50. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Tomáš Pitner (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 50. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2000/2001. 42. mezinárodní matematická olympiáda. 13. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2001. pp. 51–82.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405030

Kategorie A

Texty úloh

A - I - 1

V urně jsou jen bílé a černé kuličky, jejichž počet zaokrouhlen na stovky je 1 000. Pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček je o $\frac{17}{43}$ větší než pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček. Kolik bílých a kolik černých kuliček je v urně? (Pravděpodobnost vytažení kterékoli kuličky je stejná.) (*P. Černek*)

A - I - 2

Nechť a_1, a_2 jsou přirozená čísla a nechť pro každé přirozené $n \geqq 2$ je číslo a_{n+1} o 1 větší než největší lichý dělitel součtu $a_n + a_{n-1}$. Dokažte, že posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je od určitého členu počínaje periodická. Najděte všechny takové posloupnosti, jež jsou periodické už od prvního členu. (*J. Bábeľa*)

A - I - 3

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě A_1, B_1. Tečny kružnice opsané trojúhelníku CA_1B_1 sestrojené v bodech A_1, B_1 se protínají v bodě M. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AMB_1, BMA_1, CA_1B_1 procházejí jedním bodem. (*J. Švrček*)

A – I – 4

V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic

$$\begin{aligned}\sin x + \cos y &\geqq \sqrt{2},\\ \sin y + \cos z &\geqq \sqrt{2},\\ \sin z + \cos x &\geqq \sqrt{2}.\end{aligned}$$

(*J. Švrček*)

A – I – 5

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y)\cdot\bigl(f(x) + f(y)\bigr).$$

(*E. Kováč*)

A – I – 6

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|DA| = 3\,\mathrm{cm}$ a velikost 75° úhlu, který svírají přímky BC a AD, platí-li navíc $|AB|\cdot|CD| = |AC|^2$. (*E. Kováč*)

A – S – 1

Najděte všechna reálná čísla p, pro která má soustava nerovnic

$$\begin{aligned}25 + 2x^2 &\leqq 13y + 10z - p,\\ 25 + 3y^2 &\leqq 6z + 10x,\\ 25 + 4z^2 &\leqq 6x + 5y + p\end{aligned}$$

s neznámými x, y, z řešení v oboru reálných čísel. (*J. Švrček*)

A – S – 2

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnou AB délky a, v němž oba úhly ABC, ADB jsou pravé. Na straně AB leží bod M tak, že úsečka MD je kolmá na AC a úsečka MC je kolmá na BD. Určete délky ostatních stran lichoběžníku. (*J. Zhouf*)

A - S - 3

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, která jsou dělitelná každým z dvojmístných čísel $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, jejichž číslice a, b, c, d jsou liché a ne všechny stejné. (*J. Šimša*)

A - II - 1

Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + y^2x + x^2y &= n, \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

pouze celočíselná řešení. (*J. Zhouf*)

A - II - 2

Určete všechna reálná čísla s a t, pro která je grafem funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x-1| + x + 7}$$

lomená čára složená ze dvou polopřímek. (*P. Černek*)

A - II - 3

Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální. (*P. Černek*)

A - II - 4

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = (x-y)^2 \cdot f(x+y).$$

(*P. Calábek*)

A – III – 1

Určete všechny mnohočleny P takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$\bigl(P(x)\bigr)^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

(*P. Calábek*)

A – III – 2

V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3\,\mathrm{cm}$, $|PX| = 2{,}6\,\mathrm{cm}$, $|QX| = 3{,}8\,\mathrm{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC. (*J. Šimša*)

A – III – 3

Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c, pro které je množinou řešení nerovnice

$$\sqrt{2x^2 + ax + b} > x - c$$

s neznámou x množina $(-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$. (*P. Černek*)

A – III – 4

V jistém jazyce je n písmen. Skupina písmen (napsaných za sebou) je slovo, právě když se mezi žádnými dvěma stejnými písmeny nenacházejí dvě stejná písmena. Určete počet všech slov maximální délky.

(*K. Černeková*)

A – III – 5

Z papíru byl vystřižen rovnoramenný lichoběžník $C_1AB_2C_2$ s kratší základnou B_2C_2. Patu kolmice ze středu D ramena C_1C_2 na základnu AC_1 označíme B_1. Po přehnutí papíru podél úseček DB_1, AD a AC_2 se body C_1, C_2 přemístily v prostoru do jednoho bodu C a body B_1, B_2 do bodu B. Vznikl tak model čtyřstěnu $ABCD$ s objemem $64\,\mathrm{cm}^3$. Určete délky stran původního lichoběžníku. (*P. Leischner*)

A – III – 6

Jsou dána přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = 1$ pro každé celé $x < 0$ a

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)\, f(x - a_2) \ldots f(x - a_n) \tag{1}$$

pro každé celé $x \geqq 0$. Dokažte, že existují přirozená čísla s a t taková, že pro každé celé $x > s$ platí $f(x + t) = f(x)$. *(P. Kaňovský)*

A – I – 1

Nechť je v urně n kuliček, z toho b bílých (a $n-b$ černých). Potom pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček je rovna podílu

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)},$$

zatímco pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček podílu

$$\frac{\binom{n-b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)}.$$

Podle zadání úlohy platí rovnost

$$\frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{17}{43},$$

kterou lze algebraickými úpravami zjednodušit do tvaru $43b = 13n$ (pro $n \notin \{0,1\}$ jde o ekvivalentní rovnice). Odtud vzhledem k nesoudělnosti čísel 13 a 43 plyne, že přirozená čísla n a b jsou tvaru $n = 43k$ a $b = 13k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Podle zadání pro číslo n platí odhady $950 \leqq n < 1\,050$, z nichž zjistíme, že $k \in \{23, 24\}$. Pro $k = 23$ vychází $n = 989$ a $b = 299$ (tehdy $n-b = 690$), zatímco hodnotě $k = 24$ odpovídá $n = 1\,032$ a $b = 312$ (tehdy $n-b = 720$).

Odpověď: Úloha má dvě řešení — v urně je buď 299 bílých a 690 černých, nebo 312 bílých a 720 černých kuliček.

A – I – 2

Zvolíme-li přirozená čísla a_1, a_2 libovolně, jsou všechny následující členy $a_3, a_4, \ldots$ zkoumané posloupnosti jednoznačně určeny rekurentním předpisem

$$a_{n+1} = 1 + (a_n + a_{n-1})^* \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

kde a^* značí největší lichý dělitel přirozeného čísla a. Vypočtěmě pro několik „počátečních“ dvojic a_1, a_2 tolik prvních členů a_n, ze kterých už bude jasné, kde začíná a jak vypadá perioda dotyčné posloupnosti.[1] Několik příkladů uvádíme v následující tabulce.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
1	1	2	4	4	2	4	4	2	4	...
2	1	4	6	6	4	6	6	4	6	...
1	2	4	4	2	4	4	2	4	4	...
1	3	2	6	2	2	2	2	2	2	...
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
3	1	2	4	4	2	4	4	2	4	...
1	4	6	6	4	6	6	4	6	6	...
2	3	6	10	2	4	4	2	4	4	...
3	2	6	2	2	2	2	2	2	2	...
4	1	6	8	8	2	6	2	2	2	...

