56. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 56. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007. 48. mezinárodní matematická olympiáda. 19. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2008. pp. 41–55.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/405129`

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(Pavel Novotný)

B – I – 2

Je dána kružnice k s průměrem AB. K libovolnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X, pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X. *(Pavel Leischner)*

B – I – 3

Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k-prvková množina trojmístných po dvou nesoudělných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo. *(Pavel Novotný)*

B – I – 4

V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB, pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový. *(Ján Mazák)*

B – I – 5

Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$. *(Jozef Moravčík)*

B – I – 6

Je dána úsečka AA_0 a přímka p. Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0, jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p.

(Eva Řídká)

B – S – 1

Určete všechny dvojice reálných čísel a a b, pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$. *(Jaromír Šimša)*

B – S – 2

V trojúhelníku ABC označme D střed strany BC, E střed strany AC a T těžiště. Je-li strana BC delší než strana AC, má kružnice vepsaná trojúhelníku BDT menší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku ATE. Dokažte. *(Pavel Novotný)*

B – S – 3

Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro které je podíl

$$\frac{n^2 + 15n}{33\,000}$$

přirozené číslo. *(Jaromír Šimša)*

B – II – 1

Určete reálná čísla a, b, c tak, aby mnohočlen x^4+ax^2+bx+c byl dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$ a přitom součet $a^2 + b^2 + c^2$ byl co nejmenší.

(Jaromír Šimša)

B – II – 2

Je dán trojúhelník ABC se stranou BC délky 22 cm a stranou AC délky 19 cm, jehož těžnice t_a, t_b jsou navzájem kolmé. Vypočítejte délku strany AB. *(Pavel Novotný)*

B – II – 3

Přirozené číslo nazveme *vlnitým*, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí $(a - b)(b - c) < 0$. Dokažte, že z číslic $0, 1, \ldots, 9$ je možno sestavit více než 25 000 desetimístných vlnitých čísel, která obsahují všechny číslice od nuly do devítky (číslice 0 nemůže být na prvním místě). (*Jaromír Šimša*)

B – II – 4

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 1

Rovnici řešíme jako kvadratickou s neznámou a a parametrem b. Její diskriminant je

$$D = (7b+5)^2 - 4(6b^2+4b+3) = 25b^2 + 54b + 13$$

a kořeny

$$a_{1,2} = \frac{-7b-5 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Jsou-li a i b celá čísla, musí být i $\sqrt{D} = \pm(2a+7b+5)$ celé číslo. Můžeme tedy psát

$$D = 25b^2 + 54b + 13 = c^2,$$

kde c je celé nezáporné. Rovnici

$$25b^2 + 54b + 13 - c^2 = 0$$

opět řešíme jako kvadratickou. Její kořeny jsou

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 25 \cdot 13 + 25c^2}}{25}.$$

Jsou-li b a c celá čísla, musí být $\sqrt{404 + 25c^2}$ druhou mocninou nějakého celého nezáporného čísla d. Pro celá nezáporná čísla c, d tedy platí $d^2 - 25c^2 = 404$ čili

$$(d+5c)(d-5c) = 404.$$

Rozdíl $(d+5c)-(d-5c) = 10c$ je sudý, takže čísla $d+5c$ a $d-5c$ mají stejnou paritu. Navíc pro nezáporné c je $d+5c \geqq d-5c$ a $d+5c \geqq 0$, takže z rozkladů čísla 404 na součin dvou celých čísel vyhovuje jediný, a to

$$d+5c = 202, \qquad d-5c = 2.$$

Odtud $d = 102$, $c = 20$. Z kořenů

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm d}{25}$$

je celým číslem jenom $b = 3$. Potom

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm c}{2},$$

tedy $a_1 = -3$ a $a_2 = -23$.

Dané rovnici vyhovují dvě dvojice čísel (a, b), a to $(-3, 3)$ a $(-23, 3)$.

