57. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Karel Horák (editor); Daniel Kráľ (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 57. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2007/2008. 49. mezinárodní matematická olympiáda. 20. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010. pp. 46–60.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/405150`

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Najděte všechna přirozená čísla k, pro něž je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desítkové soustavě zakončen dvojčíslím a) 02; b) 04. (*Eva Řídká*)

B – I – 2

V pásu mezi rovnoběžkami p, q jsou dány dva různé body M a N. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách p a q a body M a N leží po jednom na zbývajících dvou stranách. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 3

Jsou-li x a y reálná čísla, pro něž platí $x^3 + y^3 \leqq 2$, potom $x + y \leqq 2$. Dokažte. (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran a, b, c a délkami těžnic t_a, t_b, t_c, pro něž platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba případy, kdy AB je a) přepona, b) odvěsna. (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

Určete všechny dvojice a, b reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 6

Obdélník $2\,005 \times 2\,007$ je rozdělen na černé a bílé jednotkové čtverečky. Dokažte, že pak pro jednu z barev (černou nebo bílou) existuje více než 95 800 pravoúhelníků (složených z jednotkových čtverečků), jež se navzájem nepřekrývají a jejichž rohová políčka mají vesměs zvolenou barvu, přičemž každá z jejich stran obsahuje aspoň dva čtverečky.

(*Pavel Leischner*)

B – S – 1

Jestliže libovolné prvočíslo vydělíme třiceti, bude zbytkem číslo 1 nebo prvočíslo. Dokažte. (*Vojtech Bálint*)

B – S – 2

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

společný reálný kořen. (*Jaroslav Švrček*)

B – S – 3

V rovině jsou dány dvě rovnoběžky p a q, bod A na přímce p a bod M ležící uvnitř pásu mezi přímkami p a q. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec $ABCD$ tak, aby strana AB ležela na přímce p, strana CD na přímce q a aby úhlopříčka BD procházela bodem M. (*Jaromír Šimša*)

B – II – 1

Uvažujme dvě kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnými parametry a, b. Zjistěte, jaké nejmenší a jaké největší hodnoty může nabývat součet $a + b$, existuje-li právě jedno reálné číslo x, které současně vyhovuje oběma rovnicím. Určete dále všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž uvažovaný součet těchto hodnot nabývá.

(*Jaroslav Švrček*)

B – II – 2

V trojúhelníku ABC má úhel α velikost $20°$. Vypočítejte velikosti úhlů β a γ, platí-li rovnost $a + 2v_a = b + 2v_b$. *(Pavel Novotný)*

B – II – 3

V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD.

(Jaroslav Švrček)

B – II – 4

Hokejový turnaj se hraje systémem „každý s každým". V průběhu turnaje se každá dvojice družstev střetne právě jednou. Turnaj se odehrává po jednotlivých kolech. Při sudém počtu družstev sehraje každé v jednom kole jeden zápas, při lichém počtu má v každém kole jedno z družstev volno. Za remízu dostane každý ze soupeřů po jednom bodu. Pokud zápas neskončí remízou, dostane vítěz dva body, poražený nezíská žádný bod. O pořadí v tabulce rozhoduje především počet bodů, při rovnosti bodů pak skóre. Po odehrání několika kol neměla žádná dvojice družstev stejný počet bodů. Dokažte, že v tom případě už poslední v tabulce ztratil naději na celkové vítězství. Úlohu řešte pro turnaj

a) deseti družstev,

b) jedenácti družstev. *(Martin Panák)*

Řešení úloh

B – I – 1

Opakovaným násobením číslem 6 zjistíme, že poslední dvojčíslí mocnin 6^k pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ jsou postupně

$$06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, 16, 96, 76, 56, \ldots, \tag{1}$$

opakují se tedy od druhého členu s periodou délky 5. Podobně opakovaným násobením číslem 7 zjistíme, že poslední dvojčíslí mocnin 7^m pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ jsou postupně

$$07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, \ldots, \tag{2}$$

opakují se tedy již od prvního členu s periodou délky 4.