(Pro větší hodnoty a_1, a_2 se perioda často objeví „později“, jak ukazuje příklad posloupnosti $30, 31, 62, 94, 40, 68, 28, 4, 2, 4, 4, 2, \ldots$)

Posloupnost vytvořená podle předpisu (1) je od jistého členu, řekněme a_n, periodická, právě když existuje takový index m, že platí

$$m > n, \quad a_m = a_n \quad \text{a} \quad a_{m+1} = a_{n+1}. \tag{2}$$

Vlastní řešení úlohy zahájíme tak, že dokážeme čtyři tvrzení (T1) až (T4), která platí pro každou zkoumanou posloupnost $\{a_n\}$ a která lze vypozorovat z příkladů uvedených v tabulce.

(T1) *Číslo a_n je sudé pro každé $n \geqq 3$.*

Důkaz (T1) je triviální: protože je číslo a^* liché pro každé a, je pravá strana rovnosti v (1) sudá.

(T2) *Nerovnost $a_n \leqq \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$ platí pro každé $n \geqq 5$.*

Důkaz (T2): Protože pro sudé a platí $a^* \leqq \frac{1}{2}a$ a pro každé $n \geqq 5$ jsou podle (T1) obě čísla a_{n-1}, a_{n-2} sudá, platí pro takové n odhad

$$a_n = 1 + (a_{n-1} + a_{n-2})^* \leqq 1 + \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \leqq 1 + \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$$

[1] Je téměř nemyslitelné řešit takové neobvyklé úlohy bez podobného úvodního experimentování. Proto experimenty patří k výzkumu v matematice stejně jako v jiných přírodních vědách.

(neboť aritmetický průměr dvou čísel nepřevyšuje větší z nich). Zjistili jsme, že sudé číslo a_n nepřevyšuje liché číslo $1+\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$, tudíž nepřevyšuje ani číslo o 1 menší, číslo $\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$.

Z dokázaného tvrzení (T2) plyne, že každá zkoumaná posloupnost $\{a_n\}$ má největší člen (a ten se navíc rovná jednomu z čísel a_1, a_2, a_3, a_4). Ukažme, jak snadno již odtud plyne tvrzení o periodičnosti posloupnosti $\{a_n\}$: značí-li M její největší člen, je každá z nekonečně mnoha dvojic (a_n, a_{n+1}) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ rovna jedné z M^2 dvojic (a, b), kde $a, b \in$ $\in \{1, 2, \ldots, M\}$. Proto existují dva různé indexy, řekněme $n < m$, pro které platí $(a_n, a_{n+1}) = (a_m, a_{m+1})$, tj. podmínka (2). Pak ovšem indukcí z (1) plyne, že $a_{n+k} = a_{m+k}$ pro každé $k \geqq 0$. Proto je posloupnost $\{a_n\}$ periodická. První část úlohy je tak vyřešena.

Zdůrazněme ještě, že tvrzení (T2) neznamená, že posloupnost $\{a_n\}$ je od některého členu nerostoucí (vyvracejí to příklady z naší tabulky). Platí ale:

(T3) *Existuje index n_0 (závislý na posloupnosti $\{a_n\}$) takový, že pro každé $n \geqq n_0$ platí rovnost* $\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\} = \max\{a_n, a_{n-1}\}$.

Důkaz (T3): Položme $b_n = \max\{a_n, a_{n-1}\}$ pro každé $n \geqq 4$. Podle (T2) pro každé $n \geqq 5$ platí $a_n \leqq b_{n-1}$, což spolu s triviální rovností $a_{n-1} \leqq b_{n-1}$ vede k závěru, že $b_n \leqq b_{n-1}$. Posloupnost přirozených čísel $b_4, b_5, b_6, \ldots$ je tedy nerostoucí, proto je od jistého členu, řekněme b_{n_0}, konstantní. Důkaz (T3) je hotov.

(T4) *Pro každé $n \geqq n_0$, kde n_0 je index z* (T3), *platí implikace: jestliže $a_n > a_{n+1}$, pak $a_n - a_{n+1} = 2$.*

Důkaz (T4): Pokud $a_n > a_{n+1}$ pro některé $n \geqq n_0$, pak $a_n \geqq a_{n+1} + 2$ podle (T1) a z rovnosti $\max\{a_{n+1}, a_n\} = \max\{a_{n+2}, a_{n+1}\}$ obsažené v (T3) vyplývá, že $a_n = a_{n+2}$, což podle (1) znamená, že $a_n = 1 + (a_n +$ $+ a_{n+1})^*$. Číslo $a_n - 1$ je tedy dělitelem (většího) čísla $a_n + a_{n+1}$, a tak platí nerovnost $a_n + a_{n+1} \geqq 2(a_n - 1)$, odkud $a_n \leqq a_{n+1} + 2$. Protože platí i obrácená nerovnost (viz výše), je důkaz (T4) ukončen.

S pomocí tvrzení (T3) a (T4) teď dokončíme řešení úlohy. (Ukáže se, že všechny možné periodické skupiny členů lze vyčíst z naší tabulky.) Uvažujme i nadále libovolnou zkoumanou posloupnost $\{a_n\}$ a jí příslušný index n_0 z (T3). Mohou nastat dva případy:

(i) nerovnost $a_n \leqq a_{n+1}$ platí pro každé $n \geqq n_0$,

(ii) pro některé $n \geqq n_0$ platí $a_n > a_{n+1}$.

V případě (i) z (T3) plyne indukcí, že $a_n = a_{n_0}$ pro každé $n \geqq n_0$. Možnou hodnotu $c = a_{n_0}$ najdeme podle (1) z rovnosti $c = 1 + (2c)^*$. Protože $(2c)^* = c^*$, dostáváme $c^* = c - 1$. Číslo $c - 1$ je však dělitelem čísla c zřejmě jen pro $c = 2$. Zkoumaná posloupnost je tedy tvaru

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, 2, 2, 2, \ldots \tag{3}$$

V případě (ii) z nerovnosti $a_n > a_{n+1}$ podle (T4) plyne $a_n = 2d$ a $a_{n+1} = 2d - 2$ pro vhodné celé $d > 1$ (připomeňme, že a_n je sudé podle (T1)). Podle předpisu (1) pak dostáváme

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 1 + (2d + 2d - 2)^* = 1 + (2d - 1) = 2d, \\ a_{n+3} &= 1 + (2d - 2 + 2d)^* = 1 + (2d - 1) = 2d, \\ a_{n+4} &= 1 + (2d + 2d)^* = 1 + d^*. \end{aligned}$$

Pro $d > 1$ ovšem platí $2d > 1 + d \geqq 1 + d^*$, a tak $a_{n+3} > a_{n+4}$. To opět podle (T4) znamená, že $a_{n+3} - a_{n+4} = 2$, neboli $(2d) - (1 + d^*) = 2$, odkud $2d - 3 = d^* \leqq d$, takže $d \leqq 3$. V případě $d = 2$ je zkoumaná posloupnost tvaru

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 4, 2, 4, 4, 2, 4, 4, 2, \ldots, \tag{4}$$

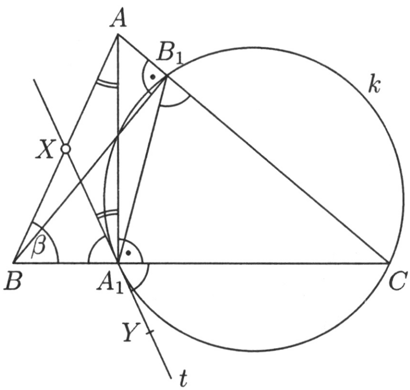
zatímco pro $d = 3$ má tvar

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, \ldots \tag{5}$$

Dokázali jsme, že *každá* posloupnost ze zadání úlohy je jednoho z tvarů (3), (4), (5). Odtud již plyne, že periodické od prvního členu jsou právě ty posloupnosti, které mají dvojici prvních členů (a_1, a_2) rovnu jedné ze sedmi dvojic $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$ a $(6, 6)$.