Jiné řešení. Trojčlen $a^2 + 7ab + 6b^2 = (a + b)(a + 6b)$ se dá rozložit na součin. Pokusme se na součin rozložit i výraz $a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c$, kde c je vhodná konstanta. Rozklad bude mít tvar

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c = (a + b + x)(a + 6b + y).$$

Po roznásobení pravé strany a porovnání koeficientů u a a b dostaneme

$$x + y = 5, \quad 6x + y = 4,$$

neboli

$$x = -\frac{1}{5}, \quad y = \frac{26}{5},$$

takže vyjde

$$c = xy = -\frac{26}{25}.$$

Danou rovnici tak můžeme postupně upravit na tvar

$$\begin{aligned} a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b - \frac{26}{25} &= -3 - \frac{26}{25}, \\ \left(a + b - \frac{1}{5}\right)\left(a + 6b + \frac{26}{5}\right) &= -\frac{101}{25}, \\ (5a + 5b - 1)(5a + 30b + 26) &= -101. \end{aligned}$$

Protože $5a + 5b - 1 \equiv -1 \pmod 5$ a $5a + 30b + 26 \equiv 1 \pmod 5$, vyhovují ze čtyř vyjádření čísla -101 ve tvaru součinu dvou celých čísel jen následující dvě:

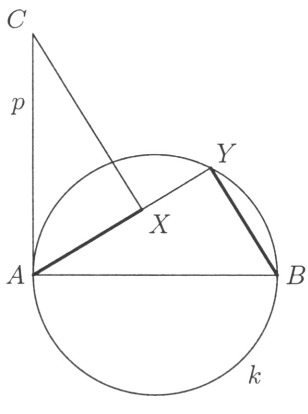
$5a + 5b - 1 = -1$, $5a + 30b + 26 = 101$, a tedy $a = -3$, $b = 3$;
$5a + 5b - 1 = -101$, $5a + 30b + 26 = 1$, a tedy $a = -23$, $b = 3$.

B – I – 2

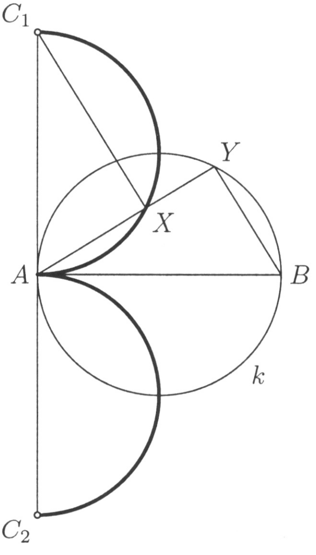
Jestliže $Y = B$, potom $X = A$. Nechť $Y \neq B$. Označme p přímku procházející bodem A a kolmou na AB a C ten bod přímky p ležící v polorovině ABY, pro nějž platí $|AC| = |AB|$ (obr. 8). Podle zadání platí $|AX| = |BY|$. Úhel AYB je podle Thaletovy věty pravý, proto $|\sphericalangle ABY| = 90° - |\sphericalangle YAB| = |\sphericalangle CAX|$. Trojúhelníky ABY a CAX jsou tedy shodné podle věty *sus*. Odtud vyplývá, že $|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle AYB| = 90°$. Bod X proto leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem AC.

Nechť naopak X je libovolný vnitřní bod této půlkružnice a Y průsečík přímky AX s kružnicí k ($Y \neq A$). Trojúhelníky CAX a ABY jsou shodné podle věty *usu*, a proto $|AX| = |BY|$. Bod X tedy patří do hledané množiny.

Hledanou množinou všech bodů X je sjednocení dvou půlkružnic nad průměry AC_1 a AC_2 ležících v téže polorovině jako bod B; C_1 a C_2 jsou body ležící na kolmici vedené bodem A k přímce AB, přičemž $|AC_1| = |AC_2| = |AB|$ (obr. 9). Bod A do hledané množiny patří, body C_1 a C_2 nikoliv.



Obr. 8



Obr. 9

B – I – 3

Ke konstrukci množiny po dvou nesoudělných trojmístných složených čísel s velkým počtem prvků můžeme využít toho, že mocniny dvou různých prvočísel jsou nesoudělné. Množina

$$\{2^7, 3^5, 5^3, 7^3, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$$

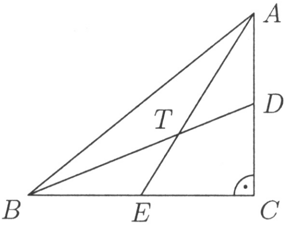
obsahuje 11 po dvou nesoudělných trojmístných čísel a není v ní žádné prvočíslo. Pro další prvočíslo 37 už platí $37^2 > 1\,000$, takže každé složené trojmístné číslo je dělitelné aspoň jedním prvočíslem menším než 37.

