52. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: 52. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2002/2003. 44. mezinárodní matematická olympiáda. 15. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2004. pp. 66–96.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405060

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ celých čísel s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje podmínku

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \ldots \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének „+" a „−" pro libovolné $n > 1$, například $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2 + x_1$, $x_4 = x_3 - x_2 - x_1$, ... Pro dané n určete všechny možné hodnoty x_n. *(J. Földes)*

A – I – 2

Na přímce p jsou dány různé body A, B, C v tomto pořadí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, které se dotýkají přímky p po řadě v bodech A, B, C. Kružnice k_A, k_B mají přitom vnější dotyk v bodě P a kružnice k_B, k_C vnější dotyk v bodě Q. Určete všechny hodnoty poloměru kružnice k_B, pro něž je trojúhelník BPQ rovnoramenný.

(J. Zhouf)

A – I – 3

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2},$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku. *(P. Kaňovský)*

A – I – 4

Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základu $z \geqq 5$ platí následující kriterium dělitelnosti: trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n, právě když je číslem n dělitelné číslo $c+3b-4a$. (*P. Černek*)

A – I – 5

V rovině jsou dány tři různé body K, L, M, které v tomto pořadí leží na přímce. V této rovině najděte množinu všech vrcholů C čtverců $ABCD$ takových, že bod K leží na straně AB, bod L na úhlopříčce BD a bod M na straně CD. (*J. Šimša*)

A – I – 6

Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných $1, 2, \ldots, 6$ následující hru. Na začátku je umístěna na pole s číslem 2 figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi, posune se figurka na pole s číslem o 1 menším, jinak na pole s číslem o 1 větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B, dostane-li se figurka na pole s číslem 1 resp. 6. S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A? (*P. Černek*)

A – S – 1

Řekneme, že tři navzájem různá přirozená čísla tvoří součtovou trojici, je-li součet prvních dvou z nich roven číslu třetímu. Určete, jaký největší počet součtových trojic se může nacházet v množině dvaceti přirozených čísel. (*P. Černek*)

A – S – 2

V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Společné tečny obou kružnic se dotýkají kružnice k_1 v bodech P a Q. Dokažte, že přímka PQ se dotýká kružnice k_2. (*J. Földes*)

A – S – 3

Zjistěte, pro které reálné číslo p mají rovnice

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

společný kořen. (*P. Černek*)

A – II – 1

Najděte základy z všech číselných soustav, ve kterých je čtyřmístné číslo $(1001)_z$ dělitelné dvojmístným číslem $(41)_z$. *(P. Černek)*

A – II – 2

Uvnitř strany AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolte bod S tak, aby trojúhelník SXY, kde X a Y jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC, měl nejmenší možný obsah.

(P. Černek)

A – II – 3

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\log_x(y+z) = p,$$
$$\log_y(z+x) = p,$$
$$\log_z(x+y) = p$$

s neznámými x, y, z a nezáporným celočíselným parametrem p.

(J. Švrček)

A – II – 4

Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje pro každé $n > 1$ podmínku

$$x_n = x_{n-1}^{\pm 1} + x_{n-2}^{\pm 1} + \ldots + x_1^{\pm 1}$$

s vhodnou volbou znamének „+“ a „−“ v exponentech mocnin.

a) Rozhodněte, zda některý člen takové posloupnosti musí být větší než 1 000.

b) Zjistěte nejmenší možnou hodnotu členu $x_{1\,000\,000}$.

c) Dokažte, že nerovnost $x_n < 4$ nemůže platit pro devět členů x_n takové posloupnosti. *(J. Földes)*

A – III – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - xy + y^2 = 7,$$
$$x^2y + xy^2 = -2.$$

(J. Földes)

A – III – 2

Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF protaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte. (*M. Tancer*)

A – III – 3

Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje pro každé $n > 1$ podmínku

$$x_n = \pm(n-1)x_{n-1} \pm (n-2)x_{n-2} \pm \ldots \pm 2x_2 \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének „+" a „−". Rozhodněte, zda je možné, aby nerovnost $x_n \neq 12$ platila pouze pro konečně mnoho indexů n.

(*P. Černek*)

A – III – 4

V rovině je dán tupý úhel AKS. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho strana BC ležela na přímce KS, bod S byl jejím středem a bod K jejím průsečíkem s osou protilehlého úhlu BAC. (*P. Leischner*)

A – III – 5

Ukažte, že v číselné soustavě s libovolným základem $z \geqq 3$ existují dvojmístná čísla A a B, která se liší jen pořadím svých číslic a mají tuto vlastnost: kvadratická rovnice $x^2 - Ax + B = 0$ má v oboru reálných čísel dvojnásobný kořen. Dokažte rovněž, že pro daný základ z je taková dvojice A, B jediná. Například v desítkové soustavě ($z = 10$) to jsou jedině čísla $A = 18$ a $B = 81$. (*J. Šimša*)

A – III – 6

Je-li součin kladných čísel a, b, c roven 1, pak platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq a + b + c.$$

Dokažte. (*P. Kaňovský*)

A – I – 1

Vypišme, jaké hodnoty mohou nabývat první členy uvedené posloupnosti. Dostaneme

$$x_1 = 1, \quad x_2 \in \{-1, 1\}, \quad x_3 \in \{-2, 0, 2\}, \quad x_4 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\},$$
$$x_5 \in \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Všimněme si, že všechny členy, které jsme vypsali, jsou celá čísla. Dále je zřejmé, že pro $i > 2$ je každý člen x_i sudé číslo. (Další pozorování je, že pokud najdeme posloupnost, pro kterou $x_i = a$ pro nějaké číslo a a dané $i > 1$, tak existuje i posloupnost, pro kterou $x_i = -a$.)

Zjistěme, jakou největší a jakou nejmenší hodnotu může nabývat číslo x_n (v závislosti na n). Označme a_i největší hodnotu, kterou může nabývat člen x_i. Protože posloupností délky i splňujících dané vlastnosti je jen konečný počet, maximum a_i existuje a je zřejmě kladné. K číslu a_i musí pro každé $i > 1$ existovat posloupnost $x_1, \ldots, x_{i-1}$, pro kterou platí

$$a_i = \pm x_{i-1} \pm \ldots \pm x_1 \leqq |x_{i-1}| + \ldots + |x_1| \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1. \qquad (1)$$

Víme, že $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Pomocí předcházejícího vzorce dokažme, že $a_i = 2^{i-2}$ pro každé $i > 1$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k i.

1. Tvrzení platí pro $i = 1$ ($a_1 = 1$) a $i = 2$ ($a_2 = 1$).

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé k, $2 \leqq k \leqq i - 1$, a dokažme, že tvrzení platí i pro $k = i$. Z odhadu (1), indukčního předpokladu a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme

$$a_i \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1 = 2^{i-3} + \ldots + 2 + 1 + 1 = \frac{2^{i-2} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{i-2}.$$

Uvažujme posloupnost $x_1 = 1$ a $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pro každé $i > 1$. V tomto případě bude podle předchozího platit $x_i = 2^{i-2}$, takže $a_i = 2^{i-2}$ pro každé $i > 1$.

Podobně dokážeme, že nejmenší hodnota, jaké může x_n nabýt, je -2^{n-2}.

Zjistili jsme, že pro každé $n > 1$ leží člen x_n libovolné uvažované posloupnosti v množině $\{-2^{n-2}, -2^{n-2} + 2, -2^{n-2} + 4, \ldots, 2^{n-2}\}$, kterou označíme M_n. Dokažme nakonec, že x_n může pro $n > 1$ nabývat libovolnou hodnotu z množiny M_n.

Volme znaménka následujícím způsobem: $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pro $i < n$. Pro takovou posloupnost platí $x_i = 2^{i-2}$ pro $1 < i < n$. Dokažme, že v rovnosti $x_n = \pm 2^{n-3} \pm 2^{n-2} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$ lze znaménka vybrat tak, aby se hodnota x_n rovnala libovolně zvolenému číslu z množiny M_n.

Důkaz provedeme opět matematickou indukcí.

1. Tvrzení platí pro $n = 2$ $(-1 = -x_1$ a $1 = +x_1$, neboť $x_1 = 1)$ a $n = 3$ $(-2 = -1 - 1,\ 0 = -1 + 1,\ 2 = 1 + 1)$.

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \leqq n-1$, kde $n \geqq 4$. Dokažme tvrzení pro $k = n$. Zvolme libovolné číslo a z množiny M_n. Dokážeme, že existuje taková volba znamének + a −, že $a = \pm 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Rozeberme dvě možnosti.

1. $a \geqq 0$. Protože $a \in \mathsf{M}_n$, je $a - 2^{n-3}$ sudé celé číslo z intervalu $\langle -2^{n-3}, 2^{n-3} \rangle$, a tedy $a - 2^{n-3} \in \mathsf{M}_{n-1}$. Z indukčního předpokladu plyne, že existuje volba znamének + a − taková, že $a - 2^{n-3} = \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Potom $a = 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$, což jsme chtěli dokázat.

2. $a < 0$. Podobně jako v předcházejícím případě dokážeme, že a se dá napsat ve tvaru $a = -2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$.