A – I – 3

Označme k kružnici opsanou trojúhelníku CA_1B_1. V první části řešení ukážeme, že bod M z textu úlohy je středem strany AB. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží paty A_1, B_1 příslušných výšek uvnitř odpovídajících stran. S ohledem na symetrii dané situace stačí uvažovat



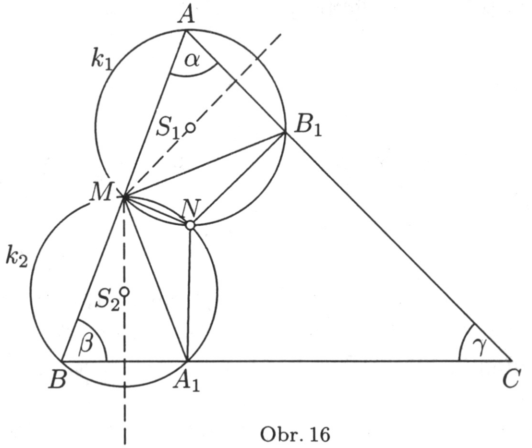
Obr. 15

jen tečnu t ke kružnici k sestrojenou v bodě A_1, označit X její průsečík s přímkou AB a dokázat rovnost $|AX| = |BX|$ (obr. 15).

Označme ještě Y libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce A_1X. Protože jsou oba úhly AA_1B a BB_1A pravé, je čtyřúhelník ABA_1B_1 tětivový, a tak platí $|\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - |\sphericalangle ABA_1| = 180° - \beta$, kde jako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Proto má obvodový úhel A_1B_1C v kružnici k nad tětivou A_1C velikost $|\sphericalangle A_1B_1C| = 180° - |\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - (180° - \beta) = \beta$, stejnou velikost má i příslušný úsekový úhel YA_1C.[2] Protože úhly XA_1B a YA_1C jsou vrcholové, dohromady dostáváme $|\sphericalangle XA_1B| = |\sphericalangle YA_1C| = |\sphericalangle A_1B_1C| = \beta$ (tyto shodné úhly jsou na obr. 15 vyznačeny obloučky). Zároveň platí i $|\sphericalangle XA_1A| = |\sphericalangle XAA_1| = 90° - \beta$. Zjistili jsme, že tečna t protne přímku AB v takovém bodě X, pro který jsou trojúhelníky BA_1X a A_1AX rovnoramenné, tj. $|BX| = |A_1X| = |AX|$.

Dokázali jsme, že bod M (průsečík tečen ke kružnici k s body dotyku A_1 a B_1) splývá se středem strany AB. Označme nyní k_1 a k_2 kružnice opsané po řadě trojúhelníkům AMB_1 a BMA_1 a S_1, S_2 jejich středy (obr. 16). Jedním průsečíkem kružnic k_1 a k_2 je bod M, druhý průsečík označme N. Protože body S_1, S_2 leží v polorovině ABC, leží v ní i bod N, neboť je souměrně sdružený s M podle středné S_1S_2. Naší úlohou je dokázat, že bod N leží na jedné kružnici s body A_1, B_1 a C.

[2] K pojmu úsekového úhlu a jeho shodnosti s obvodovým úhlem viz S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 3–7.



Obr. 16

Jak už víme, je trojúhelník BA_1M rovnoramenný, a protože

$$|\sphericalangle BB_1M| = 90° - \alpha < \beta = |\sphericalangle BA_1M|$$

(tato nerovnost je ekvivalentní tomu, že $\gamma < 90°$), leží bod B_1 vně kružnice k_2. To znamená, že kružnice k_2 musí protínat kružnici k_1 v tom jejím oblouku nad tětivou MB_1, který odpovídá obvodovému úhlu $180° - \alpha$. Analogicky zjistíme, že bod A_1 leží vně kružnice k_1, takže průsečík N leží na oblouku kružnice k_2 příslušného tětivě MA_1 a obvodovému úhlu $180° - \beta$. Protože zároveň

$$\begin{aligned}|\sphericalangle B_1NM| + |\sphericalangle A_1NM| &= (180° - \alpha) + (180° - \beta) = \\ &= 360° - (\alpha + \beta) = 180° + \gamma > 180°,\end{aligned}$$

musí bod N ležet uvnitř trojúhelníku A_1B_1M (přímka A_1B_1 tedy odděluje body C a N). Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (kde $\gamma = |\sphericalangle A_1CB_1|$), plyne odtud, že ve čtyřúhelníku A_1CB_1N je součet vnitřních úhlů u protilehlých vrcholů C a N roven $180°$, a tak je tento čtyřúhelník skutečně tětivový.

A – I – 4

Sečtením všech tří daných nerovnic dostaneme nerovnost

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin z + \cos z) \geqq 3\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Na druhou stranu pro každé reálné číslo t platí[3]

$$\begin{aligned} \sin t + \cos t &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(\sin t \cos\frac{\pi}{4} + \cos t \sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

neboť $\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \leqq 1$; přitom rovnost v druhém řádku (2) nastane, právě když $t + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, neboli $t = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ pro některé celé číslo k. Sečtením tří odhadů (2) pro $t = x$, $t = y$ a $t = z$ dostaneme nerovnost

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin z + \cos z) \leqq 3\sqrt{2}. \tag{3}$$

Zdůrazněme, že nerovnost (3) platí pro *libovolnou trojici* reálných čísel (x, y, z), zatímco opačná nerovnost (1) platí pro *každé řešení* původní soustavy. Tak zjišťujeme, že nerovnost (1) může být splněna jedině jako rovnost, což se podle předchozího stane, právě když čísla x, y, z budou tvaru

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, \quad y = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, \quad z = \frac{\pi}{4} + 2k_3\pi \quad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}).$$

Dosazením do původní soustavy se snadno přesvědčíme, že každá taková trojice čísel (x, y, z) je skutečně řešením, platí pro ni totiž

$$\sin x = \cos x = \sin y = \cos y = \sin z = \cos z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Zmínka o zkoušce byla nutná, protože nerovnost (1) je pouze *důsledkem* zadané soustavy: nemohli jsme vyloučit, že pro některou trojici čísel (x, y, z) platí (1), avšak neplatí některá ze tří původních nerovností.)

Poznámka. Nerovnost (2) můžeme snadno získat z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem:

$$\sin t + \cos t \leqq |\sin t| + |\cos t| \leqq 2\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{2}} = \sqrt{2}.$$

---

[3] Provedeme úpravu, kterou běžně používáme při řešení rovnic typu $a \sin t + b \cos t = c$. Jiná možnost je použít nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem, viz poznámku na konci řešení.

K řešení úlohy lze místo (1) využít i jiných důsledků dané soustavy. Přepišme například první z daných nerovnic do tvaru $\sin x \geqq \sqrt{2} - \cos y$. Platí-li tato nerovnost, platí i umocněná nerovnost $\sin^2 x \geqq \left(\sqrt{2} - \cos y\right)^2$, neboť $\sqrt{2} - \cos y > 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Sečtením tří nerovností

$$\sin^2 x \geqq \left(\sqrt{2} - \cos y\right)^2, \ \sin^2 y \geqq \left(\sqrt{2} - \cos z\right)^2, \ \sin^2 z \geqq \left(\sqrt{2} - \cos x\right)^2$$

dostaneme po úpravách nerovnost

$$0 \geqq \left(1 - \sqrt{2}\cos x\right)^2 + \left(1 - \sqrt{2}\cos y\right)^2 + \left(1 - \sqrt{2}\cos z\right)^2,$$

ze které už plyne vše potřebné.