a) Protože každá mocnina šesti je zakončena číslicí 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončeno dvojkou, jedině když bude číslo 7^{2007-k} zakončeno dvojčíslím 07 (jiné dvojčíslí z (2) nevyhovuje). Násobením čísly 6, 36, 16, 96, 76 a 56 ovšem zjistíme, že číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ může mít v takovém případě na předposledním místě jen některou z číslic 1, 3, 4, 5, 7, 9. Zakončení dvojčíslím 02 proto není možné.

b) Protože každá mocnina šesti je zakončena číslicí 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončeno čtyřkou, právě když 7^{2007-k} bude zakončeno dvojčíslím 49 (jiné dvojčíslí z (2) nevyhovuje). Násobením všemi různými čísly z (1) zjistíme, že $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončeno dvojčíslím 04, jedině když 6^k končí dvojčíslím 96. Číslo 6^k končí na 96, právě když je mocnitel k tvaru $k = 4 + 5a$; číslo 7^{2007-k} končí na 49, právě když příslušný mocnitel má tvar $2\,007 - k = 2 + 4b$. Dosazením $k = 4 + 5a$ dostaneme rovnici $2\,007 - 4 - 5a = 2 + 4b$, kde a a b jsou celá nezáporná čísla. Z ní vychází

$$b = \frac{2\,001 - 5a}{4} = 500 - a - \frac{a-1}{4}.$$

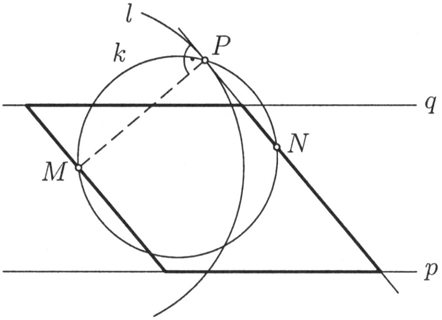
Aby bylo b celé, musí být $a - 1$ dělitelné čtyřmi, tedy $a = 4c + 1$; potom $b = 499 - 5c$, $k = 9 + 20c$. Mocnitel $2\,007 - k$ rovný $1\,998 - 20c$ nemůže být záporný, proto $c \leqq 99$.

Číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončeno dvojčíslím 04, právě když je číslo k tvaru $k = 9 + 20c$, kde $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$.

Poznámka. Rovnice tvaru $ax + by = c$, kde a, b, c jsou daná celá čísla a x, y celočíselné neznámé, se nazývá *lineární diofantická rovnice* o dvou neznámých.

B – I – 2

V kosočtverci (čtverci) jsou vzdálenosti protilehlých stran stejné. Naším úkolem je tedy vést body M a N rovnoběžky, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti d rovnoběžek p a q. Pata P kolmice z bodu M ke straně hledaného kosočtverce procházející bodem N leží na Thaletově kružnici nad průměrem MN a má od bodu M vzdálenost d (obr. 14). Odtud plyne *konstrukce*:



Obr. 14

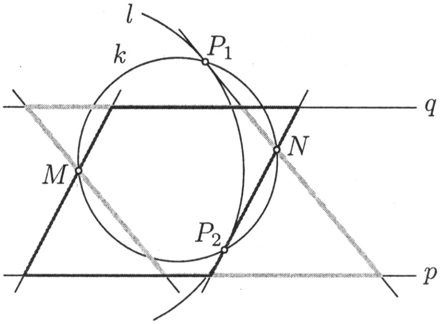
Sestrojíme Thaletovu kružnici k nad průměrem MN a kružnici l se středem M, jejíž poloměr je roven vzdálenosti d přímek p a q. Označíme P průsečík kružnic k a l. Na přímce PN leží jedna ze stran hledaného (koso)čtverce. Protilehlá strana prochází bodem M a je s přímkou PN rovnoběžná.

Vzniklý rovnoběžník je skutečně kosočtverec nebo čtverec, neboť ze shodnosti výšek vyplývá shodnost stran.

