zavřel	7/8 G Praha 9, Chodovická	58
Michael Bílý	7/8 G J. Vrchlického, Klatovy	53
Jakub Solovský	3/4 G M. Koperníka, Bílovec	48

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás částečně (bohužel museli být povoláni dva náhradníci) reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Martin Panák* (12. 4.),
dr. *Jaroslav Zhouf* (13. 4.),
dr. *Karel Horák* (14. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (15. 4.),
a doc. *Jaromír Šimša* (16. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Posloupnost $(a_n)_{n\geqq 1}$ je definována vztahy $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ a $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n \geqq 3$. Dokažte, že každý člen této posloupnosti je tvaru $a^2 + 2b^2$ pro nějaká celá kladná a, b (ne nutně různá).

2. Nechť A_n značí pro libovolné celé kladné n množinu všech pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ splňujících

$$k \mid 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \quad \text{pro libovolné } 1 \leqq k \leqq n.$$

V závislosti na n určete počet prvků A_n.

3. Řešte rovnici

$$m! + n! = m^n$$

v oboru celých kladných čísel.

4. Máme k dispozici a) šest, b) sedm různých barev a čtverečkovaný papír. Najděte nejmenší počet čtverečků, které musíme barvami označit (každý čtvereček jinou barvou) tak, aby pro každé dvě různé barvy existovaly dva čtverečky se společnou stranou označené těmito barvami.

5. Je dán trojúhelník ABC a střed M strany AB. Na polopřímce opačné k polopřímce MC zvolíme bod N (zde ho pro zjednodušení volme pouze tak, aby $|MN| < |MC|$). Bodem N vedeme přímku, která protne vnitřek úsečky AM v bodě P a vnitřek strany AC v bodě Q. Průsečík přímek QM a NB označme R, průsečík přímek AB a CR označme S. Dokažte rovnost $|PM| = |MS|$.

6. Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c, $a \neq c$ platí rovnost $a + \sqrt{b + \sqrt{c}} = c + \sqrt{b + \sqrt{a}}$. Dokažte, že pak platí $40ac < 1$.

7. Nechť P je mnohočlen s reálnými koeficienty, pro který platí

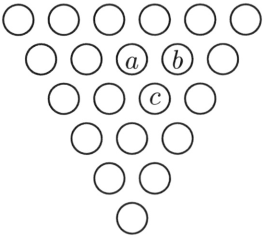
$$P(n) = 1^{2010} + 2^{2010} + \ldots + n^{2010}$$

pro každé přirozené číslo n. Určete $P(-\frac{1}{2})$.

8. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2, přičemž poloměr k_2 je dvojnásobkem poloměru k_1. Do kružnice k_1 je vepsán čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$. Jestliže postupně označíme B_1, B_2, B_3, B_4 průsečíky polopřímek A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3 a A_3A_4 s kružnicí k_2, bude dvojnásobek obvodu $A_1A_2A_3A_4$ nejvýše roven obvodu $B_1B_2B_3B_4$. Dokažte.

9. V ostroúhlém trojúhelníku ABC je nad výškou BK jako průměrem sestrojena kružnice k. Označme E, F její průsečíky se stranami AB, BC. Tečny sestrojené ke kružnici k v bodech E a F se protínají na těžnici trojúhelníku ABC z vrcholu B. Dokažte.

10. Zjistěte, zda je možno rozmístit přirozená čísla od 1 do 21 do jednadvaceti kroužků na obrázku tak, aby v libovolném řádku kromě prvního bylo každé z čísel rovno absolutní hodnotě rozdílu obou čísel nad ním (tj. $c = |a - b|$).



11. Vrcholy pětiúhelníku $ABCDE$ se shodnými stranami AB a AE leží na kružnici k. Označme P průsečík přímek AD, CE a Q průsečík přímek AC, BD. Průsečíky přímky PQ s kružnicí k označme X a Y. Dokažte, že platí $|AX| = |AY|$.

12. Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c},$$

kde a, b, c jsou libovolná kladná čísla.

13. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou splněny následující podmínky: $|AD| = |BC| + |EF|$, $|BE| = |AF| + |CD|$ a $|CF| = |DE| + |AB|$. Dokažte, že platí

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|AF|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

14. Kružnice vepsaná rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se dotýká jeho ramena BC v bodě M a protíná vnitřky úseček AM, DM po řadě v bodech K, L. Najděte všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{|AM|}{|AK|} + \frac{|DM|}{|DL|}.$$

15. Najděte podmínku na čísla $a, b \in \mathbb{R}$ nutnou i postačující k tomu, aby rovnice $Ax + B\lfloor x \rfloor = Ay + B\lfloor y \rfloor$ měla v oboru $\mathbb{R}$ i jiná řešení než $x = y$.

16. V dekadickém zápise některých N přirozených čísel vystupují pouze číslice 3 a 0, součet těchto N čísel je roven číslu zapsanému 2 010 pětkami. Najděte nejmenší možné N.

17. Určete nejmenší kladné číslo k, při kterém platí nerovnost

$$\big|(a-b)(a-c)(b-c)\big| < k \cdot s^3$$

pro strany a, b, c libovolného trojúhelníku s obvodem $2s$ $(= a + b + c)$.