Řešení úlohy můžeme zahájit ještě jedním způsobem. Umocněme nejdříve každou ze tří daných nerovnic na druhou (jde o důsledkovou úpravu, neboť menší [pravá] strana nerovnice je kladná) a pak je sečtěme. Po snadné úpravě vyjde nerovnost

$$2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z + 2\sin z \cos x \geqq 3.$$

O obecné platnosti opačné nerovnosti se přesvědčíme tak, že každý ze tří členů na levé straně odhadneme shora pomocí „klasické“ nerovnosti $2uv \leqq u^2 + v^2$ (jež je ostrá v případě $u \neq v$):

$$\begin{aligned} &2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z + 2\sin z \cos x \leqq \\ &\qquad \leqq (\sin^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 y + \cos^2 z) + (\sin^2 z + \cos^2 x) = 3. \end{aligned}$$

(Tak odvodíme nutné podmínky $\sin x = \cos y$, $\sin y = \cos z$, $\sin z = \cos x$, za kterých je řešení původní soustavy již triviální úlohou.)

A – I – 5

Vypíšeme přehled všech výsledků dosazení, které budeme dále potřebovat (písmeno a značí libovolné reálné číslo):

$$\begin{array}{lll} \text{(D1)} & x = 0,\ y = 0: & f(0) = \left(f(0)\right)^2, \\ \text{(D2)} & x = 0,\ y = a: & a^2 + 2f(0) = f(a)\cdot\left(f(a) + f(0)\right), \\ \text{(D3)} & x = a,\ y = a: & a^2 + f(a^2) = f(a)\cdot f(2a), \\ \text{(D4)} & x = a,\ y = -a: & 2a^2 + 2f(-a^2) = f(0)\cdot\left(f(a) + f(-a)\right), \\ \text{(D5)} & x = 1,\ y = 1: & 1 = f(1)\cdot\left(f(2) - 1\right). \end{array}$$

Z (D1) plyne, že číslo $f(0)$ je řešením rovnice $t = t^2$, je to tedy číslo $t = 0$ nebo $t = 1$. Diskutujme obě možnosti odděleně.

(i) Případ $f(0) = 0$. Dosadíme-li $f(0) = 0$ do (D2), dostaneme $a^2 = \big(f(a)\big)^2$, odkud $f(a) = a$ nebo $f(a) = -a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Zdůrazněme, že zatím nevíme, zda pro všechna x platí stejný z obou předpisů $f(x) = x$ resp. $f(x) = -x$ (víme jen, že existuje $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathsf{A}$ a $f(x) = -x$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathsf{A}$).

Ukažme nejprve, že předpis $f(x) = x$ platí pro všechna nekladná x: dosadíme-li $f(0) = 0$ do (D4), dostaneme rovnost $f(-a^2) = -a^2$, takže $f(x) = x$ pro všechna ta reálná čísla x, která se dají zapsat ve tvaru $x = -a^2$ s vhodným $a \in \mathbb{R}$, a to jsou všechna nekladná x. Nyní zdůvodníme, proč $f(x) = x$ rovněž pro všechna kladná x: kdyby totiž pro některé $a \neq 0$ neplatilo $f(a^2) = a^2$, platilo by podle předchozího odstavce $f(a^2) = -a^2$, a tak bychom podle (D3) měli $f(a)f(2a) = 0$, což je ale ve sporu s tím, že obě čísla $f(a)$ a $f(2a)$ jsou nenulová (jsou to čísla $\pm a$ resp. $\pm 2a$, předpoklad ale byl, že $a \neq 0$). Tím je dokázáno, že $f(x) = x$ pro každé x. Dosazením se snadno ověří, že taková funkce je skutečně řešením naší úlohy.

(ii) Případ $f(0) = 1$. Po dosazení $f(0) = 1$ do (D2) dostaneme pro hodnotu $f(a)$ kvadratickou rovnici $\big(f(a)\big)^2 + f(a) - a^2 - 2 = 0$. Jejím řešením zjistíme, že

$$f(a) \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{4a^2 + 9}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{4a^2 + 9}}{2} \right\} \quad \text{pro každé } a \in \mathbb{R}.$$

Speciálně pro $a = 1$ a pro $a = 2$ vychází

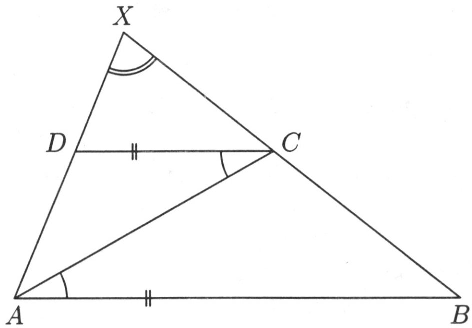
$$f(1) \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right\} \quad \text{a} \quad f(2) \in \{2, -3\},$$

odkud plyne, že číslo $f(1)$ je iracionální, zatímco číslo $f(2)-1$ je racionální a různé od nuly. Proto je součin $f(1) \cdot \big(f(2)-1\big)$ iracionální, což je ve sporu s (D5). Hledaná funkce f splňující podmínku $f(0) = 1$ tudíž neexistuje.

Odpověď: Danou funkcionální rovnici splňuje jediná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a to funkce určená předpisem $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

A – I – 6

Rovnost ze zadání přepišme jako $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$. Tato úměra spolu s rovností střídavých úhlů BAC a ACD (obr. 17) znamená, že



Obr. 17

trojúhelníky BAC a ACD jsou podobné podle věty *sus*. Protože strany BC a AD si v této podobnosti odpovídají a podle zadání platí $|BC| :$ $: |AD| = 3 : 2$, platí rovněž $|AB| : |CA| = 3 : 2$ a $|AC| : |CD| = 3 : 2$. Vynásobením posledních dvou rovností dostaneme $|AB| : |CD| = 9 : 4$, takže základna AB lichoběžníku $ABCD$ je delší než základna CD. Proto se protínají polopřímky AD a BC, jejich průsečík označme X. Podle zadání má úhel CXD velikost $75°$ nebo $105°$.

Trojúhelníky ABX a DCX jsou podobné podle věty *uu* a podle předchozího platí $|AB| = \frac{9}{4}|DC|$, proto rovněž $|AX| = \frac{9}{4}|DX|$. Dosadíme-li sem za $|AX|$ součet $|AD| + |DX|$, vyjde $|DX| = \frac{4}{5}|AD| = 2{,}4\,\mathrm{cm}$. Analogicky $|CX| = \frac{4}{5}|BC| = 3{,}6\,\mathrm{cm}$.

Konstrukce:

1. Trojúhelník CDX: $|DX| = 2{,}4\,\mathrm{cm}$, $|CX| = 3{,}6\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DXC| \in$ $\in \{75°, 105°\}$,
2. bod A: A leží na polopřímce opačné k DX, $|AD| = 3\,\mathrm{cm}$,
3. bod B: B leží na polopřímce opačné k CX, $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$.