Diskuse: Existence řešení je podmíněna existencí bodu P. Zřejmě pak nemůže být $NP \parallel q$, protože by to znamenalo, že je $|MP| < d$, takže rovnoběžky procházející body M, N vždy vytnou požadovaný rovnoběžník. Je-li $|MN| > d$, mají kružnice k a l dva různé průsečíky $P_1 \neq P_2$ (obr. 15), takže úloha má dvě řešení. Je-li $|MN| = d$, potom $P = N$; stranu kosočtverce procházející bodem N sestrojíme jako kolmici na MN a úloha má jen jedno řešení. V případě $|MN| < d$ nemá úloha řešení.

B – I – 3

Tvrzení dokážeme sporem. Připusťme, že platí $x+y > 2$. Potom $y > 2-x$, takže $y^3 > (2-x)^3$, neboť funkce $s = t^3$ je v proměnné t rostoucí v celém



Obr. 15

oboru reálných čísel. Proto platí

$$x^3 + y^3 > x^3 + (2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 = 6(x - 1)^2 + 2 \geqq 2.$$

To je ve sporu s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. Dvojčlen $x^3 + y^3$ rozložíme na součin $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Kdyby platilo $x + y > 2$, pak bychom pro druhý činitel $x^2 - xy + y^2$ měli odhad

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2 > 1.$$

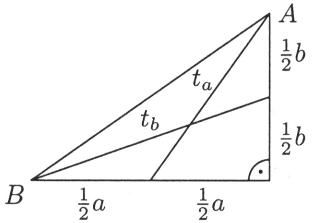
Pro výraz $x^3 + y^3$ by pak platilo

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) > 2 \cdot 1 = 2.$$

To je opět ve sporu s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.

B – I – 4

a) Nechť a i b jsou odvěsny (obr. 16). Potom podle Pythagorovy věty



Obr. 16

platí

$$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

takže podmínka $a + t_a = b + t_b$ má tvar

$$a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b + \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Protože z nerovnosti $a > b$ vyplývá (viz závěrečnou poznámku) $t_b > t_a$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned}
2a - 2b &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2},\\
4a^2 - 8ab + 4b^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{(4a^2 + b^2)(4b^2 + a^2)},\\
2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4} &= a^2 + 8ab + b^2,\\
16a^4 + 68a^2b^2 + 16b^4 &= a^4 + 16a^3b + 66a^2b^2 + 16ab^3 + b^4,\\
15a^4 - 16a^3b + 2a^2b^2 - 16ab^3 + 15b^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Mnohočlen na levé straně poslední rovnice je zřejmě dělitelný dvojčlenem $a - b$ (pro $a = b$ je totiž roven nule). Dělením zjistíme, že výsledný mnohočlen třetího stupně má opět stejnou vlastnost, takže po opakovaném dělení převedeme zkoumanou rovnici do součinového tvaru

$$(a - b)^2(15a^2 + 14ab + 15b^2) = 0.$$

Poslední rovnost platí, právě když $a = b$, protože $15a^2 + 14ab + 15b^2 > 0$ pro každou dvojici reálných čísel a, b.

V případě a) můžeme postupovat i následovně: Odečtením rovností

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

dostaneme

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Na obou stranách poslední rovnice jsou rozdíly druhých mocnin. Převedeme je na součiny a pak využijeme danou rovnost $a + t_a = b + t_b$ upravenou do tvaru $t_a - t_b = b - a$:

$$\begin{aligned}
(t_a - t_b)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(b + a),\\
(b - a)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(a + b).
\end{aligned}$$

Kdyby bylo $a \neq b$, vyjde $t_a + t_b = \frac{3}{4}(a+b)$; to spolu s rovností $t_a - t_b = b - a$ dává $t_a = \frac{7}{8}b - \frac{1}{8}a$, tedy $t_a < b$, což odporuje tomu, že t_a je přepona a b odvěsna téhož pravoúhlého trojúhelníku (obr. 16). Proto musí platit rovnost $a = b$.