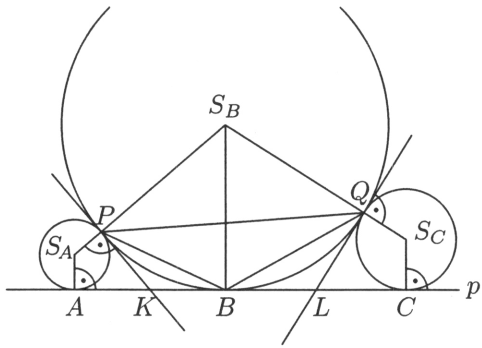
Tím jsme dokázali, že všechny hodnoty x_n tvoří právě množinu M_n.

A – I – 2

Zvolíme-li velikost $r_B > 0$ poloměru kružnice k_B, jsou už tím obě další kružnice k_A, k_C určeny. K jejich sestrojení využijeme základní vlastnosti tečen kružnic.

Předpokládejme, že kružnice k_A, k_B, k_C mají vlastnosti popsané v zadání. Označíme-li např. K průsečík vnitřní společné tečny kružnic k_A a k_B (v bodě P jejich vnějšího dotyku) s přímkou p, která je společnou vnější tečnou všech tří kružnic, musí být $|KA| = |KP|$ a $|KB| = |KP|$ (obr. 22). To znamená, že bod K je středem úsečky AB a zároveň bod P leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Známe-li bod P, snadno už sestrojíme kružnici k_A, o níž víme, že se dotýká přímky p v bodě A. Analogicky sestrojíme kružnici k_C.

Máme zjistit, pro které hodnoty r_B je trojúhelník BPQ rovnoramenný. Protože body dotyku P, Q kružnice k_B s oběma sousedními kružnicemi leží uvnitř opačných polorovin určených přímkou BS_B, jsou oba úhly BPQ a BQP ostré (příslušné středové úhly jsou menší než 180°). Pokud tedy náhodou vyjde trojúhelník PBQ tupoúhlý, může být rovnoramenný, jen když $|BP| = |BQ|$. V takovém případě je ale ze souměrnosti

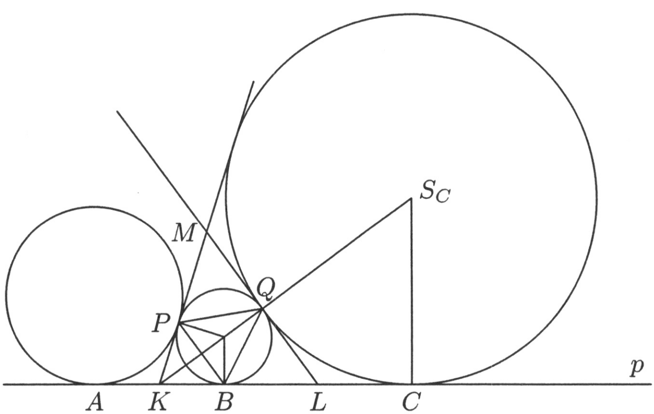


Obr. 22

zřejmé, že $|AB| = |BC|$, tj. $h = 1$. Trojúhelník BPQ je pak rovnoramenný pro každé $r_B > 0$.

Předpokládejme dále, že $h \neq 1$. V takovém případě můžeme předpokládat, že trojúhelník BPQ je ostroúhlý (jinak podle předchozího odstavce nemůže být rovnoramenný). Je-li rovnoramenný, je buď $|PQ| = |BQ|$, anebo $|PQ| = |BP|$. Předpokládejme, že je např. $|PQ| = |BQ|$ (jak ukážeme později, druhý případ lze řešit využitím souměrnosti).

Trojúhelník BPQ je souměrný podle spojnice $S_B S_C$ středů obou kružnic, která prochází bodem dotyku Q obou kružnic a průsečíkem K tečen KB, KP. Označme ještě L průsečík společné vnitřní tečny kružnic k_C a k_B s přímkou p (L je střed úsečky BC, obr. 23) a M průsečík obou tečen KP a LQ (ten je obrazem bodu L v uvedené



Obr. 23

osové souměrnosti). Trojúhelník KLM je tedy rovnoramenný se stranami $|KL| = |KM| = \frac{1}{2}(1+h)$, $|ML| = 2|LQ| = h$, jeho obvod je $1+2h$. Velikost poloměru r_B vepsané kružnice spočteme pomocí obsahu: Pro obsah S trojúhelníku KLM platí

$$S = \frac{1}{2}h\sqrt{\left(\frac{1+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}h\sqrt{1+2h}$$

a zároveň

$$S = \frac{1}{2}r_B(1+2h).$$

Odtud vychází

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+1}}. \tag{1}$$

Naopak je-li r_B dáno vztahem (1), můžeme sestrojit rovnoramenný trojúhelník KLM s rameny KL a KM délky $\frac{1}{2}(1+h)$ a základnou ML, $|ML| = h$, přičemž jeho vepsaná kružnice k_B se bude dotýkat ramene KL v bodě B. Označme P, Q po řadě body dotyku kružnice k_B se stranami KM a LM. Protože K je střed úsečky AB, je $|KA| = |KB| = |KP|$. To znamená, že kružnice k_A dotýkající se přímky p v bodě A a procházející bodem P se bude dotýkat kružnice k_B v bodě P. Analogicky sestrojíme i kružnici k_C dotýkající se přímky p v bodě C a procházející bodem Q. Ze souměrnosti trojúhelníku KLM podle přímky KQ plyne, že $|PQ| = |BQ|$. Tím je první případ vyřešen.

V případě rovnosti $|PQ| = |BP|$ můžeme postupovat úplně stejně. Jednodušší však bude, když změníme měřítko původního obrázku v poměru $1 : h$, takže bude $|AB| = h' = 1/h$, $|BC| = 1$. Když navíc prohodíme označení bodů A a C, tak se z rovnosti $|BP| = |PQ|$ stane rovnost $|BQ| = |PQ|$. Podle předchozího pak pro velikost poloměru $r'_B = (1/h)r_B$ dostaneme

$$\frac{1}{h}r_B = r'_B = \frac{h'}{2\sqrt{2h'+1}} = \frac{\frac{1}{h}}{2\sqrt{2\frac{1}{h}+1}},$$

tj.

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+h^2}}. \tag{2}$$

Anebo jsme mohli řešit úlohu poněkud obecněji za předpokladu $|AB| = a$, $|BC| = b$, pak bychom místo vztahu (1) dostali

$$r_B = \frac{b\sqrt{a^2+2ab}}{2(a+2b)}. \tag{1'}$$

Pro $a = 1$, $b = h$ vyjde za předpokladu $|PQ| = |BQ|$ původní vztah (1), zatímco pro $|PQ| = |BP|$ prohodíme označení bodů A, C (a tím i bodů P, Q) a do vzorce (1′) dosadíme $a = h$, $b = 1$. Dostaneme tak vztah (2).

Závěr: Pro $h = 1$ je trojúhelník BPQ rovnoramenný pro libovolné $r_B > 0$. Pro $h \neq 1$ je trojúhelník BPQ rovnoramenný pro r_B určené vztahem (1) ($|PQ| = |BQ|$) nebo pro r_B určené vztahem (2) ($|PQ| = |BP|$).

A – I – 3

Nejdříve ukážeme, že žádná hodnota zkoumaného výrazu V není menší než 1. Použijeme nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem ($x + y \geqq 2\sqrt{xy}$) pro všechny dvojice kladných čísel x, y z množiny $\{a^4, b^4, c^4\}$:

$$V = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^4 + b^4) + (b^4 + c^4) + (c^4 + a^4)}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} = 1.$$

Nyní ukážeme, že každá hodnota V je menší než 2. Z *Heronova vzorce* pro obsah S trojúhelníka se stranami a, b, c víme, že

$$S^2 = s(s - a)(s - b)(s - c),$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Po dosazení za s a roznásobení dostaneme

$$0 < 16S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Odtud

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2, \quad \text{tj.} \quad \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} < 2.$$

Shrňme výsledek úvah prvních dvou odstavců: zjistili jsme, že $V \in \langle 1, 2)$. Ukažme, že všechny hodnoty V zaplní celý interval $V \in \langle 1, 2)$. Zvolíme libovolnou hodnotu $k \in \langle 1, 2)$ a najdeme trojúhelník, pro který má výraz V hodnotu k. Uvažujme trojúhelník se stranami a, 1, 1, který podle trojúhelníkové nerovnosti existuje, právě když $0 < a < 2$. Zjistíme, pro které a je $V = k$, proto vyřešíme rovnici

$$\frac{a^4 + 2}{2a^2 + 1} = k \qquad (1)$$

s neznámou a. Po substituci $a^2 = b$ dostaneme kvadratickou rovnici $b^2 - 2kb + 2 - k = 0$ s neznámou b. Její diskriminant je roven $D = 4k^2 - 4(2-k) = 4(k^2 + k - 2)$. Na to, aby měla rovnice řešení, musí být diskriminant nezáporný, tedy musí platit $k^2 + k - 2 \geqq 0$. Tato nerovnost je splněna pro $k \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)$, tedy i pro uvažované $k \in \langle 1, 2)$. Potřebujeme ještě dokázat, že zkoumaná rovnice má aspoň jeden kořen b v intervalu $(0,4)$, neboť $b = a^2$ a $a \in (0,2)$. Všimněme si, že pro oba kořeny $b_{1,2}$ platí

$$\begin{aligned} b_{1,2} = \frac{2k \pm 2\sqrt{k^2+k-2}}{2} &= k \pm \sqrt{k^2+k-2} \leqq \\ &\leqq k + \sqrt{k^2+k-2} < k + \sqrt{k^2} = 2k < 4, \end{aligned}$$

přičemž jsme využili nerovnost $k < 2$. Na druhé straně pro kořen b_1 (se znaménkem $+$ před $\sqrt{D}$) platí

$$b_1 = k + \sqrt{k^2+k-2} \geqq k > 0.$$

Tím jsme ukázali, že $0 < b_1 < 4$. Existuje tedy číslo $a = \sqrt{b_1}$ splňující rovnici (1).