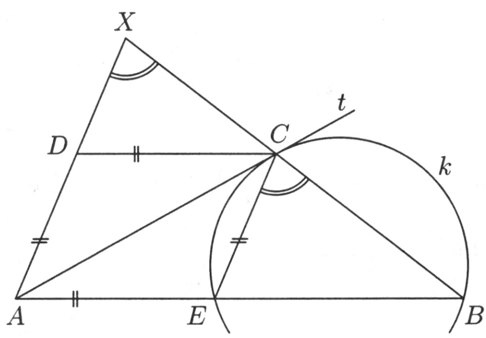
Nyní je třeba ukázat, že takto sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ má všechny požadované vlastnosti (tj. provést *důkaz správnosti* konstrukce). Předně body 2 a 3 konstrukce zaručují, že strany BC a AD mají předepsané délky. Podle bodu 1 svírají přímky BC a AD předepsaný úhel a platí

$$|AX| = |AD| + |DX| = 5{,}4\,\text{cm} \quad \text{a} \quad |BX| = |BC| + |CX| = 8{,}1\,\text{cm},$$

a tak je poměr $|AX| : |BX|$ roven $2 : 3$ stejně jako poměr $|DX| : |CX|$. Trojúhelníky ABX a DCX jsou tudíž stejnolehlé, proto jsou úsečky AB a CD rovnoběžné. Tak jsme ověřili, že $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB, CD. Z rovnosti poměrů $|AX| : |BX| = 2 : 3 = |CX| : |AX|$ plyne podobnost trojúhelníků ABX a CAX (se společným úhlem při vrcholu X), takže úhly ABX a CAX (neboli úhly ABC a CAD) jsou shodné. Protože jsou shodné rovněž (střídavé) úhly BAC a ACD, podle věty *uu* zjišťujeme, že jsou podobné trojúhelníky ABC a CAD. Proto platí $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$, tudíž $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$. (Poslední rovnost lze dokázat také tak, že délky úseček AB, CD a AC vyjádříme podle kosinové věty pro trojúhelníky ABX, CDX resp. ACX.) Všechny požadované vlastnosti sestrojeného čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tak ověřeny.

Druhé řešení. Zadaná rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ evokuje otázku, zda nelze úlohu řešit pomocí známého tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici. Ukažme, že je tomu skutečně tak.

Předpokládejme nejprve, že $|AB| > |CD|$ a označme X průsečík polopřímek AD a BC. Vhodným bodem E základny AB doplňme trojúhelník ACD na rovnoběžník $AECD$ (obr. 18).[4] Všimněme si, že v trojúhelníku BCE známe délky stran BC, EC ($|EC| = |AD|$) a velikost úhlu BCE



Obr. 18

[4] To je dosti obvyklý obrat v situaci, kdy jsou dány délky ramen lichoběžníku a úhel, který tato ramena svírají.

($|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle CXD|$). Opišme tomuto trojúhelníku kružnici a označme ji k. Protože $|AE| = |CD|$, lze zadanou rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ zapsat jako $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. To znamená, že přímka AC je tečnou ke kružnici k. Tím je rozbor případu $|AB| > |CD|$ ukončen. V případě $|AB| < |CD|$ stačí v rozboru provést dvě změny: bod X je průsečíkem polopřímek DA a CB, bod E leží na polopřímce opačné k BA (nikoliv na základně AB).

Konstrukce:

1. Trojúhelník BCE: $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|EC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BCE| \in \in \{75°, 105°\}$,
2. kružnice k opsaná trojúhelníku BCE,
3. tečna t ke kružnici k v bodě C,
4. bod A: $A \in BE \cap t$,
5. bod D: $AECD$ je rovnoběžník.

(Protože dle zadání platí $|BC| > |EC|$, padne bod A při konstrukci podle bodu 4 na polopřímku opačnou k EB. Bod E bude tedy náležet úsečce AB, takže nastane případ $|AB| > |CD|$.)

Při důkazu správnosti konstrukce opět využijeme mocnost bodu ke kružnici (v opačném „směru“, než tomu bylo v rozboru): protože je přímka AC tečnou kružnice k, platí rovnost $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Zbytek důkazu je triviální.

A – S – 1

Sečtením všech tří nerovnic dostaneme nerovnost

$$75 + 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leqq 16x + 18y + 16z,$$

z níž po „doplnění na druhé mocniny“ vychází

$$2(x-4)^2 + 3(y-3)^2 + 4(z-2)^2 \leqq 0.$$

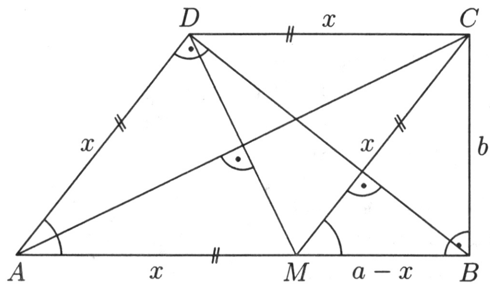
Tato nerovnost, jež je důsledkem dané soustavy nerovnic, zřejmě platí jedině tehdy, když jsou základy všech tří dvojmocí na levé straně nerovnosti rovny nule, tedy když $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$. Daná soustava má proto (při zvoleném p) nejvýše jedno řešení, a to právě vypsanou trojici čísel. Zjistíme nyní, pro kterou hodnotu parametru p se skutečně jedná o řešení. Po dosazení hodnot $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ do dané soustavy dostaneme trojici nerovností

$$57 \leqq 59 - p, \quad 52 \leqq 52, \quad 41 \leqq 39 + p.$$

Z první nerovnosti vychází podmínka $p \leqq 2$, ze třetí podmínka $p \geqq 2$. Číslo $p = 2$ je tedy jediná hodnota p, pro kterou má daná soustava v oboru reálných čísel řešení.

A – S – 2

Úsečky MC a AD jsou rovnoběžné (obě jsou totiž kolmé k úsečce BD, obr. 19); protože jsou rovnoběžné i úsečky AM a DC, je čtyřúhelník



Obr. 19

$AMCD$ rovnoběžník. Je to dokonce kosočtverec, neboť jeho úhlopříčky jsou dle zadání navzájem kolmé. Označme proto $x = |CD| = |DA| = |AM| = |MC|$, zřejmě $a > x$. Pak $|MB| = a - x$ a ze shodnosti souhlasných úhlů DAM a CMB plyne podobnost pravoúhlých trojúhelníků ABD a MCB, takže platí úměra $|AD| : |AB| = |MB| : |MC|$, neboli $x : a = (a - x) : x$. Odtud pro neznámou délku x vychází kvadratická rovnice $x^2 + ax - a^2 = 0$, která má jediné kladné řešení $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\, a$. Tak jsme vypočetli (shodné) délky základny CD a ramena AD daného lichoběžníku; zbývá určit délku ramena BC. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník CMB dostáváme

$$|BC| = \sqrt{|MC|^2 - |MB|^2} = \sqrt{x^2 - (a - x)^2} = \sqrt{a(2x - a)} = \\ = a\sqrt{\sqrt{5} - 2},$$

neboť $2x - a = a\big(\sqrt{5} - 2\big)$.

