

54. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie Z9

In: Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor); Jaroslav Zhouf (editor): 54. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2004/2005. 46. mezinárodní matematická olympiáda. 17. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. pp. 128–131.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405096>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kategorie Z9

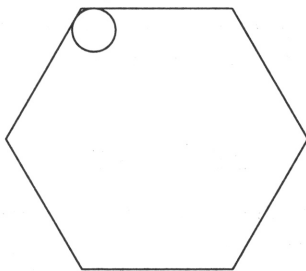
Texty úloh

Z9 – I – 1

Dvoustupňové číslo se nazývá *exkluzivní*, jestliže má následující vlastnost: číslice exkluzivního čísla navzájem vynásobíme, po přičtení součtu všech číslic exkluzivního čísla k předchozímu výsledku získáme toto exkluzivní číslo. Například 79 je exkluzivní, neboť $79 = 7 \cdot 9 + (7 + 9)$. Najděte všechna exkluzivní čísla. (P. Tlustý)

Z9 – I – 2

Uvnitř pravidelného šestiúhelníku o straně délky $2\sqrt{3}$ cm se pohybuje kruh o průměru 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu pravidelného šestiúhelníku (obr. 46). Vypočítejte obsah té části šestiúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem. (M. Dillingerová)



Obr. 46

Z9 – I – 3

Kolika způsoby lze vybrat sedm čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 8, 9\}$ tak, aby jejich součet byl dělitelný třemi? (P. Tlustý)

Z9 – I – 4

Jsou dány kruh a čtverec se stejným obsahem. Do daného kruhu vepíšeme čtverec, do daného čtverce vepíšeme kruh. Který z vepsaných obrazců má větší obsah?

(*M. Volfová*)

Z9 – I – 5

Pan Sudý měl sudý počet oveček, pan Lichý lichý počet oveček. Počet všech oveček dohromady tvořil trojmístné číslo, které mělo všechny číslice stejné. Každé ovečce pana Sudého se narodily tři ovečky, každé ovečce pana Lichého dvě ovečky. Jednoho dne však vlk zadával tři ovečky panu Sudému. Teď má pan Sudý stejně velké stádo jako pan Lichý. Kolik oveček měl původně každý z chovatelů?

(*L. Hozová*)

Z9 – I – 6

Pět dětí postupně říká: „Včera bylo pondělí.“ „Dnes je čtvrtek.“ „Pozítíí bude pátek.“ „Zítřa bude sobota.“ „Předevčírem bylo úterý.“ Pokud byste věděli, kolik z dětí lhalo, hned by bylo jasné, který je den. Který je tedy den?

(*Š. Ptáčková*)

Z9 – II – 1

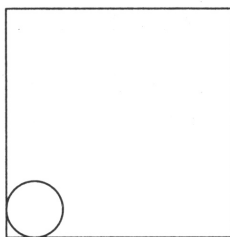
Princ Zrychlený pozval princeznu Zpomalenou na svůj hrad. Když dlouho nešla, vydal se jí naproti. Po dvou dnech putování ji potkal v jedné pětině její cesty. Spolu už pokračovali v cestě dvakrát rychleji, než když cestovala princezna sama. Na princův hrad dorazili druhou sobotu od vzájemného setkání. Který den se potkali, jestliže princezna vyrazila ze svého hradu v pátek?

(*M. Dillingerová*)

Z9 – II – 2

Uvnitř čtverce o straně 4 cm se pohybuje kruh s průměrem 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu čtverce (obr. 47). Vypočítejte obsah té části čtverce, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem.

(*M. Dillingerová*)



Obr. 47

Z9 – II – 3

Do okresního kola postoupili Petr, Mojmir, Karel a Eva. Ve škole pak sdělili:

Eva: „Z naší čtveřice jsem nebyla ani první, ani poslední.“

Mojmír: „Nebyl jsem z naší čtveřice poslední.“

Karel: „Byl jsem z nás první.“

Petr: „Já jsem byl z naší čtveřice poslední.“

Tři mluvili pravdu, jeden lhal. Kdo z nich byl v okresním kole nejlepší?

(*M. Volfová*)

Z9 – II – 4

Uklízečka stírala schodiště v mrakodrapu. Aby jí práce lépe ubíhala, počítala umyté schody. V době, kdy měla umytu přesně polovinu schodů, si udělala přestávku. Za chvíli se dala znovu do práce a chtěla také pokračovat v počítání schodů. Když ale vzpomínala na počet již umytých schodů, dopustila se omylu. Správné trojčiferné číslo „přečetla“ odzadu, čímž vzniklo číslo nižší, a počítala od tohoto čísla. Po setření všech schodů došla k číslu 746. Kolik schodů mohla umýt ve skutečnosti?

(*L. Šimůnek*)

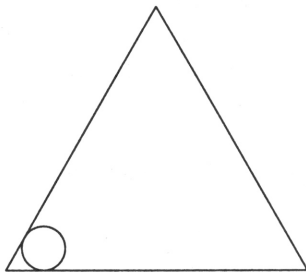
Z9 – III – 1

Přirozené dvojmístné číslo N strašně závidělo svému kamarádovi, dvojmístnému desetinnému číslu X , jeho desetinnou čárku. Tak mu X tu svou darovalo. Číslo N si ji vložilo mezi své dvě číslice a vůbec mu nevadilo, že je teď o 567 desetin menší, než bylo předtím. Také X bylo spokojené, protože teď bylo na číselné ose svému příteli N dvakrát blíže

než předtím. Zjistěte, o kterých dvou číslech N a X je tato příhoda.
(*S. Bednářová*)

Z9 – III – 2

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku se stranou délky $4\sqrt{3}$ cm se pohybuje kruh s průměrem 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu trojúhelníku (obr. 48). Vypočítejte obsah té části trojúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem.
(*M. Dillingerová*)



Obr. 48

Z9 – III – 3

Maminka připravila na oslavu Jirkových narozenin pomerančový džus tak, že smíchala 1 litr 100% džusu s $\frac{2}{3}$ litru 30% džusu. Jirka si odlil do skleničky a ochutnal. Protože má radši slabší koncentraci, dolil připravený džus na původní množství. Výsledný džus měl koncentraci 61,2%, a to mu vyhovovalo. Jaké množství džusu si Jirka odlil do skleničky?

(*M. Raabová*)

Z9 – III – 4

Je dán trojúhelník. Jestliže jeho nejdelší stranu zkrátíme o třetinu její délky, nejkratší stranu zdvojnásobíme a zbývající stranu zmenšíme o 2 cm, dostaneme trojúhelník shodný s původním trojúhelníkem. Jaké jsou rozměry tohoto trojúhelníku?
(*M. Raabová*)