Jiné řešení. Opakovaným dosazováním délek stran konkrétních trojúhelníků dojdeme k hypotéze, že $1 \leqq V < 2$. Dokazujme nejprve dolní odhad $1 \leqq V$, který je ekvivalentní s nerovností

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \leqq a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to bikvadratická nerovnice s proměnnou a, takže po substituci $a^2 = t$ dostaneme kvadratickou nerovnici

$$0 \leqq t^2 - t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - b^2c^2. \tag{2}$$

Její diskriminant je $D = (b^2+c^2)^2 - 4(b^4 + c^4 - b^2c^2) = -3(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) = -3(b^2 - c^2)^2 \leqq 0$. Protože navíc je koeficient při t^2 na pravé straně (2) kladný, je nerovnice (2) splněna pro všechna reálná čísla b, c a t. Tím je nerovnost $V \geqq 1$ dokázána.

Přejděme k nerovnosti $V < 2$. Danou nerovnici přenásobme kladným jmenovatelem, dostaneme

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to opět bikvadratická nerovnice s proměnnou a. Po substituci $t = a^2$ přejde nerovnice do tvaru $t^2 - 2t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 < 0$. Její diskriminant je $D = 4(b^2 + c^2)^2 - 4(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) = 16b^2c^2$. Protože koeficient při t^2 je kladný, je řešením této nerovnice interval určený nerovnostmi

$$\frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2} < t < \frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2},$$

neboli

$$(b - c)^2 < t < (b + c)^2.$$

Tyto nerovnosti platí, protože $t = a^2$ a $|b - c| < a < b + c$ podle trojúhelníkových nerovností. Tím je nerovnost $V < 2$ dokázána.

Že hodnoty V zaplní celý interval $\langle 1, 2)$, dokážeme stejně jako v prvním řešení.

Jiný důkaz nerovnosti $V < 2$. Vyjděme z trojúhelníkové nerovnosti $|a - b| < c < a + b$. Po umocnění na druhou a následné úpravě dostaneme $-2ab < c^2 - a^2 - b^2 < 2ab$, tj. $|c^2 - a^2 - b^2| < 2ab$. Po dalším umocnění na druhou dostaneme

$$c^4 + b^4 + a^4 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 < 4a^2b^2,$$

neboli

$$c^4 + b^4 + a^4 < 2c^2a^2 + 2c^2b^2 + 2a^2b^2.$$

Odtud již plyne, že $V < 2$.

Poznámky. 1. Všimněme si, že podobné trojúhelníky mají stejnou hodnotu výrazu V. Skutečně, pokud a, b, c jsou strany trojúhelníku, jsou ka, kb, kc pro každé reálné $k > 0$ stranami podobného trojúhelníku a platí

$$\frac{(ka)^4 + (kb)^4 + (kc)^4}{(ka)^2(kb)^2 + (ka)^2(kc)^2 + (kb)^2(kc)^2} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

To znamená, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $c = 1$. Máme tedy zkoumat obor hodnot výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + 1}{a^2b^2 + a^2 + b^2}$$

za předpokladu $|a - b| < 1 < a + b$, což zjednodušuje a zpřehledňuje výpočty.

2. V druhé části řešení jsme měli zjistit obor hodnot funkce $f(a) = \frac{a^4+2}{2a^2+1}$. Zřejmě $f(1) = 1$ a $f(0) = 2$. Ze spojitosti funkce f vyplývá, že na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nabývá všechny hodnoty z intervalu $\langle 1,2\rangle$.

3. Pečlivým rozborem uvedených důkazů zjistíme, že nerovnost $V \geqq 1$ platí pro všechna reálná čísla a, b, c, z nichž aspoň dvě jsou nenulová.

A – I – 4

Protože $(abc)_z$ je číslo az^2+bz+c, máme zjistit, kdy obecně platí ekvivalence: $n \mid c+3b-4a$, právě když $n \mid az^2+bz+c$. V ní jsou a, b, c libovolné číslice při základu z, tj. čísla z množiny $\{0,1,\dots,z-1\}$. Všimněme si, že $z-1 \geqq 4$, neboť předpokládáme, že $z \geqq 5$.

Zvolíme-li $a=b=c=1$, dostaneme, že $n \mid 0$, právě když $n \mid z^2+z+1$. Protože nula je dělitelná každým celým číslem, musí platit $n \mid z^2+z+1$. Zvolíme-li $a=1$, $b=0$ a $c=4$, dostaneme, že $n \mid 0$, právě když $n \mid z^2+4$. Podobnou úvahou jako výše zjistíme, že $n \mid z^2+4$.

Pokud nějaké číslo dělí dvě čísla, musí dělit i jejich největší společný dělitel, tedy $n \mid \mathrm{nsd}(z^2+4, z^2+z+1)$. Tento společný dělitel najdeme pomocí *Eukleidova algoritmu:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{nsd}(z^2+4, z^2+z+1) = \\
&\quad = \mathrm{nsd}\big(z^2+4, z^2+z+1-(z^2+4)\big) = \mathrm{nsd}(z^2+4, z-3) = \\
&\quad = \mathrm{nsd}\big(z^2+4-z(z-3), z-3\big) = \mathrm{nsd}(4+3z, z-3) = \\
&\quad = \mathrm{nsd}\big(4+3z-3(z-3), z-3\big) = \mathrm{nsd}(13, z-3).
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že $n \mid 13$. Protože $n > 1$, je nutně $n = 13$. Má-li některé n požadovanou vlastnost, je to nutně číslo $n = 13$.

Dokažme, že číslo 13 skutečně danou vlastnost má. Odvozená nutná podmínka $n \mid \mathrm{nsd}(13, z-3)$ je pro $n = 13$ splněna např. pro $z = 16$. Daná ekvivalence má pak tvar $13 \mid c+3b-4a$, právě když $13 \mid a\cdot 16^2+b\cdot 16+c$. Dokážeme silnější vlastnost, že totiž čísla $a\cdot 16^2+b\cdot 16+c$ a $c+3b-4a$ dávají při dělení třinácti stejný zbytek, neboli že jejich rozdíl je dělitelný třinácti:

$$(a\cdot 16^2+b\cdot 16+c)-(c+3b-4a) = 260a+13b = 13(20+b).$$

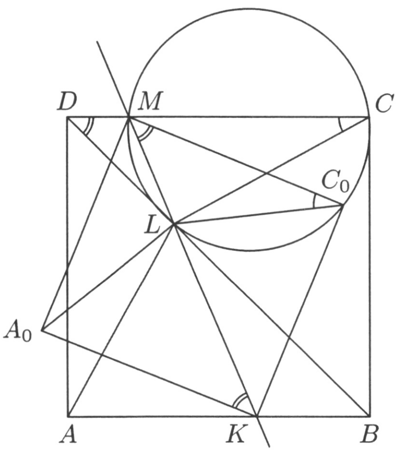
Úloha má jediné řešení $n = 13$.

Poznámka. Podobně jako v závěru řešení můžeme dokázat, že uvedené kritérium dělitelnosti pro $n = 13$ platí i v libovolné číselné soustavě se základem $z = 13k+3$.

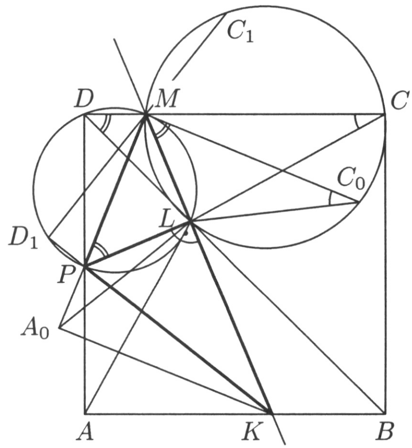
A – I – 5

Je-li $ABCD$ libovolný čtverec, který splňuje podmínky úlohy, bude stejným podmínkám vyhovovat i čtverec, který dostaneme osovou souměrností podle přímky MK. Hledaná množina bude tedy osově souměrná podle této přímky a nám stačí určit tu její část, která leží v jedné z obou polorovin s hraniční přímkou MK.

Kromě libovolného čtverce $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy, uvažujme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ s úhlopříčkou $B_0D_0 = KM$ ($B_0 \equiv K$, $D_0 \equiv M$), přičemž vrchol C_0 leží ve stejné polorovině ohraničené přímkou KM jako vrchol C čtverce $ABCD$ (obr. 24). (Vrchol C_0 zřejmě rovněž patří do hledané množiny.)