A – S – 3

Z vyjádření $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$ plyne, že podmínky dělitelnosti čísly $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou splněny, právě když $\overline{cd} \mid 100 \cdot \overline{ab}$ a $\overline{ab} \mid \overline{cd}$, tedy právě když $\overline{cd} = k \cdot \overline{ab}$, kde přirozené číslo k je některý dělitel čísla 100. Protože obě čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou dle zadání lichá a dvojciferná, plyne odtud, že buď $k = 1$, nebo $k = 5$. Rozlišíme oba případy, přitom s ohledem na vyjádření $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{bc} + (1000a + + d)$ budeme místo podmínky $\overline{bc} \mid \overline{abcd}$ zkoumat ekvivalentní podmínku

$$\overline{bc} \mid (1000a + d). \tag{P}$$

(Tato úprava není nutná, jen poněkud zjednodušuje další zápisy.)

a) Je-li $\overline{cd} = \overline{ab}$, platí $c = a$ a $d = b$, takže podmínka (P) se zapíše ve tvaru $(10b + a) \mid (1000a + b)$. Protože

$$1000 \cdot (10b + a) - (1000a + b) = 9999 \cdot b = 11 \cdot 9 \cdot 101 \cdot b$$

a 101 je prvočíslo (tudíž je s číslem $10b + a$ nesoudělné), dostáváme ekvivalentní podmínku $(10b + a) \mid (11 \cdot 9b)$. Odtud s ohledem na zřejmou nerovnost $10b + a > 9b$ plyne, že číslo $10b + a$ má číslo 11 ve svém rozkladu na prvočinitele. Podmínka $11 \mid (10b + a)$ je však splněna, jen když se číslice a a b rovnají, pak by však z rovnosti $\overline{cd} = \overline{ab}$ vyplývalo, že číslo $\overline{abcd}$ má *všechny* číslice stejné. O takových číslech podle zadání úlohy neuvažujeme.

b) Z rovnosti $\overline{cd} = 5 \cdot \overline{ab}$ ihned určíme (liché) cifry $a = 1$ a $d = 5$, po jejich dosazení po úpravě vyjde rovnost $b = 2c - 9$, takže jsou tři možnosti:

$$c = 5 \text{ a } b = 1, \quad c = 7 \text{ a } b = 5, \quad c = 9 \text{ a } b = 9.$$

Podmínka (P) má nyní tvar $\overline{bc} \mid 1\,005$, z čísel 15, 57 a 99 je však pouze číslo 15 dělitelem čísla 1 005 ($1\,005 = 3 \cdot 5 \cdot 67$), proto nutně $b = 1$ a $c = 5$.

Odpověď: Hledané číslo je jediné, a to 1 155.

A – II – 1

Předpokládejme, že parametr n je přirozené číslo, a řešme danou soustavu v oboru reálných čísel. Levá strana první rovnice je rovna $(x^2+y^2)(x+y)$, a tak pro čísla $s = x + y$ a $t = x^2 + y^2$ platí $t \cdot s = n$ a $t + s = n + 1$. Čísla s, t jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $w^2 - (n + 1)w + n = 0$.

Z rozkladu $w^2-(n+1)w+n=(w-n)(w-1)$ vidíme, že $\{s,t\}=\{1,n\}$. Dvojice (x,y) je tedy řešením původní soustavy, právě když je řešením jedné ze soustav

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=n \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \begin{cases} x+y=n, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{1}$$

V prvním případě jsou čísla x, y kořeny kvadratické rovnice $z^2+(1-z)^2=n$. Jejím řešením dostaneme

$$\{x,y\}=\left\{\frac{1+\sqrt{2n-1}}{2},\frac{1-\sqrt{2n-1}}{2}\right\}. \tag{2}$$

Podobně z druhé soustavy v (1) plyne, že čísla x, y jsou kořeny kvadratické rovnice $z^2+(n-z)^2=1$. Její diskriminant $D=4(2-n^2)$ je nezáporný jedině pro $n=1$ (připomeňme, že n je přirozené), pak jsou ovšem obě soustavy v (1) totožné, takže žádné další řešení kromě (2) neexistuje.

Zjistili jsme, že pro každé přirozené číslo n jsou všechna řešení původní soustavy v oboru *reálných* čísel popsána vztahem (2). Jsou to celá čísla, právě když je hodnota $2n-1$ druhou mocninou (lichého) přirozeného čísla. Je-li číslo n čtyřmístné, pak $n \geqq 1\,000$, a tak $2n-1 \geqq 1\,999$. Protože $44^2=1\,936$ a $45^2=2\,025$, hledané číslo n určíme z rovnice $2n-1=2\,025$. Zřejmě $n=1\,013$.

Poznamenejme, že v první části řešení můžeme postupovat i takto: do první rovnice $(x^2+y^2)(x+y)=n$ lze dosadit za první činitel vyjádření $x^2+y^2=n+1-(x+y)$ z druhé rovnice. Tak získáme pro neznámou $s=x+y$ kvadratickou rovnici $(n+1-s)s=n$, jejíž kořeny jsou $s_1=1$ a $s_2=n$.

A – II – 2

Předpokládejme, že s a t jsou (pevná) čísla požadované vlastnosti. Graf funkce f je sjednocením grafů funkcí f_1 a f_2, které jsou určeny vzorci

$$f_1(x)=\frac{x^2-4x+s}{(1-t)x+(t+7)}, \quad f_2(x)=\frac{x^2-4x+s}{(t+1)x+(7-t)} \tag{1}$$

a mají definiční obory $D(f_1)=(-\infty,1\rangle$, $D(f_2)=\langle 1,\infty)$ (polopřímky bez jakýchkoliv vyloučených bodů, neboť hodnota $f(x)$ dle popisu grafu f

existuje pro každé $x \in \mathbb{R}$). Čísla s a t určíme z podmínky, že grafy funkcí f_1 a f_2 jsou polopřímky (takže jde o lineární funkce). Zřejmě platí $t \neq \pm 1$ (jinak by graf jedné z funkcí f_1, f_2 byl částí paraboly), proto můžeme lineární funkce ze jmenovatelů zlomků v (1) zapsat ve tvaru

$$(1-t)x + (t+7) = (1-t)(x - x_1), \quad \text{kde} \quad x_1 = \frac{t+7}{t-1}, \tag{2a}$$

a

$$(t+1)x + (7-t) = (t+1)(x - x_2), \quad \text{kde} \quad x_2 = \frac{t-7}{t+1}. \tag{2b}$$

Výhodu těchto rozkladů oceníme při vyjadřování podmínky, že obě funkce f_1 a f_2 jsou lineární. Předtím však poznamenejme, že hodnota $f_1(x)$ existuje pro každé $x \leqq 1$ a hodnota $f_2(x)$ pro každé $x \geqq 1$, právě když čísla x_1, x_2 z rozkladů (2) splňují podmínku

$$x_2 < 1 < x_1. \tag{3}$$

Vzorce (1) určují lineární funkce f_1 a f_2, právě když je kvadratický mnohočlen x^2-4x+s dělitelný (beze zbytku) každým z lineárních mnohočlenů $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$. Protože však podle (3) platí $x_1 \neq x_2$, lze podmínku z předchozí věty vyjádřit rovností mnohočlenů

$$x^2 - 4x + s = (x - x_1)(x - x_2). \tag{4}$$

Poznamenejme, že za podmínky (4) budou předpisy pro funkce f_1, f_2 tvaru

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{1-t} \qquad \text{a} \qquad f_2(x) = \frac{x - x_1}{t+1};$$

podmínka (3) zaručí, že polopřímky, které jsou grafy f_1 a f_2, neleží na téže přímce (kdyby ležely, nebyla by grafem f *lomená čára*): osu x totiž protne jak polopřímka $y = f_1(x)$ (v bodě $[x_2, 0]$), tak i polopřímka $y = f_2(x)$ (v bodě $[x_1, 0]$).