b) Nechť např. a je přepona (je-li přepona b, stačí strany a, b v následujícím textu navzájem vyměnit). Potom z Thaletovy a Pythagorovy věty plyne

$$t_a = \frac{a}{2}, \quad t_b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

a rovnost ze zadání má tedy tvar

$$\frac{3a}{2} = b + \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Protože přepona a je delší než odvěsna b, tedy $a > b$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned} 3a - 2b &= \sqrt{4a^2 - 3b^2}, \\ 9a^2 - 12ab + 4b^2 &= 4a^2 - 3b^2, \\ 5a^2 - 12ab + 7b^2 &= 0, \\ (a-b)(5a-7b) &= 0, \\ 5a - 7b &= 0. \end{aligned}$$

Závěr: Rovnost $a + t_a = b + t_b$ platí pro pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami $a = b$ a pro pravoúhlé trojúhelníky, které mají strany v poměru $5 : \sqrt{24} : 7$, a přitom nejkratší z nich je (třetí) strana c.

Poznámka. Těžnice obecného trojúhelníku (ať je pravoúhlý či nikoliv) mají stejnou vlastnost jako jeho výšky: ke kratší straně směřuje delší těžnice. Odtud plyne, že rovnost $a + t_b = b + t_a$ platí, právě když $a = b$. [Nerovnosti mezi stranami a, b a mezi částmi těžnic $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ porovnáme na základě toho, že vrchol C i těžiště T trojúhelníku ABC leží ve stejné polorovině vyťaté osou strany AB.]

B – I – 5

Ze zadání vyplývá, že $a \neq 0$, $b \neq 0$ (rovnice by nebyly kvadratické) a $a \neq b$ (rovnice by byly totožné, a pokud by měly dva reálné kořeny, byly by oba společné).

Označme x_0 společný kořen obou rovnic, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$(a-b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a-b)(x_0 - 2) = 0.$$

Protože $a \neq b$ a 0 zřejmě kořenem daných rovnic není, musí být společným kořenem číslo $x_0 = 2$. Dosazením do daných rovnic tak dostaneme jedinou podmínku $4a + 4b + 1 = 0$, neboli

$$b = -a - \frac{1}{4}.$$

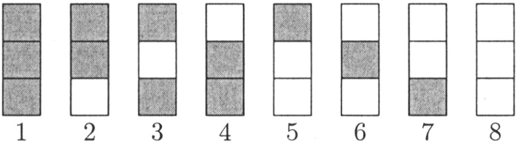
Diskriminant druhé z daných rovnic je pak $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, takže rovnice má dva různé reálné kořeny pro libovolné $a \neq -\frac{1}{2}$. Podobně diskriminant první z daných rovnic je $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2$. Rovnice má tedy dva různé reálné kořeny pro libovolné $b \neq -\frac{1}{2}$ neboli $a \neq \frac{1}{4}$.

Z uvedených předpokladů však zároveň plyne, že musí být $a \neq -\frac{1}{4}$ ($b \neq 0$) a $a \neq -\frac{1}{8}$ ($a \neq b$).

Závěr: Vyhovují všechny dvojice $(a, -a - \frac{1}{4})$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$.

B – I – 6

Budeme hledat obdélník co nejmenšího obsahu, v němž musí být obsažen pravoúhelník, který má všechna rohová políčka stejné barvy. Šířka 2 nestačí (při libovolné délce by například mohl být jeden celý řádek černý a druhý bílý). Uvažujme tedy obdélník šířky 3. Jeho sloupce mohou být obarveny osmi způsoby (obr. 17):



Obr. 17

Je-li obdélník složen jen ze šesti sloupců 2 až 7, nemá žádný pravoúhelník s rozměry většími než 1 v něm obsažený všechna rohová políčka téže barvy. Uvedených šest sloupců totiž představuje všechny možnosti, jak obarvit sloupec složený ze tří políček dvěma barvami, aby nebyl jednobarevný (jednobarevné jsou pak zbývající dva sloupce 1 a 8). Kdyby v takovém obdélníku existoval pravoúhelník s rohovými políčky téže barvy, byly by příslušné sloupce stejné.