Obr. 24



Obr. 25

Protože trojúhelníky KLB a MLD jsou podobné podle věty *uu*, dělí bod L úhlopříčky obou čtverců ve stejném poměru

$$|BL| : |LD| = |KL| : |LM| = \text{konst.}$$

Velikost úhlu LCD ($|\sphericalangle LCD| = |\sphericalangle LC_0M|$) je určena polohou bodu L na úsečce MK, má tedy konstantní velikost, takže bod C leží na stejném oblouku γ kružnice opsané trojúhelníku LC_0M nad tětivou LM jako bod C_0. Navíc kružnice opsaná trojúhelníku A_0KL je shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku C_0ML, protože v jedné z nich je vidět tětivu A_0L

z bodu K pod úhlem $45°$ a v druhé tětivu C_0L shodné délky pod stejným úhlem z bodu M.

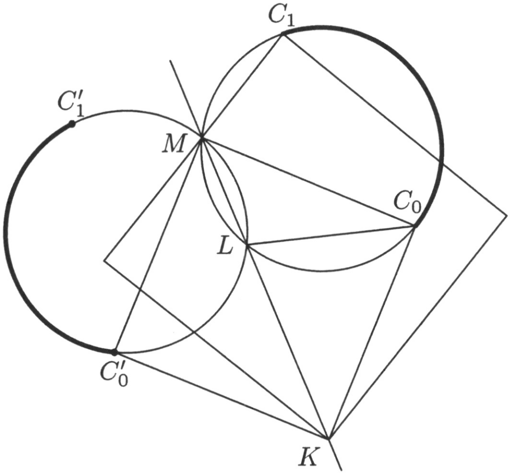
Protože bod M leží na straně CD, je zřejmě $|\sphericalangle LMC| \geqq |\sphericalangle LDC| = 45°$ (pokud $M \neq D$, je to vnější úhel trojúhelníku DML, který má při vrcholu D úhel $45°$). Protože úhel LMC_0 měří právě $45°$, leží bod C na části oblouku γ mezi body C_0 a M.

Dále si všimněme, že vrchol D čtverce $ABCD$ leží na oblouku, ze kterého je vidět úsečku LM pod úhlem $45°$ v polorovině opačné ke KMC. Sestrojme bod P (obr. 25), který leží na průsečíku přímky AD a kolmice k přímce MK v bodě L. Body M, D, L a P leží na Thaletově kružnici s průměrem MP, a protože $|\sphericalangle MPL| = |\sphericalangle MDL| = 45°$, je trojúhelník MPL rovnoramenný pravoúhlý. To znamená, že bod P je jednoznačně určen polohou bodu L na úsečce MK. (Bod P vznikne otočením bodu M kolem středu L o $90°$, protože bod L jako bod úhlopříčky BD má od přímek CD a DA stejnou vzdálenost, je tedy přímka DA ve zmíněném otočení obrazem přímky CD; odtud rovněž plyne rovnost $|LM| = |LP|$.)

Bod D tudíž musí ležet na oblouku δ Thaletovy polokružnice nad průměrem MP v polorovině opačné k PML, zároveň však polopřímka DP (která obsahuje vrchol A) nesmí protnout úsečku LK. Odtud plyne, že vrchol D může ležet jen v té části zmíněné polokružnice nad průměrem MP, která leží v polorovině PKL. Přitom je zřejmé, že přímka PK tuto polokružnici protne v dalším bodě různém od P, právě když $|KL| > |LM|$ (pro $|KL| = |LM|$ bude KP tečnou kružnice nad průměrem MP). Označíme-li v takovém případě D_1 průsečík KP s polokružnicí δ a C_1 průsečík polopřímky D_1M s obloukem γ, je zřejmé, že vrchol C padne do části C_0C_1 oblouku γ. V opačném případě, tj. pro $|KL| \leqq |LM|$, vyplní zřejmě vrcholy C celou část C_0M oblouku γ.

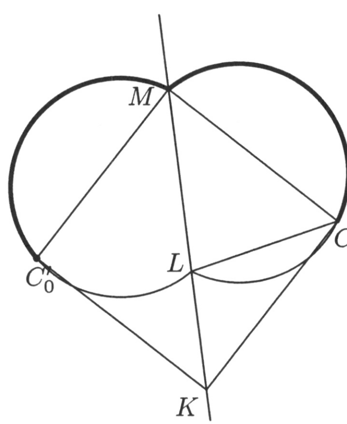
Skutečně. Zvolme libovolný bod C na části C_0C_1 oblouku γ v prvním případě, resp. na C_0M v druhém případě. Přímka CM protne oblouk δ v bodě, který označíme D. Vrchol A pak sestrojíme jako průsečík polopřímky DP s Thaletovou kružnicí nad průměrem PK (v prvním případě máme zaručeno, že bude ležet v polorovině PKA_0, a ne v opačné). Protože jak už víme, jsou kružnice opsané trojúhelníkům LC_0M a LA_0K shodné, zjistíme snadno z příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DCL|$, takže trojúhelníky DAL a DCL jsou shodné, tudíž $|DA| = |DC|$. Protože polopřímka DL protíná úsečku MK v bodě L, protne polopřímka AK polopřímku DL v bodě B za bodem K, přičemž trojúhelník DAB je rovnoramenný pravoúhlý. Je tedy $ABCD$ čtverec, který splňuje podmínky úlohy.

Závěr: Hledanou množinou vrcholů C čtverců $ABCD$ je pro $|ML| < |LK|$ oblouk C_0C_1 kružnice opsané trojúhelníku MLC_0 a oblouk s ním osově souměrný podle dané přímky MK (obr. 26), pro $|ML| \geqq |LK|$ je



Obr. 26

to oblouk C_0M stejné kružnice a oblouk s ním osově souměrný podle přímky MK (obr. 27).



Obr. 27

A – I – 6

Označme p_i pravděpodobnost, že vyhraje hráč A, přičemž figurka stojí na i-tém políčku. Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_3, \\ p_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_4, \\ p_4 &= \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5, \\ p_5 &= \frac{1}{3}p_4. \end{aligned}$$

Postupným dosazováním z jedné rovnice do druhé dostaneme řešení $p_2 = \frac{15}{31}$. Protože na začátku stojí figurka na políčku číslo 2, je pravděpodobnost výhry hráče A rovna $\frac{15}{31}$. Podobným způsobem sestavíme a vyřešíme systém rovnic pro hráče B a dostaneme tak, že hráč B vyhraje s pravděpodobností $\frac{16}{31}$. Pravděpodobnost remízy je tedy 0. Tím je úloha vyřešena.

A – S – 1

Pro libovolně vybraných dvacet přirozených čísel

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$$

odhadneme, kolik mezi nimi může být součtových trojic, tedy trojic $\{x_i, x_j, x_k\}$ splňujících podmínky $1 \leqq i < j < k \leqq 20$ a $x_i + x_j = x_k$, a to nejprve při pevném indexu $k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$. Nechť jsou to trojice $\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_k\}$, $\{x_{i_2}, x_{j_2}, x_k\}$, ..., $\{x_{i_p}, x_{j_p}, x_k\}$. Pak čísla

$$x_{i_1}, x_{j_1}, x_{i_2}, x_{j_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{j_p}$$

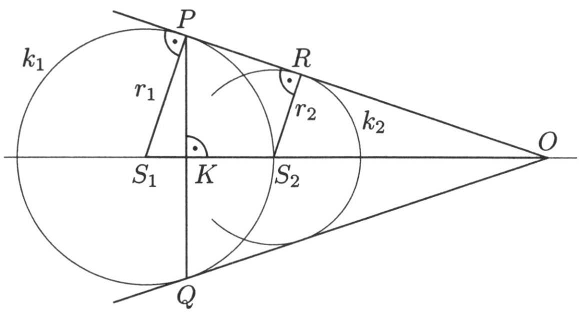
jsou navzájem různá a všechna leží v množině $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$, takže pro jejich počet $2p$ platí odhad $2p \leqq k - 1$, odkud $p \leqq [\frac{1}{2}(k-1)]$ (kde $[a]$ značí celou část čísla a). Proto počet všech součtových trojic nemůže být číslo větší než součet

$$\sum_{k=3}^{20} \left[\frac{k-1}{2}\right] = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + 9 + 9 = 90.$$

Příklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 20\}$ ukazuje, že počet 90 součtových trojic je dosažitelný, neboť při každém $k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ můžeme za číslo i vybrat libovolné číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}(k-1)]\}$; odpovídající celé číslo $j = k - i$ pak skutečně splňuje nerovnosti $i < j < k$, takže $\{i, j, k\}$ je součtová trojice ležící v M.

A – S – 2

Ze souměrnosti společných tečen plyne, že body dotyku P a Q jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2, takže platí $PQ \perp S_1S_2$. Přímka PQ proto bude tečnou ke kružnici k_2, když ukážeme, že průsečík K přímek PQ a S_1S_2 leží na kružnici k_2 (obr. 28). Označme ještě O průsečík obou



Obr. 28

tečen s přímkou S_1S_2 a R bod dotyku tečny PO s kružnicí k_2. Z podobných pravoúhlých trojúhelníků S_1OP a S_2OR plyne úměra

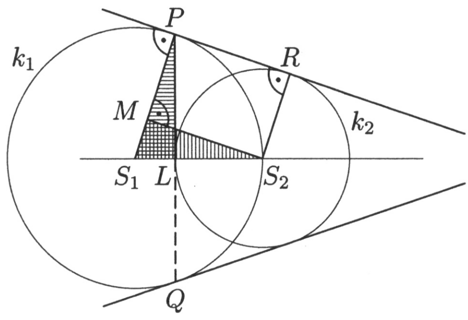
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|S_1P|}{|S_2R|} = \frac{|S_1O|}{|S_2O|} = \frac{|S_1O|}{|S_1O| - r_1}, \quad \text{odkud} \quad |S_1O| = \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}.$$

Z Eukleidovy věty o odvěsně S_1P trojúhelníku S_1OP proto vyplývá, že

$$r_1^2 = |S_1P|^2 = |S_1K| \cdot |S_1O| = |S_1K| \, \frac{r_1^2}{r_1 - r_2},$$

tudíž $|S_1K| = r_1 - r_2$, a proto $|S_2K| = |S_1S_2| - |S_1K| = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$. To znamená, že bod K skutečně leží na kružnici k_2 a důkaz tvrzení je hotov.