Podmínka (4) je s ohledem na (2) ekvivalentní s dvojicí rovnic

$$4 = \frac{t+7}{t-1} + \frac{t-7}{t+1} \quad \text{a} \quad s = \frac{t+7}{t-1} \cdot \frac{t-7}{t+1} = \frac{t^2-49}{t^2-1},$$

ze kterých určíme neznámé hodnoty s a t. Úpravou první rovnice vyjde $t^2 = 9$, možné hodnoty t jsou tedy ± 3; podle druhé rovnice jim odpovídá stejná hodnota $s = -5$. Je-li $t = 3$, platí podle (2) $x_1 = 5$ a $x_2 = -1$

(podmínka (3) je tehdy splněna), je-li $t = -3$, pak $x_1 = -1$ a $x_2 = 5$ (podmínka (3) splněna není). Řešením úlohy je tedy jediná dvojice $(s, t) = (-5, 3)$.

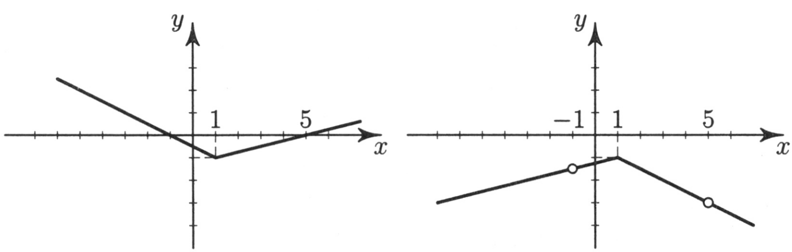
Přestože jsme celé řešení vedli tak, že zkouška nutná není, proveďme ji jak pro dvojici $(s,t) = (-5, 3)$, tak pro dvojici $(s,t) = (-5,-3)$. Pro první dvojici vychází

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{3|x-1| + x + 7} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-5)}{-2(x-5)} = -\dfrac{x+1}{2} & (x \leqq 1), \\[2ex] \dfrac{(x+1)(x-5)}{4(x+1)} = \dfrac{x-5}{4} & (x \geqq 1), \end{cases}$$

takže opravdu jde o řešení (obr. 20a); dvojici $(s,t) = (-5,-3)$ odpovídá funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{-3|x-1| + x + 7} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-5)}{4(x+1)} = \dfrac{x-5}{4} & (-1 \neq x \leqq 1), \\[2ex] \dfrac{(x+1)(x-5)}{-2(x-5)} = -\dfrac{x+1}{2} & (5 \neq x \geqq 1), \end{cases}$$

jejímž grafem je lomená čára bez dvou bodů (obr. 20b), takže dvojici $(s,t) = (-5,-3)$ nelze považovat za řešení.



Obr. 20a Obr. 20b

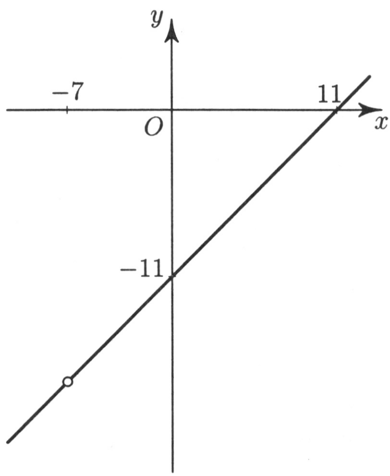
Poznámka. Podmínku linearity obou funkcí f_1 a f_2 (aniž zavedeme čísla x_1, x_2) můžeme vyjádřit i takto: mnohočlen $x^2 - 4x + s$ je dělitelný jak mnohočlenem $(1-t)x + (t+7)$, tak i mnohočlenem $(t+1)x + (7-t)$, je tedy dělitelný i jejich součinem, tudíž platí rovnost mnohočlenů

$$\big((1-t)x + (t+7)\big)\big((t+1)x + (7-t)\big) = (1-t^2)(x^2 - 4x + s)$$

(koeficient $(1 - t^2)$ se zjistí porovnáním kvadratických členů). Tento závěr je však korektní, jen když jsou oba lineární mnohočleny *nesoudělné*; v našem řešení je tato nesoudělnost zaručena podmínkou (3). Soudělným mnohočlenům ze jmenovatelů zlomků v (1) odpovídá „řešení“ $(s, t) = (-77, 0)$ s příslušnou funkcí

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 77}{x + 7} = x - 11 \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq -7),$$

jejíž graf (obr. 20c) je sice složen ze dvou polopřímek, ale jejich společný počátek do grafu f nepatří (navíc tyto polopřímky svírají přímý úhel, takže jejich sjednocení není lomená čára).

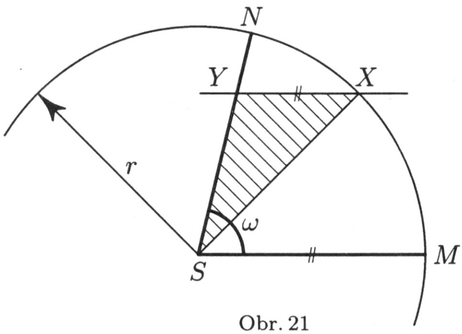


Obr. 20c

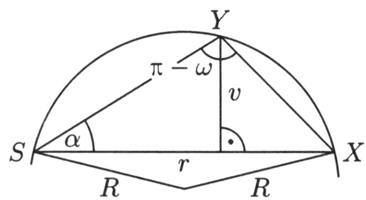
A – II – 3

Ve všech řešeních značíme $\omega = |\sphericalangle MSN|$.

Řešení 1. Z rovnoběžnosti přímek SM a XY plyne rovnost $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ (obr. 21). Proto se všechny uvažované trojúhelníky SXY shodují nejen v délce strany SX (rovné poloměru r kružnice k) ale i ve velikosti protilehlého vnitřního úhlu SYX. Kružnice opsané všem trojúhelníkům SXY mají tedy týž poloměr R (rovný $r/(2\sin\omega)$), a bod Y leží vždy na tom jejich oblouku, ze kterého je tětiva SX délky r vidět pod úhlem $\pi - \omega$. Výška v ke straně SX trojúhelníku SYX tudíž zřejmě nepřevyšuje výšku kruhové úseče z obr. 22, přitom je rovna této výšce, právě když platí $|SY| = |XY|$. Proto má ze všech trojúhelníků SXY největší obsah právě ten, který má shodné strany SY a XY. Jeho vnitřní úhel α u vrcholu S je shodný s vnitřním úhlem u vrcholu X, a tak platí $2\alpha + (\pi - \omega) = \pi$, odkud $\alpha = \frac{1}{2}\omega$, což znamená, že polopřímka SX je osou úhlu MSN. Průsečík této osy s kružnicí k proto určuje hledaný bod X.



