55. ročník matematické olympiády na středních školách

Přípravná soustředění před 47. MMO

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 55. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2005/2006. 47. mezinárodní matematická olympiáda. 18. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2007. pp. 141–144.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405117

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Přípravná soustředění před 47. MMO

Výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu proběhlo od 10.–14. dubna v Kostelci nad Černými lesy. Na soustředění bylo pozváno 8 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A s výjimkou těch, kteří se rozhodli dát přednost účasti na Mezinárodní fyzikální olympiádě (Pechal, Scholle a Motloch). Nepozvali jsme také vítěze letošního celostátního kola, protože v době Mezinárodní matematické olympiády dosáhne 20 let, a tak se dle uznávaných pravidel nemůže této soutěže zúčastnit. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a posloužilo ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jaroslav Hančl	4/4 GMK Bílovec	89,5
Jakub Opršal	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	80
Zbyněk Konečný	3/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	79,5
Vojtěch Říha	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	64,5
Pavel Šalom	8/8 G Rožnov pod Radhoštěm	56,5
Jan Uhlík	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	48
Anežka Faltýnková	3/4 GJŠ Přerov	47,5
Tomáš Jeziorský	3/4 GMK Bílovec	40

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Jaroslav Zhouf* (10. 4.),
dr. *Karel Horák* (11. 4.),
dr. *Pavel Calábek* (12. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (13. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (14. 4.).

Úlohy zadané na přípravných soustředěních

1. Na tabuli jsou napsána tři čtyřmístná přirozená čísla. Jestliže v jejich zápise zaměníme všechny dvojky trojkami, bude součet nových čísel roven 10 972. Jestliže v zápise původních čísel zaměníme všechny čtyřky sedmičkami, bude součet nových čísel roven 11 654. Čemu se rovná součet původních tří čísel?

2. Ve městě vede každá ulice buď ze severu na jih, nebo z východu na západ. Automobil právě dokončil projížďku městem, při které odbočil právě stokrát doleva. Kolikrát přitom mohl odbočit doprava, jestliže žádné místo neprojel dvakrát a nakonec se vrátil na výchozí místo? Každá ulice je průjezdná v obou směrech.

3. Nechť je dána funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou celá čísla, $a \neq 0$. Dále víme, že rovnice $f(x) = 0$ má aspoň jeden celočíselný kořen. Určete $f(1)$, jestliže $f\big(f(1)\big) = 1$.

4. V trojúhelníku ABC ($|AB| < |BC|$) je bod I střed kružnice vepsané, M je střed strany AC, N je střed oblouku ABC opsané kružnice. Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$.

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n-místné číslo dělitelné 5^n, jehož všechny číslice jsou liché.

6. Je dán trojúhelník ABC a kružnice obsahující jeho vrcholy A, B, která protíná úsečky AC a BC postupně v bodech D a E, přičemž polopřímky BA a ED se protínají v bodě F. Označme M průsečík přímek BD a CF. Dokažte, že $|MF| = |MC|$, právě když $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$.

7. V rovině je dán trojúhelník ABC a uvnitř bod P. Označme postupně D, E, F průsečíky přímek PA, PB, PC se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC],$$

právě když bod P leží na některé těžnici trojúhelníku ABC. (Symbol $[XYZ]$ označuje obsah trojúhelníku XYZ.)

8. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že

$$f(m+n)f(m-n) = f(m^2)$$

platí pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.

9. Nechť S je množina všech funkcí $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ takových, že $f(1)=1$ a platí

$$f(x)+f(y) \leqq f(x+y) \quad \text{pro všechna } x,y \in [0,1],\ x+y \leqq 1.$$

Určete nejmenší číslo k tak, že pro všechny funkce $f \in S$ a pro všechna $x \in [0,1]$ platí $f(x) \leqq kx$.

10. Určete všechna přirozená čísla m, n tak, že platí

$$\left\lfloor \frac{m^2}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \right\rfloor + mn.$$

11. Nechť p je prvočíslo a q mnohočlen s celočíselnými koeficienty takový, že pro každé přirozené číslo k platí, že zbytek po dělení čísla $q(k)$ číslem p je buď 0, nebo 1. Dále platí $q(0)=0$ a $q(1)=1$. Dokažte, že stupeň mnohočlenu q je alespoň $p-1$.

12. Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $x^2+y^2+z^2+$ $+\,2xyz=1$. Dokažte, že pro ně platí nerovnost

$$2(x+y+z) \leqq 3.$$

Kdy nastane rovnost?

13. V rovině uvažujme kružnice k_1 a k_2, které se protínají v bodech A, B. Tečna ke kružnici k_2 sestrojená v bodě A protíná kružnici k_1 v bodě C_1 ($C_1 \neq A$); tečna ke kružnici k_1 sestrojená v bodě A protíná kružnici k_2 v bodě C_2 ($C_2 \neq A$). Přímka C_1C_2 protíná kružnici k_1 v bodě D ($C_1 \neq$ $\neq D \neq B$). Dokažte, že přímka BD prochází středem úsečky AC_2.

14. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Nechť P je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB, dále nechť I_c značí střed kružnice vně připsané přeponě AB uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|CP|}{|PI_c|} \leqq \sqrt{2}-1.$$

Kdy nastane rovnost?

15. Zapište v desítkové soustavě číselnou hodnotu zlomku

$$\frac{1\cdot\binom{2006}{1}^2+2\cdot\binom{2006}{2}^2+3\cdot\binom{2006}{3}^2+\ldots+2006\cdot\binom{2006}{2006}^2}{\binom{2006}{0}^2+\binom{2006}{1}^2+\binom{2006}{2}^2+\binom{2006}{3}^2+\ldots+\binom{2006}{2006}^2}.$$

16. Osa vnitřního úhlu BAC trojúhelníku ABC protne stranu BC v bodě K. Vyjádřete $|AK|$ pomocí délek a, b, c stran ΔABC ve tvaru

$$|AK| = \frac{\sqrt{L_1L_2L_3L_4}}{L_5}$$

s vhodnými činiteli $L_i = u_ia + v_ib + w_ic$ s reálnými koeficienty u_i, v_i, w_i.

17. Napište příklad tří přirozených čísel a, b, c tak, aby číslo a bylo násobkem devíti, ne však násobkem jedenácti, aby číslo b bylo násobkem jedenácti, ne však násobkem devíti, a aby platilo $a^{99} + b^{99} = c^{100}$.

18. Máme n mincí $M_1, M_2, \ldots, M_n$, jejichž stranám říkáme „hlava“ a „orel“. Pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ je mince M_k natolik falešná, že při jejím hodu padne „hlava“ s pravděpodobností $1 : (2k + 1)$. Hodíme-li každou z těchto n mincí jedenkrát, s jakou pravděpodobností padne „hlava“ lichý počet krát? Odpověď zapište ve tvaru $P(n) : Q(n)$, kde $P(n)$ a $Q(n)$ jsou mnohočleny proměnné n (tedy jejich stupně a koeficienty jsou na čísle n nezávislé).

19. Rozhodněte, zda lze vybrat 2 006 různých přirozených čísel menších než 100 000 tak, aby žádné z nich nebylo rovno aritmetickému průměru jiných dvou vybraných čísel.

20. Bod M je středem strany AC daného trojúhelníku ABC. Na prodloužení strany BC za bod B je vybrán bod D tak, že $|BD| = |BA|$. Osa úhlu ABC protne přímku MD v bodě P. Dokažte, že úhly BAP a ACB jsou shodné.

21. Na listě papíru narýsujeme všechny strany a úhlopříčky některého konvexního n-úhelníku. Tyto úsečky pak postupně odstraňujeme mazáním podle následující procedury: Vybereme libovolné čtyři různé vrcholy A, B, C, D takové, že úsečky AB, BC, CD, DA jsou (zatím) narýsovány, a jednu z těchto čtyř úseček umažeme. Proceduru opakujeme tak dlouho, dokud to je možné. Pro dané $n \geqq 4$ určete nejmenší možný počet úseček, které nakonec v n-úhelníku zůstanou narýsovány.