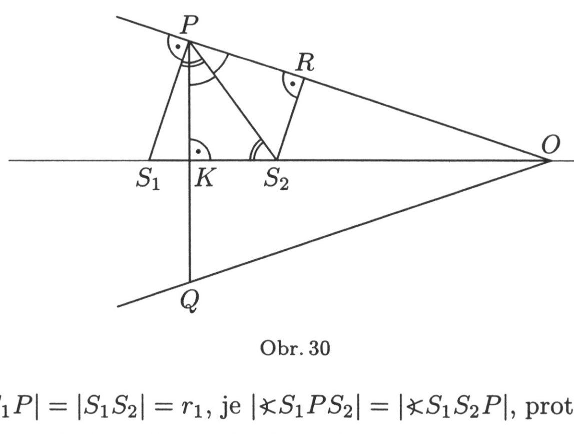
Jiné řešení. Označme L průsečík kružnice k_2 s úsečkou S_1S_2, M patu kolmice spuštěné z bodu S_2 na úsečku S_1P a R bod dotyku kružnice k_2 s tou společnou tečnou, která prochází bodem P (obr. 29). Protože S_2RPM je pravoúhelník, platí $|MP| = |S_2R| = r_2$, a proto



Obr. 29

$|S_1M| = |S_1P| - |MP| = r_1 - r_2$. Stejnou délku $r_1 - r_2$ má rovněž úsečka S_1L, neboť $r_1 = |S_1S_2|$ a $r_2 = |S_2L|$. Trojúhelníky S_1MS_2 a S_1LP mají tudíž shodné úhly při vrcholu S_1 i přilehlé strany, jsou proto shodné podle věty *sus*. Platí tedy nejen $S_1M \perp S_2M$, ale také $S_1L \perp PL$. Bod L ale leží na kružnici k_2, takže přímka PL je její tečnou, která s ohledem na souměrnost prochází rovněž bodem Q. Důkaz je ukončen.

Jiné řešení. Označme O průsečík obou tečen, K patu kolmice z bodu P na OS_1 (vzhledem k souměrnosti obou tečen podle spojnice S_1S_2 je to průsečík PQ s OS_1) a R patu kolmice z bodu S_2 na OP (obr. 30).



Obr. 30

Protože $|S_1P| = |S_1S_2| = r_1$, je $|\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_1S_2P|$, proto

$$|\sphericalangle S_2PK| = 90^\circ - |\sphericalangle S_1S_2P| =$$
$$= 90^\circ - |\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_2PR|,$$

takže pravoúhlé trojúhelníky KS_2P a RS_2P se shodují v přeponě S_2P a přilehlém úhlu u vrcholu P. Je tudíž $|S_2K| = |S_2R|$ a kružnice se středem S_2 a poloměrem $r_2 = |S_2R|$ se dotýká spojnice PQ v bodě K.

A – S – 3

Levou stranu druhé rovnice upravíme na součin:

$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = x^2(x-2) - p(x-2) = (x-2)(x^2-p).$$

Pro společný kořen x obou rovnic tedy platí $x = 2$ nebo $x^2 = p$. V prvním případě po dosazení do první rovnice dostaneme

$$2^3 + 2^2 - 36 \cdot 2 - p = 0, \quad \text{neboli} \quad p = -60;$$

ve druhém případě můžeme první rovnici zjednodušit na tvar $x^3 - 36x = 0$, odkud plyne $x = 0$ nebo $x = \pm 6$, a proto z podmínky $p = x^2$ vychází $p = 0$ respektive $p = 36$.

Dodejme, že po nalezení rozkladu levé strany druhé rovnice jsme mohli vypsat její kořeny $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{p}$ a po jejich postupném dosazení do první rovnice určit hledané hodnoty $p = -60, p = 0$ a $p = 36$.

Jiné řešení. Z první rovnice snadno vyjádříme $p = x^3 + x^2 - 36x$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme rovnici (bez parametru p), kterou musí splňovat společný kořen obou původních rovnic:

$$x^3 - 2x^2 - (x^3 + x^2 - 36x)x + 2(x^3 + x^2 - 36x) = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici $x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x = 0$, jejíž kořeny snadno určíme (jsou to totiž celá čísla) například postupným rozkladem:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x = x[x^2(x-2) - 36(x-2)] = x(x-2)(x^2-36) = \\ = x(x-2)(x-6)(x+6). \end{aligned}$$

Vidíme, že společným kořenem musí být jedno z čísel $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = -6$. Dosadíme-li je do původních rovnic, ihned zjistíme příslušné hodnoty p; jsou to čísla 0, -60 a 36 (poslední odpovídá oběma kořenům $x_{3,4} = \pm 6$).

Jiné řešení. Společné kořeny mnohočlenů

$$P_1(x) = x^3 + x^2 - 36x - p, \quad P_2(x) = x^3 - 2x^2 - px + 2p$$

(pokud vůbec existují) jsou kořeny mnohočlenu, který je největším společným dělitelem mnohočlenů P_1 a P_2. Najdeme ho Eukleidovým algoritmem postupného dělení se zbytkem. V prvních dvou krocích dostaneme jako zbytky mnohočleny

$$P_3(x) = P_1(x) - P_2(x) = 3x^2 + (p-36)x - 3p,$$
$$P_4(x) = P_2(x) - \left(\frac{x}{3} + \frac{30-p}{9}\right) P_3(x) = (p-36)\left(\frac{(p-30)x}{9} - \frac{p}{3}\right).$$

V případě, kdy $p = 36$, je algoritmus ukončen; největší společný dělitel je tehdy roven $P_3(x) = 3x^2 - 3 \cdot 36 = 3(x-6)(x+6)$, takže mnohočleny P_1, P_2 mají dva společné kořeny $x = \pm 6$. Dále proto předpokládejme, že $p \neq 36$. Jediný kandidát na společný kořen mnohočlenů P_1, P_2 je kořen mnohočlenu P_4, tedy číslo $x = 3p/(p-30)$. Stačí jen zjistit, kdy je toto číslo kořenem mnohočlenu P_3. Protože

$$P_3\left(\frac{3p}{p-30}\right) = \frac{9p(p+60)}{(p-30)^2},$$

mají požadovanou vlastnost pouze hodnoty $p = 0$ a $p = -60$ (kterým odpovídá společný kořen $x = 0$ respektive $x = 2$).

A – II – 1

Protože v zápisu dvojmístného čísla vystupuje číslice 4, nutně platí $z \geqq 5$. Z rozvinutých zápisů $(1001)_z = z^3 + 1$ a $(41)_z = 4z + 1$ vyplývá, že hledáme právě ta přirozená $z \geqq 5$, pro která je číslo z^3+1 násobkem čísla $4z+1$. Pomocí Eukleidova algoritmu najdeme jejich největší společný dělitel. Můžeme postupovat tak, že nejprve vydělíme oba výrazy jako mnohočleny a pak se „zbavíme“ zlomků:

$$z^3 + 1 = \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4^2}z + \frac{1}{4^3}\right)(4z+1) + \frac{63}{4^3}, \qquad / \cdot 4^3$$
$$4^3(z^3+1) = (16z^2 - 4z + 1)(4z+1) + 63. \tag{1}$$

Protože čísla 4 a $4z+1$ jsou nesoudělná, vidíme odtud, že číslo $4z+1$ dělí číslo z^3+1, právě když dělí číslo 63, tedy právě když $4z+1 \in$ $\in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Z podmínky $z \geqq 5$ ovšem plyne $4z+1 \geqq 21$, takže $4z+1 = 21$ (rovnice $4z+1 = 63$ nemá celočíselné řešení) a $z = 5$.

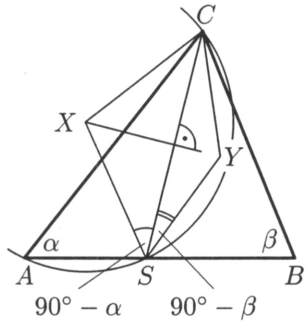
Poznámka. Rozklad (1) také snadno odhalíme, využijeme-li známý vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$: podle něj můžeme rovnou psát

$$4^3(z^3+1) = (4^3z^3 + 1) + 63 = (4z+1)(16z^2 - 4z + 1) + 63.$$

A – II – 2

Vnitřní úhly trojúhelníku ABC označme jako obvykle α, β, γ.