Dokážeme, že každá aspoň dvanáctiprvková množina po dvou nesoudělných trojmístných čísel už obsahuje prvočíslo. Množinu všech složených trojmístných čísel lze rozdělit na 11 podmnožin A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}, A_{19}, A_{23}, A_{29}, A_{31}, kde A_i obsahuje ta čísla, jejichž nejmenším prvočinitelem je číslo i. Každá dvě různá čísla z téže množiny A_i jsou soudělná. Nechť množina B trojmístných po dvou nesoudělných čísel má aspoň 12 prvků. Kdyby v B byla pouze složená čísla, podle Dirichletova principu by B obsahovala dvě čísla z téže množiny A_i; tato čísla by ale byla soudělná. Proto množina B musí obsahovat aspoň jedno prvočíslo.

Hledané nejmenší číslo k je tedy 12.

B – I – 4

Konvexní čtyřúhelník je tečnový, právě když součty délek jeho protilehlých stran jsou stejné.



Obr. 10

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ (obr. 10). Podle Pythagorovy věty platí

$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Protože těžiště trojúhelníku dělí těžnici v poměru 1 : 2, je

$$|TD| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |TE| = \frac{1}{3}|AE| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když $|CD| + |TE| = |EC| + |TD|$, tedy právě když

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Je-li $a = b$, rovnost zřejmě platí.

Je-li $a > b$, je $a^2 + \frac{1}{4}b^2 > b^2 + \frac{1}{4}a^2$, takže

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Podobně je-li $a < b$, je

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Čtyřúhelník $CDTE$ je tedy tečnový, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označíme-li běžným způsobem a, b, c strany daného trojúhelníku a t_a, t_b, t_c délky jeho těžnic, bude čtyřúhelník $CDTE$ tečnový, právě když

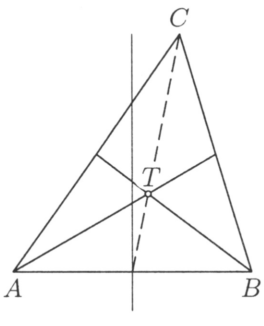
$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_a \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{3}(t_a - t_b). \tag{1}$$

Ukážeme, že uvedená rovnost platí, právě když $a = b$.

V libovolném trojúhelníku ABC totiž platí

$$a < b, \quad \text{právě když} \quad t_a > t_b. \tag{2}$$

To je zřejmé z toho, že těžiště T uvažovaného trojúhelníku leží ve stejné polorovině určené osou strany AB jako vrchol C (obr. 11), přičemž $|TA| = \frac{2}{3}t_a$, $|TB| = \frac{2}{3}t_b$.



Obr. 11

Je-li $a = b$, rovnost (1) platí. Naopak je-li např. $a < b$, je podle (1) a (2)

$$0 > \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{3}(t_a - t_b) > 0,$$

což nelze. Proto $a = b$.

Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když je (pravoúhlý) trojúhelník ABC rovnoramenný.

B – I – 5

Dělením mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$ mnohočlenem $x^2 + px + q$ zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q = {} & (x^2 + px + q)(x^2 - px + p^2 + p - q) + \\ & + (2pq - p^3 - p^2)x + q - p^2q - pq + q^2. \end{aligned}$$

Mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$, právě když je zbytek $(2pq - p^3 - p^2)x + q - p^2q - pq + q^2$ nulový mnohočlen, tedy právě když platí současně

$$2pq - p^3 - p^2 = p(2q - p^2 - p) = 0$$

a

$$q - p^2q - pq + q^2 = q(1 - p^2 - p + q) = 0.$$

Je-li $p = 0$, potom $q = 0$ nebo $q = -1$.

Je-li $q = 0$, potom $p = 0$ nebo $p = -1$.

Je-li $p \neq 0$ i $q \neq 0$, potom musí platit $2q - p^2 - p = 0$ a $1 - p^2 - p + q = 0$. Z druhé rovnice vyjádříme $q = p^2 + p - 1$. Po dosazení do první rovnice máme $2p^2 + 2p - 2 - p^2 - p = p^2 + p - 2 = (p+2)(p-1) = 0$ a odtud $p = 1$, $q = 1$ nebo $p = -2$, $q = 1$.