Má-li však obdélník šířky 3 délku aspoň 7, jsou v něm buď dva stejné sloupce, nebo v něm je některý z jednobarevných sloupců (1 a 8). V případě dvou stejných sloupců je existence pravoúhelníku se stejně obarvenými rohovými políčky zřejmá. Nejsou-li žádné dva sloupce stejné, ale je tam jednobarevný sloupec barvy A, musí v obdélníku být i sloupec, jehož dvě políčka mají barvu A. Tento sloupec a jednobarevný sloupec barvy A vymezují pravoúhelník, jehož všechna rohová políčka mají barvu A.

Daný obdélník $2\,005 \times 2\,007$ nyní rozdělíme na dvě části $2\,002 \times 2\,007$ a $3 \times 2\,007$. Protože $2\,002 = 7 \cdot 286$, $2\,007 = 3 \cdot 669$, skládá se první část z $286 \cdot 669$ nepřekrývajících se obdélníků 7×3. V druhé části je ještě dalších 286 obdélníků 7×3. Obdélníků 7×3 je tedy celkem $286 \cdot 669 + 286 = 286 \cdot 670 = 191\,620$. V každém z nich je obsažen aspoň jeden pravoúhelník, který má všechna rohová políčka stejné barvy. Pro nejméně polovinu takto nalezených obdélníků, tedy pro alespoň 95 810 je pak barva rohových polí stejná.

B – S – 1

Libovolné prvočíslo p lze napsat ve tvaru $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a z, $1 \leqq z \leqq 29$, je zbytek při dělení čísla p třiceti (je-li p prvočíslo, můžeme nulový zbytek vyloučit).

Jestliže p je prvočíslo menší než 30, je zřejmě $z = p$ také prvočíslo.

Předpokládejme tedy, že p je prvočíslo větší než 30, takže $a \geqq 1$. Připusťme, že zbytek z není ani číslo 1, ani prvočíslo, a označme q jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Zřejmě platí $q^2 \leqq z < 30 < 7^2$, odkud $q < 7$ neboli $q \in \{2, 3, 5\}$. Protože číslo 30 je dělitelné dvěma, třemi i pěti, je dělitelné prvočíslem q, takže i číslo $p = 30a + z$ je prvočíslem q dělitelné. Nemůže to tudíž být prvočíslo.

Jiné řešení. Vyjádřeme číslo p ve tvaru $p = 30a + z$. Kdyby bylo zbytkem z některé z čísel $0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$, bylo by p sudé a přitom větší než 2, takže by nebylo prvočíslem. Kdyby bylo zbytkem některé z čísel 9, 15, 21, 27, bylo by p dělitelné třemi a přitom větší než 3 a nemohlo by být prvočíslem. Konečně při zbytku 25 by bylo p dělitelné pěti a přitom větší než 5, takže ani pak by to nebylo prvočíslo.

Stručněji řečeno: Protože každé složené číslo menší než 30 je soudělné s 30, je zbytkem prvočísla p při dělení třiceti jednotka nebo prvočíslo.

B – S – 2

Je-li x_0 společný kořen obou rovnic, platí

$$x_0^2 + (3a + b)x_0 + 4a = 0, \qquad x_0^2 + (3b + a)x_0 + 4b = 0.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme $(2a - 2b)x_0 + 4(a - b) = 0$, což po úpravě dává $(a - b)(x_0 + 2) = 0$.

Rozebereme dvě možnosti:

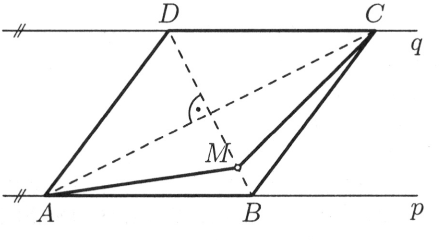
Číslo $x_0 = -2$ je společným kořenem obou rovnic, dosazením do kterékoli z nich dostaneme $4 - 2a - 2b = 0$, tedy $b = 2 - a$. Pro takové b mají obě rovnice při libovolné hodnotě parametru a společný kořen -2.