Podle věty o obvodovém a středovém úhlu v kružnici opsané trojúhelníku ASC platí (obr. 31) $|\sphericalangle SXC| = 2\alpha$, tudíž úhel při základně SC



Obr. 31

rovnoramenného trojúhelníku SCX má velikost $|\sphericalangle XSC| = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$ (využili jsme předpokladu, že α je ostrý úhel). Analogicky se odvodí rovnost $|\sphericalangle YSC| = 90° - \beta$. Protože úhly při vrcholech A a C trojúhelníku ASC jsou ostré, je střed X vnitřním bodem úhlu ASC; obdobně je střed Y vnitřním bodem úhlu BSC. Proto lze vyjádřit velikost úhlu XSY jako součet velikostí úhlů XSC a YSC:

$$|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle XSC| + |\sphericalangle YSC| = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = \gamma.$$

Označíme-li ještě $\omega = |\sphericalangle ASC|$, pak pro poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC platí vzorce

$$|SX| = \frac{|AC|}{2\sin\omega} \quad \text{a} \quad |SY| = \frac{|BC|}{2\sin(180° - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega},$$

které spolu s dříve určenou velikostí úhlu XSY vedou k následující závislosti mezi obsahy S_{SXY} a S_{ABC} trojúhelníků SXY a ABC:

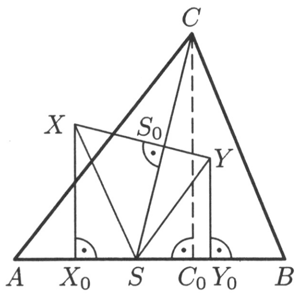
$$S_{SXY} = \frac{|SX| \cdot |SY| \cdot \sin|\sphericalangle XSY|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma}{8\sin^2\omega} = \frac{S_{ABC}}{4\sin^2\omega}.$$

Odtud plyne nerovnost $S_{SXY} \geqq \frac{1}{4}S_{ABC}$, přičemž rovnost nastane, právě když $\sin\omega = 1$, neboli $\omega = 90°$. Obsah trojúhelníku SXY je proto nejmenší, právě když je bod S patou výšky z vrcholu C ke straně AB. (Tato pata je vnitřním bodem strany AB díky podmínce, že trojúhelník ABC je ostroúhlý.)

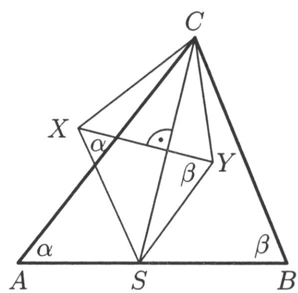
Jiné řešení. Středná XY obou opsaných kružnic protíná společnou tětivu CS v jejím středu S_0 a kolmé průměty X_0, Y_0 bodů X, Y na stranu AB jsou středy úseček AS, SB (obr. 32). Je tedy $|X_0Y_0| = \frac{1}{2}|AB|$ a pro obsah trojúhelníku SXY tudíž platí

$$\begin{aligned} S_{SXY} &= \frac{1}{2}|XY| \cdot |S_0S| \geqq \frac{1}{2}|X_0Y_0| \cdot |S_0S| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CC_0| = \frac{1}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

kde CC_0 je výška trojúhelníku ABC. Rovnost v první z předchozích dvou nerovností nastane, právě když $XY \parallel AB$, tj. právě když $CS \perp AB$, neboli $S = C_0$. A právě tehdy přejde v rovnost i druhá nerovnost.



Obr. 32



Obr. 33

Jiné řešení. Průsečíky C a S kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC jsou souměrně sdružené podle přímky XY, takže pro velikost úhlu SXY platí (obr. 33)

$$|\sphericalangle SXY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle SXC| = \frac{1}{2} \cdot 2|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAC|,$$

obdobně $|\sphericalangle SYX| = |\sphericalangle ABC|$. Proto jsou trojúhelníky SXY a CAB podobné podle věty *uu*, takže jejich obsahy S_{SXY} a S_{ABC} jsou pomocí koeficientu podobnosti $k = |XS| : |AC|$ svázány rovností $S_{SXY} = k^2 S_{ABC}$. Protože úsečka AC je tětivou kružnice o poloměru $|XS|$, platí nerovnost $|AC| \leqq 2|XS|$, neboli $k \geqq \frac{1}{2}$; rovnost $k = \frac{1}{2}$ přitom nastane, jen když je strana AC průměrem kružnice opsané trojúhelníku ASC, což je ekvivalentní s podmínkou $CS \perp AB$. Tím je dokázána nerovnost $S_{SXY} \geqq \frac{1}{4} S_{ABC}$ i nalezena podmínka, kdy nastane rovnost.

A – II – 3

Rovnice dané soustavy mají smysl, jen když jsou čísla x, y, z kladná a různá od 1. Pro taková čísla x, y, z (jiná dále neuvažujeme) dostáváme odlogaritmováním ekvivalentní soustavu rovnic

$$y + z = x^p, \quad z + x = y^p, \quad x + y = z^p. \tag{1}$$

Ukážeme nejprve, že v oboru $\mathsf{M} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ je každé řešení soustavy (1) tvořeno trojicí stejných čísel. Využijeme k tomu známého poznatku, že pro $p \geqq 0$ je funkce $f(t) = t^p$ na množině kladných čísel t neklesající (přesněji: rostoucí pro $p > 0$ a konstantní pro $p = 0$). Připusťme naopak, že pro některé řešení (x, y, z) platí například $x < y$.

Odečtením prvních dvou rovnic z (1) dostaneme $y - x = x^p - y^p$. Z předpokladu $x < y$ ale plyne $x^p \leqq y^p$, takže $y - x > 0$ a zároveň $x^p - y^p \leqq 0$, což je ve sporu s předchozí rovností. Podobně odvodíme spor i v případě, kdy $x > y$, a v případech, kdy $x \neq z$ resp. $y \neq z$ (soustava (1) je totiž v neznámých x, y, z symetrická).

Soustava (1) se proto redukuje na rovnici $x + x = x^p$, kterou máme řešit v oboru $\mathsf{M} = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Protože $x \neq 0$, dostáváme po dělení číslem x ekvivalentní rovnici $2 = x^{p-1}$. Tato rovnice nemá řešení pro $p = 1$, pro $p = 0$ má jediné řešení $x = \frac{1}{2}$, pro přirozené $p \geqq 2$ má jediné řešení $x = 2^{\frac{1}{p-1}}$, které lze pro $p \geqq 3$ zapsat jako $x = \sqrt[p-1]{2}$. (Čísla $\frac{1}{2}$ i $2^{\frac{1}{p-1}}$ zřejmě náležejí do M.)

Odpověď. Daná soustava má pro $p = 0$ jediné řešení $x = y = z = \frac{1}{2}$, pro $p = 1$ nemá řešení, pro přirozené $p \geqq 2$ má jediné řešení $x = y = z = 2^{\frac{1}{p-1}}$.

A – II – 4

Úvodem si všimneme, že v důsledku rovnosti $x_1 = 1$ platí

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} = 1, \\ x_3 &= x_2^{\pm 1} + x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} + 1^{\pm 1} = 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože pro každé $x > 0$ jsou obě čísla x^{+1}, x^{-1} kladná, plyne odtud snadno matematickou indukcí, že nerovnost $x_n \geqq 1$ je splněna pro každé n. Je-li $x \geqq 1$, pak ovšem $0 < x^{-1} \leqq x^1$, a proto pro každé $n \geqq 4$ platí odhady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x_4} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} \leqq x_n \leqq 1 + 1 + 2 + x_4 + \ldots + x_{n-1}, \quad (2)$$

které využijeme ve všech třech částech řešení.

a) Dokážeme (sporem), že existuje k, pro něž $x_k > 10^3$. Připusťme naopak, že pro každé k platí opačná nerovnost $x_k \leqq 10^3$. Z levé nerovnosti v (2) pak pro každé $n > 4$ plyne odhad

$$x_n \geqq \frac{5}{2} + \underbrace{10^{-3} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-3}}_{(n-4)\ \text{krát}} = \frac{5}{2} + (n-4) \cdot 10^{-3}.$$

Odtud ale vyplývá, že $x_n > 10^3$ pro každé $n > 10^6 + 4$, což je spor.

b) Dokážeme nejprve, že z pravých nerovností v (2) vyplývá odhad $x_n \leqq 2^{n-2}$ pro každé $n \geqq 2$. Využijeme indukci: pro $n = 2$ i pro $n = 3$ platí podle (1) rovnost $x_n = 2^{n-2}$; nechť $n \geqq 4$ a nechť pro všechna $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ platí $x_k \leqq 2^{k-2}$, potom z (2) dostáváme

$$x_n \leqq 1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) = 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-2}.$$

Tím je důkaz indukcí ukončen.