Vyhovuje tedy pět dvojic (p, q), a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

Jiné řešení. Mnohočlen x^2+px+q je dělitelem mnohočlenu x^4+px^2+q, právě když existují taková reálná čísla a a b, že

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q &= (x^2 + px + q)(x^2 + ax + b) = \\ &= x^4 + (a+p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (bp + aq)x + bq. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme podmínky

$$a+p=0, \tag{1}$$

$$b+ap+q=p, \tag{2}$$

$$bp+aq=0, \tag{3}$$

$$bq=q. \tag{4}$$

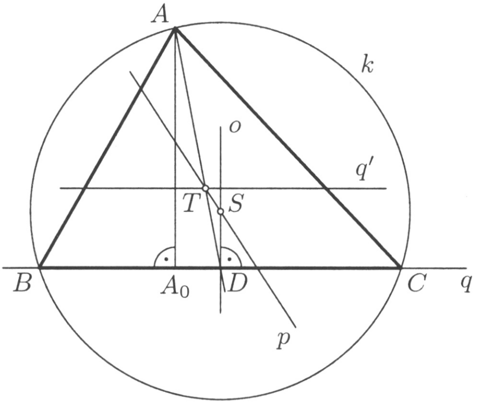
Jestliže $q=0$, potom podle (3) $p=0$ nebo $b=0$. Dosazením $b=0$ do (2) s využitím (1) dostaneme $-p^2=p$, takže kromě $p=0$ vyhovuje i $p=-1$.

Jestliže $q\neq 0$, vyplývá ze (4) $b=1$. Vztahy (3) a (1) potom dávají $p-pq=0$, tedy $p=0$ nebo $q=1$. V prvním případě musí být podle (2) $q=-1$, ve druhém $1-p^2+1=p$ a odtud $p=1$ nebo $p=-2$.

Vyhovuje tedy pět dvojic (p,q), a to $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(-2,1)$.

B – I – 6

Předpokládejme, že ABC je hledaným trojúhelníkem. Jeho strana BC leží na přímce q, která prochází bodem A_0 a je kolmá na úsečku AA_0. Na této přímce leží i střed D strany BC. Těžiště T je obrazem bodu D ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$, leží proto na přímce q', která je obrazem přímky q ve zmíněné stejnolehlosti. Střed S opsané kružnice leží na ose o strany BC čili na přímce, která prochází bodem D a je rovnoběžná s úsečkou AA_0 (obr. 12).



Obr. 12

Konstrukce: Bodem A_0 vedeme přímku q kolmou na úsečku AA_0. Sestrojíme obraz q' přímky q ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$. Označíme T průsečík přímky q' s přímkou p a D průsečík přímky AT s přímkou q. Bodem D vedeme rovnoběžku o s AA_0 a její průsečík s přímkou p označíme S. Průsečíky kružnice k se středem S a poloměrem $|SA|$ s přímkou q jsou vrcholy B a C hledaného trojúhelníku.

Důkaz: Úsečka AA_0 je kolmá na stranu BC, je to tedy výška trojúhelníku ABC. Bod S ležící na přímce p je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Ze shodnosti trojúhelníků BDS a CDS (Ssu) vyplývá, že D je střed strany BC. Proto je AD těžnice a T těžiště trojúhelníku ABC (platí totiž $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$).

Diskuse: Není-li přímka p rovnoběžná s úsečkou AA_0 ani na ni kolmá, jsou body T a S jednoznačně určeny. V tom případě má úloha právě jedno řešení (až na označení bodů B a C), pokud kružnice k protíná přímku q ve dvou různých bodech; neprotíná-li k přímku p ve dvou různých bodech, nemá úloha řešení.

Je-li úsečka AA_0 částí přímky p, není bod S jednoznačně určen; vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou BC, která má střed v bodě A_0. Je-li úsečka AA_0 rovnoběžná s přímkou p, ale neleží na ní, nemá úloha řešení.

Je-li přímka p kolmá na úsečku AA_0, má úloha řešení pouze tehdy, jsou-li přímky q' a p totožné. To nastane, jestliže přímka p protíná úsečku AA_0 v bodě V, pro nějž platí $|AV| = 2|A_0V|$. V takovém případě můžeme bod T zvolit na p kdekoliv a úloha má nekonečně mnoho řešení.