Jestliže $a = b$, mají obě dané rovnice stejný tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden kořen (samozřejmě společný) existuje, právě když je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, tedy právě když $a \notin (0, 1)$.

Závěr: Dané rovnice mají aspoň jeden společný kořen pro všechny dvojice tvaru $(a, 2 - a)$, kde a je libovolné, a pro všechny dvojice (a, a), kde $a \notin (0, 1)$.

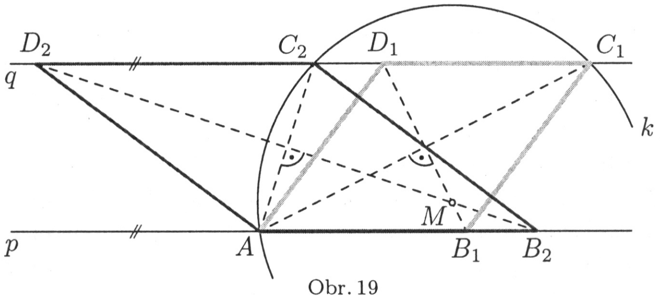
B – S – 3

Ze shodnosti trojúhelníků ABM a CBM (*sus*) vyplývá $|CM| = |AM|$; bod C proto musí ležet na kružnici se středem M a poloměrem $|AM|$ (obr. 18). Úhlopříčky (koso)čtverce jsou na sebe kolmé, proto body B a D leží na kolmici vedené bodem M na přímku AC.



Obr. 18

Konstrukce: Sestrojíme kružnici k se středem M a poloměrem $|AM|$. Průsečík této kružnice s přímkou q je bod C. Bodem M vedeme kolmici na přímku AC. Její průsečíky s přímkami p a q jsou body B a D (obr. 19). Sestrojený čtyřúhelník má zřejmě všechny požadované vlastnosti.



Obr. 19

Diskuse: Je-li vzdálenost bodu M od přímky q větší než jeho vzdálenost od bodu A, nemá kružnice k s přímkou q společný bod a úloha nemá řešení.

Má-li bod M stejnou vzdálenost od přímky q jako od bodu A, má kružnice k s přímkou q jediný společný bod C. Pokud zároveň bod M neleží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, není přímka AC kolmá na p, proto kolmice vedená bodem M na přímku AC není s přímkou p rovnoběžná a úloha má jedno řešení; pokud ale bod M leží na ose pásu (je to tedy průsečík osy pásu s kolmicí k přímce p vedenou bodem A), nemá úloha řešení.

Je-li vzdálenost bodu M od přímky q menší než jeho vzdálenost od bodu A, protíná kružnice k přímku q ve dvou bodech. Pokud bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, leží jeden z průsečíků na kolmici vedené bodem A na přímku p a úloha má jedno řešení; neleží-li M na ose pásu, má úloha dvě řešení.

Jiné řešení. Průsečík S úhlopříček (koso)čtverce $ABCD$ musí ležet na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q.

Leží-li bod M na ose pásu, musí platit $S = M$; bod C je potom průsečík přímek AS a q, B a D jsou průsečíky kolmice k přímce AC vedené bodem M s přímkami p a q. Je-li přitom $AM \perp p$, nemá úloha řešení, jinak má jedno řešení.

Neleží-li M na ose pásu, je úhel ASM pravý. Proto je bod S průsečíkem osy pásu s Thaletovou kružnicí nad průměrem AM. Body C, B, D potom najdeme stejně jako v předchozím řešení. Podle počtu společných bodů osy pásu a Thaletovy kružnice má potom úloha dvě řešení, jedno řešení nebo nemá žádné řešení.

Jiné řešení. Bod M leží na ose úhlu ADC, proto má od přímek AD a q stejnou vzdálenost. Přímka AD je tedy tečnou kružnice, která má střed M a dotýká se přímky q.