Dosadíme-li odhady $x_n \leqq 2^{n-2}$ do levé nerovnosti v (2), vyjde nám pro hodnotu x_{10^6} dolní odhad

$$x_{10^6} \geqq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{10^6-3}} = 3 - \frac{1}{2^{10^6-3}}.$$

To spolu s příkladem vyhovující posloupnosti

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_1 \quad (n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}), \\ x_{10^6} &= x_{10^6-1}^{-1} + x_{10^6-2}^{-1} + \ldots + x_2^{-1} + x_1^{-1}, \end{aligned}$$

ve které $x_n = 2^{n-2}$ pro každé $n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}$ a $x_{10^6} = 3 - 2^{3-10^6}$, ukazuje, že nejmenší možná hodnota členu x_{10^6} je rovna $3 - 2^{3-10^6}$.

c) Předpokládejme, že nerovnost $x_n < 4$ platí kromě tří hodnot $n \in \{1, 2, 3\}$ ještě pro některá další n, která označíme $n_4, n_5, n_6, \ldots$ tak, že $4 \leqq n_4 < n_5 < n_6 < \ldots$ (zatím ještě nevíme, zda jde o konečnou či nekonečnou posloupnost). Ukažme, že pro každé takové n_k jsou ve všech exponentech příslušné rovnosti

$$x_{n_k} = 1 + 1 + 2^{\pm 1} + x_4^{\pm 1} + x_5^{\pm 1} + \ldots + x_{n_k-1}^{\pm 1}$$

vybrána znaménka „minus". Pro mocninu $2^{\pm 1}$ je to zřejmé, neboť $x_{n_k} < 4$; z téže nerovnosti dále plyne, že znaménko v exponentu kterékoli mocniny $x_j^{\pm 1}$ $(4 \leqq j \leqq n_k - 1)$ musí být vybráno tak, aby platilo

$$x_j^{\pm 1} < 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Tato nerovnost však může být splněna pouze se znaménkem „minus", neboť podle (2) máme $x_j \geqq 5/2$. Tím je tvrzení o výběru znamének dokázáno. Porovnáním dvou za sebou jdoucích rovností

$$\begin{aligned} x_{n_k} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \ldots + \frac{1}{x_{n_k-1}}, \\ x_{n_{k+1}} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \ldots + \frac{1}{x_{n_k-1}} + \frac{1}{x_{n_k}} + \ldots + \frac{1}{x_{n_{k+1}-1}} \end{aligned}$$

dostaneme pro všechna $k \geqq 4$ nerovnosti

$$x_{n_{k+1}} \geqq x_{n_k} + \frac{1}{x_{n_k}},$$

které s přihlédnutím k tomu, že funkce $f(t) = t + 1/t$ je na intervalu $t \in \langle 1, \infty)$ rostoucí a že $x_{n_4} \geqq 2{,}5$, vedou postupně k odhadům

$$x_{n_5} \geqq f(2{,}5) = 2{,}9, \quad x_{n_6} \geqq f(2{,}9) > 3{,}24, \quad x_{n_7} > f(3{,}24) > 3{,}54,$$
$$x_{n_8} > f(3{,}54) > 3{,}82, \quad x_{n_9} \geqq f(3{,}82) > 4{,}08.$$

Poslední nerovnost je ale ve sporu s podmínkou $x_{n_k} < 4$ určující výběr indexů n_k. Proto nerovnost $x_n < 4$ nemůže platit pro devět indexů n.

A – III – 1

Protože druhou rovnici můžeme upravit na tvar $xy(x+y) = -2$, upravme podobně i první rovnici: $(x+y)^2 - 3xy = 7$. Pro čísla $s = x + y$, $p = xy$ tak dostáváme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} s^2 - 3p &= 7, \\ sp &= -2, \end{aligned} \tag{1}$$

která po vyjádření $p = -2/s$ (zřejmě nemůže být $s = 0$) z druhé rovnice vede na kubickou rovnici $s^3 - 7s + 6 = 0$. Ta má celočíselné kořeny $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ a $s_3 = -3$. Nalezeným hodnotám s odpovídají tyto hodnoty součinu $p = xy$: $p_1 = -2$, $p_2 = -1$, $p_3 = \frac{2}{3}$. Čísla x, y tvoří dvojici kořenů kvadratické rovnice $t^2 - st + p = 0$, takže se jedná o jednu z rovnic

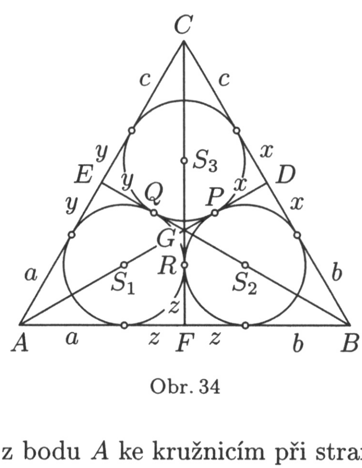
$$t^2 - t - 2 = 0, \quad t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0.$$

Jejich řešením dostaneme (všech) šest řešení dané soustavy:

$$\{x, y\} = \{-1, 2\}, \quad \{x, y\} = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\},$$
$$\{x, y\} = \left\{\frac{-9 + \sqrt{57}}{6}, \frac{-9 - \sqrt{57}}{6}\right\}.$$

A – III – 2

Předpokládejme, že zmíněné čtyřúhelníky mají uvedenou vlastnost. Ze souměrnosti tečen *z daného bodu k dané kružnici* vyplývá, že strany trojúhelníku ABC jsou rozděleny body D, E, F a body dotyku kružnic vepsaných uvažovaným čtyřúhelníkům na úseky délek, jež označíme podle obr. 34. Jsou na něm rovněž vyznačeny body P, Q, R vzájemného dotyku zmíněných kružnic. Naším cílem je dokázat rovnosti $x = y = z$ a $a = b = c$.



Obr. 34

Pro úseky tečen z bodu A ke kružnicím při straně BC platí rovnosti $a + 2z = |AP| = a + 2y$, odkud ihned plyne $y = z$; z důvodů symetrie tudíž skutečně platí $x = y = z$. (Všude dále budeme psát x namísto y a z.) Všimněme si nyní trojúhelníků AEG a AFG. Mají společnou stranu AG a shodné strany AF a AE (délky $a+x$). Také jejich třetí strany EG a FG jsou shodné:

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Proto $\triangle AEG \simeq \triangle AFG$ podle věty sss, tudíž úhly BAD a CAD jsou shodné a polopřímka AD je osou úhlu BAC. Jak víme, osa úhlu trojúhelníku protíná protější stranu v poměru délek přilehlých stran. V našem případě to znamená, že

$$\frac{a+2x+b}{a+2x+c} = \frac{b+x}{c+x}.$$

Snadnou úpravou dostaneme rovnost $(b-c)(a+x) = 0$, ze které vidíme, že $b = c$. Z důvodů symetrie tudíž platí $a = b = c$ a celý důkaz je hotov.

Jiné řešení. Označme S_1, S_2, S_3 středy vepsaných kružnic (obr. 34). Stejně jako v předchozím řešení si nejprve všimneme, že platí $x = y = z$ a že trojúhelníky AEG a AFG jsou shodné. K tomu jsme využili rovnost $|GQ| = |GR|$, ze které plyne, že podle věty sss jsou shodné i trojúhelníky S_1QG a S_1RG. Jelikož $R \in S_1S_2$ a $Q \in S_1S_3$, ze souměrnosti podle osy AD nyní plyne, že přímky AB a S_1S_2 svírají stejný úhel jako přímky AC a S_1S_3, a protože kolmé průměty úseček S_1S_2 a S_1S_3 na odpovídající přímky AB, resp. AC jsou shodné (mají délku $2x$), je $|S_1S_2| = |S_1S_3|$. Analogicky $|S_1S_2| = |S_2S_3|$, takže trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný. Odtud pro poloměry r_1, r_2 a r_3 vepsaných kružnic plyne $r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1$, neboli $r_1 = r_2 = r_3$. Kružnice jsou tedy shodné, takže je $AB \parallel S_1S_2$, $BC \parallel S_2S_3$ a $CA \parallel S_3S_1$ a trojúhelník ABC je rovnostranný.

Poznámka. K dokončení předchozího důkazu můžeme úvahu o délkách úseček S_iS_j nahradit úvahou o tzv. *orientovaných úhlech* mezi přímkami. Orientovaný úhel $\langle p, q\rangle$ přímek p, q (v tomto pořadí) je úhel, o který musíme v kladném směru otočit přímku q, aby byla rovnoběžná s přímkou p. Přitom $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$, právě když $\langle p, q\rangle$ je násobek $90°$. Ze souměrnosti podle os AD, BE a CF tak postupně dostáváme $\langle S_1S_3, AC\rangle = \langle AB, S_1S_2\rangle = \langle S_2S_3, BC\rangle = \langle AC, S_1S_3\rangle$. Protože obě odpovídající kružnice se středy S_1, S_3 mají společnou tečnu AC a leží v téže polorovině určené přímkou AC, znamená to, že S_1S_3 a AC jsou rovnoběžné.