B – S – 1

Vydělením mnohočlenu $x^4 + ax^2 + b$ mnohočlenem $x^2 + bx + a$ zjistíme, že

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 - bx + b^2) + (ab - b^3)x + (b - ab^2).$$

Mnohočlen x^4+ax^2+b je dělitelný mnohočlenem x^2+bx+a, právě když je zbytek $(ab-b^3)x+(b-ab^2)$ nulový mnohočlen, tedy $ab-b^3 = b(a-b^2) = 0$ a současně $b-ab^2 = b(1-ab) = 0$. Je-li $b = 0$, jsou obě podmínky splněny. Pro $b \neq 0$ musí platit $a - b^2 = 0$ a $1 - ab = 0$. Odtud $a = b^2$, $1 - b^3 = 0$, a tedy $a = b = 1$.

Závěr: Mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$ právě tehdy, je-li $b = 0$ (a a libovolné) nebo $a = b = 1$.

Jiné řešení. Mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$, právě když existují taková reálná čísla p, q, že $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 + px + q)$. Roznásobením a porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

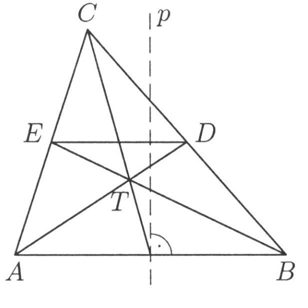
$$p + b = 0, \quad q + bp + a = a, \quad ap + bq = 0, \quad aq = b.$$

Z první rovnice vyjádříme $p = -b$ a z druhé $q = -bp = b^2$, dosazením do třetí a čtvrté máme $-ab + b^3 = 0$, $ab^2 = b$. Řešení dokončíme stejně jako v předchozím případě.

B – S – 2

Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku je podílem jeho obsahu a polovičního obvodu.

Trojúhelníky ADE a BDE mají zřejmě stejný obsah, protože mají společnou stranu DE a shodnou výšku na ni (AB je rovnoběžné s DE). Stejný obsah tedy mají i trojúhelníky ATE a BDT, protože obsahy obou trojúhelníků se od obsahu zmíněných trojúhelníků liší právě o obsah „společného“ trojúhelníku DET (obr. 13).



Obr. 13

Označme p osu úsečky AB. Je-li strana BC delší než strana AC, leží bod C v téže polorovině s hraniční přímkou p jako bod A. Proto v této polorovině leží i těžiště T. Jeho vzdálenost od bodu A rovná $\frac{2}{3}t_a$ je tedy menší než jeho vzdálenost od bodu B rovná $\frac{2}{3}t_b$. To znamená, že $t_a < t_b$. Trojúhelník ATE má obvod $o_1 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a$, trojúhelník BDT má obvod $o_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b$. Z nerovností $b < a$ a $t_a < t_b$ proto vyplývá

$$o_2 - o_1 = \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{3}(t_b - t_a) > 0,$$

neboli $o_1 < o_2$.

Trojúhelníky AET a BDT mají stejný obsah a první z nich má menší obvod, proto má kružnice vepsaná trojúhelníku AET větší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku BDT.

B – S – 3

Číslo $n^2 + 15n = n(n + 15)$ má být dělitelné číslem $33\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot \cdot 5^3 \cdot 11$. Kdyby nebylo n dělitelné třemi, nebylo by třemi dělitelné ani číslo $n + 15$, a tedy ani součin $n(n + 15)$. Ze stejného důvodu musí být n dělitelné pěti, a tedy i patnácti. Pišme proto $n = 15k$. Aby bylo číslo $n(n+15) = 15^2 k(k+1)$ dělitelné číslem $8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$, musí být součin $k(k+1)$ dvou po sobě jdoucích přirozených čísel dělitelný osmi, pěti a jedenácti. Jeden z činitelů k, $k+1$ musí být dělitelný aspoň dvěma z těchto tří čísel, takže musí být dělitelný některým z čísel 40, 55, 88. Nejmenším takovým číslem je 40. Jedenácti však není dělitelné ani číslo 40, ani žádný z jeho sousedů 39, 41. Dalším kandidátem je číslo 55, součin čísel 5 a 11. Je dělitelný osmi některý z jeho sousedů? Ano, větší z nich, takže součin $55 \cdot 56$ je dělitelný osmi, pěti i jedenácti; máme tedy $k = 55$. Hledané nejmenší číslo je tudíž $n = 15k = 825$.