Konstrukce: Sestrojíme kružnici h se středem M, která se dotýká přímky q. Vrchol D hledaného (koso)čtverce je průsečík přímky q s tečnou kružnice h procházející bodem A. Body B a C potom už najdeme snadno.

Diskuse: Má-li bod M od bodu A menší vzdálenost než od přímky q, neprochází bodem A žádná tečna kružnice h a úloha nemá řešení.

Má-li bod M od bodu A stejnou vzdálenost jako od přímky q, leží bod A na kružnici h a prochází jím jedna tečna této kružnice. Pokud přitom bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, je touto tečnou přímka p, která přímku q neprotíná, a úloha nemá řešení. Pokud ale bod M na ose pásu neleží, tečna je s přímkou q různoběžná a úloha má jedno řešení.

Má-li bod M od bodu A větší vzdálenost než od přímky q, existují dvě tečny kružnice h procházející bodem A. Pokud přitom bod M leží na ose pásu, je jednou z tečen přímka p a úloha má jedno řešení; pokud bod M na ose pásu neleží, jsou obě tečny s q různoběžné a úloha má dvě řešení.

B – II – 1

Odečtením obou daných rovnic dostaneme rovnost $(b-a)x+a-b=0$ neboli $(b-a)(x-1)=0$, odtud plyne $b=a$ nebo $x=1$.

Jestliže $b=a$, mají obě rovnice tvar $x^2-ax-a=0$. Právě jedno řešení existuje, právě když je diskriminant a^2+4a nulový. To platí pro $a=0$ a pro $a=-4$. Protože $b=a$, má součet $a+b$ v prvém případě hodnotu 0 a ve druhém případě hodnotu -8.

Jestliže $x=1$, dostaneme z daných rovnic $a+b=1$, tedy $b=1-a$. Rovnice potom mají tvar

$$x^2-ax+a-1=0 \quad \text{a} \quad x^2+(a-1)x-a=0.$$

První má kořeny 1 a $a-1$, druhá kořeny 1 a $-a$. Právě jedno společné řešení tak dostaneme vždy s výjimkou případu, kdy $a-1=-a$ neboli $a=\frac{1}{2}$, kdy jsou společná řešení dvě.

Závěr. Nejmenší hodnota součtu $a+b$ je -8 a je dosažena pro $a=$ $=b=-4$. Největší hodnota součtu $a+b$ je 1; této hodnoty je dosaženo pro všechny dvojice $(a,1-a)$, kde $a\neq\frac{1}{2}$ je libovolné reálné číslo.

B – II – 2

Z vyjádření výšek pomocí úhlu γ, tj. $v_a = b \sin\gamma$ a $v_b = a \sin\gamma$, dostaneme dosazením do předpokládaného vztahu rovnost $a + 2b \sin\gamma = b + 2a \sin\gamma$, která platí, právě když $(a - b)(1 - 2\sin\gamma) = 0$.

Jestliže $a = b$, vychází $\beta = \alpha = 20^\circ$, takže $\gamma = 140^\circ$.

Jinak musí být $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, takže $\gamma = 30^\circ$ nebo $\gamma = 150^\circ$; úhel β v obou případech dopočítáme jako $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

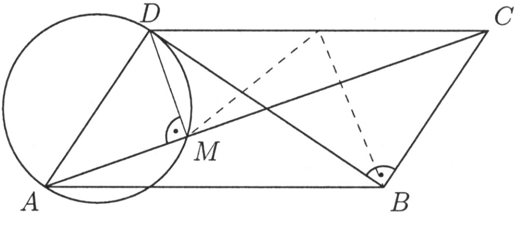
Úloha má tři řešení: $\beta = 20^\circ$ a $\gamma = 140^\circ$, $\beta = 130^\circ$ a $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 10^\circ$ a $\gamma = 150^\circ$.