A – III – 3

Pokud se nám podaří sestavit podle daného pravidla $(k+3)$-člennou posloupnost

$$x_1 = 1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = x_{k+3} = 12,$$

můžeme všechny následující členy $x_{k+4}, x_{k+5}, x_{k+6}, \ldots$ definovat tak, aby se rovněž rovnaly číslu 12. Skutečně, s ohledem na matematickou indukci stačí ukázat, jak s vytčeným cílem vybrat znaménka v rovnosti určující člen x_{k+4}. Položme

$$\begin{aligned} x_{k+4} = {} & +12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k \pm \\ & \pm (k-1)x_{k-1} \pm (k-2)x_{k-2} \pm \ldots \pm x_1, \end{aligned}$$

přitom znaménka v druhém řádku vybereme přesně taková, jaká byla v součtu určujícím člen $x_k = 12$. Pak se součet v druhém řádku rovná 12, takže vychází

$$x_{k+4} = 12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k + 12 = 12.$$

Vhodný příklad pro $k = 8$ vypadá takto: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,

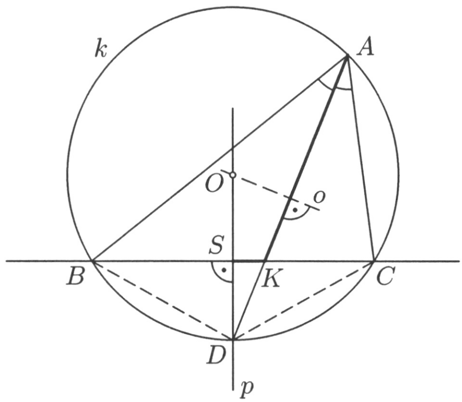
$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - 2 + 1 = 2,\\
x_5 &= 4\cdot 2 - 3 - 2 + 1 = 4,\\
x_6 &= 5\cdot 4 - 4\cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 6,\\
x_7 &= 6\cdot 6 - 5\cdot 4 - 4\cdot 2 + 3 - 2 + 1 = 10,\\
x_8 &= 7\cdot 10 - 6\cdot 6 - 5\cdot 4 - 4\cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,\\
x_9 &= 8\cdot 12 - 7\cdot 10 - 6\cdot 6 + 5\cdot 4 + 4\cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 12,\\
x_{10} &= 9\cdot 12 - 8\cdot 12 - 7\cdot 10 + 6\cdot 6 + 5\cdot 4 + 4\cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,\\
x_{11} &= 10\cdot 12 + 9\cdot 12 - 8\cdot 12 - 7\cdot 10 - 6\cdot 6 - 5\cdot 4 + 4\cdot 2 - 3 + 2 - 1 = 12.
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že jedna z uvažovaných posloupností má pouze prvních sedm členů různých od čísla 12.

A – III – 4

Rozbor. Předpokládejme, že trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti a označme D průsečík kružnice k opsané trojúhelníku ABC

s polopřímkou opačnou k rameni KA daného úhlu AKS (obr. 35). Polopřímka AD půlí úhel BAC, proto jsou úhly BAD a CAD shodné, tudíž jsou shodné i tětivy BD a CD kružnice k. Bod S je proto středem základny BC rovnoramenného trojúhelníku BCD, takže úhel BSD je pravý. To znamená, že bod D leží na přímce p, která prochází bodem S kolmo k danému rameni KS. Střed O kružnice k leží jednak na přímce p (ose tětivy BC), jednak na přímce o, která je osou tětivy AD.



Obr. 35

Konstrukce. Pro daný úhel AKS nejprve proložíme bodem S přímku p kolmou k rameni KS. Pak sestrojíme průsečík D přímky p s polopřímkou opačnou k rameni KA. Dále sestrojíme osu o úsečky AD a její průsečík s přímkou p označíme O. Konečně sestrojíme kružnici k se středem O a poloměrem $r = |OA|$ $(= |OD|)$ a její průsečíky s přímkou KS označíme B a C.

Důkaz konstrukce. Ukážeme, že sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Z posledního kroku konstrukce plyne, že body B, C leží na přímce KS a že bod S je středem úsečky BC. Protože na přímce p, ose úsečky BC, leží i bod D, platí $|BD| = |CD|$, a proto $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$ (neboť všechny body A, B, C, D leží na kružnici k.) Polopřímka AD je tedy osou úhlu BAC a bod K je její průsečík s úsečkou BC.

Diskuse. Vysvětlíme, proč pro daný tupý úhel AKS je hledaný trojúhelník ABC jediný (nepřihlížíme-li k možnosti zaměnit označení vrcholů B a C). Protože je úhel AKS tupý, bod D z naší konstrukce zřejmě existuje a přímky p a o jsou různoběžné, takže i bod O je určen jednoznačně. Zbývá zdůvodnit, proč kružnice k protne přímku KS ve dvou bodech. Protože bod K je vnitřním bodem základny AD rovnoramenného trojúhelníku ADO, platí $|OK| < |OA| = |OD| = r$, tudíž bod K leží ve vnitřní oblasti kružnice k a přímka KS je nutně její sečnou.

A – III – 5

Hledaná dvoumístná čísla A, B mají tvar $A = az+b$ a $B = bz+a$, kde a, b jsou jejich (*nenulové!*) číslice, takže $a, b \in \{1, 2, \ldots, z-1\}$. Kvadratická rovnice z textu úlohy má dvojnásobný kořen x_0, právě když platí $2x_0 = A$ a $x_0^2 = B$. Z těchto rovností plyne, že číslo x_0 je kladné a celé. Vzhledem k nerovnosti $x_0^2 = B < z^2$ (B je totiž dvojmístné, zatímco z^2 je trojmístné) navíc platí $x_0 < z$, odkud $A = 2x_0 < 2z$, takže číslo A má jako první číslici jedničku. Platí tedy $a = 1$ a z rovností $2x_0 = z + b$ a $x_0^2 = bz + 1$ vyloučením x_0 dostaneme pro číslici b kvadratickou rovnici $(b-z)^2 = 4$ s dvěma kořeny $b_1 = z-2$ a $b_2 = z+2$. Za číslici b lze ovšem vzít pouze první z nich, takže nutně $b = z - 2$.

Dokázali jsme, že čísla A, B musejí být tvaru $A = z+(z-2) = 2z-2$ a $B = (z-2)z + 1 = (z-1)^2$; v soustavě o základě z tedy mají zápisy $A = \overline{1(z-2)}$ a $B = \overline{(z-2)1}$. Provedeme ještě *zkoušku*: kvadratická rovnice $x^2 - (2z-2)x + (z-1)^2 = 0$ má skutečně dvojnásobný kořen $x_0 = z - 1$, neboť její levá strana je rovna $(x - z + 1)^2$.

Poznámka. Klíčovou rovnost $a = 1$ lze odvodit i bez úvahy o dvojnásobném kořenu x_0 zkoumané rovnice, když zapíšeme podmínku, že její diskriminant $A^2 - 4B$ je roven nule:

$$0 = A^2 - 4B = (az + b)^2 - 4(bz + a) = b^2 + 2z(a-2)b + a(az^2 - 4).$$

Poslední výraz může mít nulovou hodnotu, jen když je činitel $a - 2$ záporný, neboť $b \geqq 1$, $a \geqq 1$, $z \geqq 3$ a $az^2 - 4 \geqq 3^2 - 4 = 5$. Z nerovnosti $a - 2 < 0$ již ovšem plyne $a = 1$. Pro takové a dostáváme rovnici $0 = b^2 - 2zb + (z^2 - 4)$ a závěr je stejný jako v uvedeném řešení.

A – III – 6

K daným kladným číslům a, b, c splňujícím podmínku $abc = 1$ zapíšeme AG-nerovnost pro trojici čísel a/b, a/b a b/c:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a.$$

Platí tedy odhad

$$\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \geqq a.$$

Ze stejného důvodu platí i odhady

$$\frac{2b}{3c} + \frac{c}{3a} \geqq b \quad \text{a} \quad \frac{2c}{3a} + \frac{a}{3b} \geqq c.$$

Sečtením těchto tří odhadů dostaneme dokazovanou nerovnost.

Jiné řešení. Platí-li pro kladná čísla a, b, c rovnost $abc = 1$, pak $\max\{a,b,c\} \geqq 1$ a $\min\{a,b,c\} \leqq 1$. Protože dokazovaná nerovnost se nezmění, zaměníme-li trojici (a,b,c) trojicí (b,c,a) nebo trojicí (c,a,b), budeme předpokládat, že čísla a a c jsou z trojice (a,b,c) nejmenší a největší (v některém pořadí), takže platí

$$(a-1)(1-c) \geqq 0. \tag{1}$$

Do dokazované nerovnosti dosadíme $c = a^{-1}b^{-1}$ a provedeme několik ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} ab^{-1} + ab^2 + a^{-2}b^{-1} &\geqq a + b + a^{-1}b^{-1}, \qquad / \cdot a^2b \\ a^3 + a^3b^3 + 1 &\geqq a^3b + a^2b^2 + a, \\ a^3b^3 - a^2b^2 - a^3b + a^3 - a + 1 &\geqq 0, \\ a^3(b^3 - b^2 - b + 1) + (a^3 - a^2)b^2 - (a-1) &\geqq 0, \\ a^3(b-1)^2(b+1) + (a-1)(ab-1)(ab+1) &\geqq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí, neboť $(a-1)(ab-1) = (a-1)(ab-abc) = ab(a-1)(1-c)$ a takový součin je podle (1) nezáporný.

Jiné řešení. Pro libovolná kladná čísla A, B, C jsou trojice (A^2, B^2, C^2) a (A, B, C) takzvaně *souhlasně uspořádané*, tudíž platí nerovnost

$$A^2 \cdot A + B^2 \cdot B + C^2 \cdot C \geqq A^2 \cdot B + B^2 \cdot C + C^2 \cdot A. \tag{2}$$

Dokažme (2) bezprostředně: úpravou dostáváme nerovnost

$$(A-C)^2(A+C) + (B-C)(B^2 - A^2) \geqq 0,$$

která zřejmě platí, pokud $B = \max\{A, B, C\}$, čehož lze vždy dosáhnout cyklickou permutací dané trojice čísel.

Zvolíme-li v dokázané nerovnosti (2) hodnoty $A = \sqrt[3]{a/b}$, $B = \sqrt[3]{b/c}$ a $C = \sqrt[3]{c/a}$, obdržíme nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}},$$

ze které za předpokladu $abc = 1$ již plyne dokazovaná nerovnost.