B – II – 1

Dělením mnohočlenu $x^4 + ax^2 + bx + c$ mnohočlenem $x^2 + x + 1$ zjistíme, že platí

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a).$$

Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když je zbytek při dělení nulový mnohočlen, tedy $b - a + 1 = 0$ a současně $c - a = 0$; odtud $b = a - 1$, $c = a$.

Potom

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a - 1)^2 + a^2 = 3a^2 - 2a + 1 = 3\Big(a - \frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{2}{3}.$$

Tento výraz má nejmenší hodnotu pro $a = \frac{1}{3}$; snadno dopočítáme $b = a - 1 = -\frac{2}{3}$, $c = a = \frac{1}{3}$.

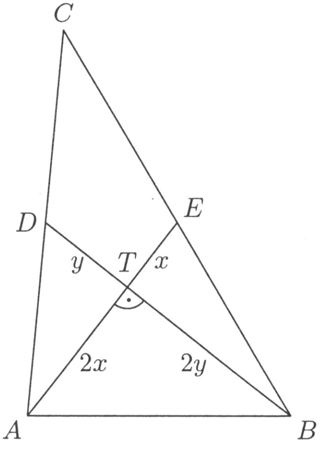
Jiné řešení. Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když existují reálná čísla p, q, pro něž

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním odpovídajících koeficientů dostaneme čtyři rovnice $p+1=0$, $q+p+1=a$, $q+p=b$, $q=c$. Z nich vyjádříme $p=-1$, $q=a$, $c=a$, $b=a-1$ a pokračujeme jako v prvním řešení.

B – II – 2

Označme D střed strany AC, E střed strany BC a T těžiště trojúhelníku ABC (obr. 14). Označíme-li dále $3x$ a $3y$ délky těžnic t_a a t_b, máme



Obr. 14

$|AT|=2x$, $|ET|=x$, $|BT|=2y$, $|DT|=y$. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ATD, BET, ABT jsou pravoúhlé, takže podle Pythagorovy věty platí

$$(2x)^2+y^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$x^2+(2y)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(2x)^2+(2y)^2=c^2.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $5(x^2+y^2)=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ a po dosazení do třetí rovnice máme $c^2=4(x^2+y^2)=\frac{1}{5}(a^2+b^2)$. Numericky pak vzhledem k tomu, že $\frac{1}{5}(22^2+19^2)=169$, vychází $c=13\,\mathrm{cm}$.

B – II – 3

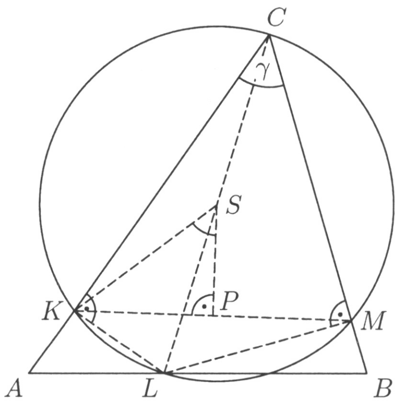
Číslice $0, 1, 2, 3$ a 4 nazvěme malé (zkráceně m), číslice $5, 6, 7, 8$ a 9 naopak velké (zkráceně v). Pravidelným střídáním malých a velkých číslic vždy vznikne vlnité číslo.

Čísel tvaru $vmvmvmvmvm$ je $(5!)^2$, čísel tvaru $mvmvmvmvmv$ je $4 \cdot 4! \cdot 5!$. Těch vlnitých čísel, která vzniknou pravidelným střídáním malých a velkých číslic, je tedy $5!(5! + 4 \cdot 4!) = 5! \cdot 4! \cdot (5 + 4) = 120 \cdot 24 \cdot 9 = 25\,920 > 25\,000$.

Poznámka. Všech desetimístných vlnitých čísel s vesměs různými číslicemi je $93\,106$.

B – II – 4

Protože jsou úhly LKC a LMC pravé, leží body K a M na Thaletově kružnici nad průměrem CL (obr. 15). Podle věty o obvodovém úhlu pří-



Obr. 15

sluší tětivě KM středový úhel velikosti 2γ, proto $|KM| = |CL| \sin\gamma$ (v pravoúhlém trojúhelníku KPS, kde P je střed úsečky KM a S střed úsečky CL, je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|, |\sphericalangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je tedy nejkratší, právě když je nejkratší úsečka CL; to nastává právě tehdy, je-li L pata výšky z vrcholu C na stranu AB.