Jiné řešení. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC dostaneme rovnost $av_a = bv_b$. Hodnoty ve dvojicích a, $2v_a$ a b, $2v_b$ mají tedy stejné součiny a podle zadání i stejné součty, takže to jsou dvojice kořenů téže kvadratické rovnice, proto $\{a, 2v_a\} = \{b, 2v_b\}$. V případě $v_a = v_b$ je $a = b$, a tedy $\alpha = \beta$, případ $a = 2v_b$ nastane, právě když má γ velikost 30 nebo 150 stupňů.

Poznámka. Úvahu o zmíněné kvadratické rovnici lze samozřejmě nahradit i přímým dosazením $b = a + 2v_a - 2v_b$ do rovnosti $av_a = bv_b$; po úpravě vyjde $(a - 2v_b)(v_a - v_b) = 0$.

B – II – 3

Podle Thaletovy věty je úhel AMD pravý, proto je i úhel DMC pravý (obr. 20). Strany BC a AD jsou rovnoběžné, proto je úhlopříčka BD kolmá i ke straně BC. Body M a B tedy leží na Thaletově kružnici s průměrem CD. Mají proto od středu úsečky CD stejnou vzdálenost, takže zmiňovaný střed leží na ose úsečky MB.



Obr. 20

B – II – 4

a) Turnaj se skládá z devíti kol. Má-li každé družstvo jiný počet bodů, musí mít první v tabulce aspoň o 9 bodů víc než poslední. Na zisk devíti bodů je nezbytné sehrát aspoň pět zápasů; to znamená, že už muselo proběhnout aspoň 5 kol, takže do konce turnaje zbývají nejvýše čtyři kola. V nich může poslední v tabulce získat maximálně 8 bodů, a prvního už nemůže dostihnout.

b) V turnaji proběhne 11 kol (každé družstvo desetkrát hraje a jednou má volno). Má-li každé družstvo jiný počet bodů, muselo už být uděleno aspoň $0+1+2+\ldots+10 = 55$ bodů. V jednom kole se odehraje 5 zápasů, takže se rozdělí $5 \cdot 2 = 10$ bodů. Proto už muselo být odehráno aspoň 6 kol a do konce jich zbývá nejvýše pět.

Kdyby byl mezi některými sousedy v tabulce větší rozdíl než jednobodový, měl by první aspoň o 11 bodů víc než poslední a ve zbývajících nejvýše pěti kolech by jím nemohl být dostižen. Připusťme tedy, že rozdíly mezi sousedy v tabulce jsou pouze jednobodové. Má-li poslední b bodů (zřejmě $0 \leqq b < 11$), je celkový počet udělených bodů $b + (b+1) + (b+2) + \ldots + (b+10) = 11b + 55$. K tomu bylo potřeba odehrát $k = \frac{1}{10}(11b+55) = b + 5 + \frac{1}{10}(b+5)$ kol. Počet odehraných kol je celé číslo, proto $10 \mid b+5$. Odtud vyplývá $b = 5$, a tedy $k = 11$. To znamená, že jsou odehrána všechna kola a poslední místo v tabulce je definitivní.

Jiné řešení části b). Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že už muselo proběhnout aspoň 6 kol. Mezi prvním a posledním v tabulce je aspoň desetibodový rozdíl. Kdyby proběhlo kol aspoň 7, zbývala by do konce nejvýš 4 kola a v nich by nemohl poslední nejméně desetibodový náskok prvního vyrovnat. Předpokládejme tedy, že proběhlo přesně 6 kol, takže bylo rozděleno právě 60 bodů. Kdyby měl poslední v tabulce aspoň jeden bod, byl by celkový počet udělených bodů alespoň $1 + 2 + 3 + \ldots + 11 = 66 > 60$. Poslední tedy musel být bez bodu. Potom ale první musel mít více než 10 bodů, protože v opačném případě by byl bodový zisk všech družstev $0 + 1 + 2 + \ldots + 10 = 55 < 60$. Měl tedy první před posledním aspoň jedenáctibodový náskok, který už poslední ve zbývajících pěti kolech nemůže vyrovnat.