Obr. 21



Obr. 22

Dodejme, že maximální výšku v trojúhelníku SXY ke straně SX lze určit i jiným postupem (bez úvah o kruhové úseči): označíme-li Y_0 patu výšky z vrcholu Y, $\alpha = |\sphericalangle XSY|$ a $\beta = |\sphericalangle SXY|$, potom platí

$$v \cdot \operatorname{cotg} \alpha + v \cdot \operatorname{cotg} \beta = |SY_0| + |XY_0| = |SX| = r,$$

odkud s ohledem na to, že $\alpha + \beta = \omega$ a že funkce cotg je v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ konvexní, vychází odhad

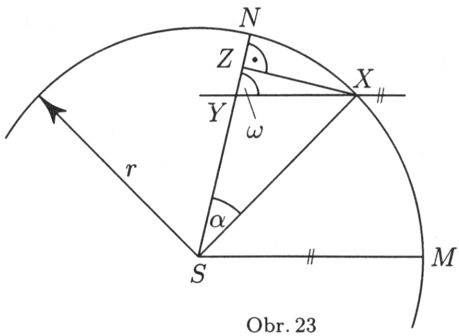
$$v = \frac{r}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta} \leqq \frac{r}{2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{r}{2 \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}} = \frac{r}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Řešení 2. Označme $p = |XY|$ a $q = |SY|$. Podle kosinové věty pro trojúhelník SXY platí $r^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos \omega$, neboť $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$. Vypsanou rovnost upravíme do tvaru $r^2 = (p - q)^2 + 2pq(1 + \cos \omega)$, z něhož už snadno odhadneme velikost součinu pq shora:

$$pq = \frac{r^2 - (p-q)^2}{2(1 + \cos \omega)} \leqq \frac{r^2}{2(1 + \cos \omega)},$$

přitom rovnost nastane, právě když $p = q$. To je i podmínka, za které je obsah $\frac{1}{2}pq \sin \omega$ trojúhelníku SXY maximální. Došli jsme tak ke stejnému závěru jako při prvním řešení.

Řešení 3. Vyjádřeme obsah trojúhelníku SXY jako funkci úhlu $\alpha = |\sphericalangle XSN|$ a zjistěme její největší hodnotu v intervalu $0 < \alpha < \omega$. Při označení z obr. 23 platí $|XZ| = |SX| \sin\alpha = r \sin\alpha$; protože $|\sphericalangle SYX| =$



Obr. 23

$= \pi - \omega$ a $|\sphericalangle SXY| = \omega - \alpha$, ze sinové věty pro trojúhelník SXY vychází

$$|SY| = |SX| \cdot \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} = r \cdot \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}.$$

Pro obsah P trojúhelníku SXY tak dostáváme vyjádření

$$P = \frac{|SY| \cdot |XZ|}{2} = \frac{r^2 \sin\alpha \sin(\omega - \alpha)}{2\sin\omega} = \frac{r^2\big(\cos(2\alpha - \omega) - \cos\omega\big)}{4\sin\omega}$$

(využili jsme vzorec $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ pro $x = \alpha$ a $y = \omega - \alpha$). Proto pro hodnotu P platí horní odhad

$$P \leqq \frac{r^2(1 - \cos\omega)}{4\sin\omega} \quad \left(= \frac{r^2}{4} \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right),$$

přitom rovnost nastane právě v případě, kdy $\cos(2\alpha - \omega) = 1$, což je v naší situaci splněno jedině pro $\alpha = \frac{1}{2}\omega$ (z nerovností $0 < \alpha < \omega$ totiž plyne odhad $|2\alpha - \omega| < \omega$).

A – II – 4

Předpokládejme, že f je libovolná z hledaných funkcí. Všimněme si, že levá strana dané rovnice je sudá funkce proměnné x. Při záměně čísla x opačným číslem $-x$ se proto nezmění ani hodnota pravé strany rovnice:

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (-x-y)^2 \cdot f(-x+y)$$

neboli

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (x+y)^2 \cdot f(y-x).$$

Dosaďme sem při libovolném $t \in \mathbb{R}$ hodnoty $x = \frac{1}{2}(t-1)$ a $y = \frac{1}{2}(t+1)$, které jsou zvoleny tak, aby platilo $x+y=t$ a $y-x=1$. Dostaneme vztah $f(t) = t^2 \cdot f(1)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy nutně tvaru $f(x) = cx^2$, přitom neznámý koeficient c zjistíme tak, že dosadíme do rovnosti ze zadání (a tak vlastně současně provedeme i *zkoušku*): rovnice $c(x^2+cy^2)^2 = (x-y)^2 \cdot c(x+y)^2$ je ekvivalentní s rovnicí $c(c+1)y^2(2x^2 + (c-1)y^2) = 0$, jež je splněna pro libovolná x a y, právě když $c = 0$ nebo $c = -1$ (např. dosazení $x = y = 1$ vede k podmínce $c(c+1)^2 = 0$, takže nutně $c \in \{0, -1\}$).

Úloha má právě dvě řešení: nulovou funkci $f_1(x) = 0$ a funkci $f_2(x) = -x^2$.

A – III – 1

Je-li mnohočlen P konstantní, tedy $P(x) = a$, pak číslo a splňuje dle zadání podmínku $a^2+a = a+a$, takže $a = 0$ nebo $a = 1$. Oba mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ jsou řešením úlohy.

Je-li stupeň n mnohočlenu P kladný, pak $P(x) = ax^n + Q(x)$, kde a je číslo různé od nuly a Q je mnohočlen stupně nejvýše $n-1$. Porovnáme-li v rovnosti

$$\big(ax^n + Q(x)\big)^2 + a(-x)^n + Q(-x) = ax^{2n} + Q(x^2) + ax^n + Q(x) \quad (1)$$

koeficienty u nejvyšší mocniny x^{2n}, dostaneme podmínku $a^2 = a$, ze které plyne $a = 1$ (připomeňme, že $a \neq 0$). Rovnost (1) po dosazení hodnoty $a = 1$ upravíme do ekvivalentního tvaru

$$2x^nQ(x) + \big(Q(x)\big)^2 - Q(x^2) = [1-(-1)^n]x^n + Q(x) - Q(-x). \quad (2)$$

Připusťme, že mnohočlen Q má kladný stupeň k ($k < n$). Pak na levé straně (2) stojí mnohočlen stupně alespoň $n+k$, což je sporu s tím, že na pravé straně (2) je mnohočlen stupně nejvýše n. Proto je Q konstantní mnohočlen, tedy $Q(x) = b$ pro vhodné číslo b. Po dosazení do (2) dostáváme podmínku $2bx^n + b^2 - b = [1-(-1)^n]x^n$, která je splněna pro každé x, právě když $2b = 1-(-1)^n$ a zároveň $b^2 - b = 0$. Pro sudé n vychází jedině $b = 0$ (takže $P(x) = x^n$), pro liché n vyjde $b = 1$ (takže $P(x) = x^n + 1$).

Odpověď: Hledané mnohočleny jsou konstanty 0 a 1, jednočleny x^2, x^4, x^6, ... a dvojčleny $x+1$, x^3+1, x^5+1, ...

Jiné řešení. Přičteme-li $P(-x)$ k oběma stranám dané rovnosti, dostaneme rovnost $\big(P(x)\big)^2 + 2P(-x) = P(x^2) + P(x) + P(-x)$, na jejíž pravé straně je sudá funkce proměnné x. Proto je sudá i funkce na levé straně: pro každé x platí $\big(P(x)\big)^2 + 2P(-x) = \big(P(-x)\big)^2 + 2P(x)$, neboli

$$\big(P(x) - P(-x)\big) \cdot \big(P(x) + P(-x) - 2\big) = 0.$$

Jeden z obou činitelů na levé straně poslední rovnosti je tedy nulový mnohočlen. Pokud platí identicky $P(x) - P(-x) = 0$, redukuje se rovnost ze zadání úlohy na $\big(P(x)\big)^2 = P(x^2)$; pokud platí identicky $P(x) + P(-x) - 2 = 0$, pak pro mnohočlen Q definovaný rovností $Q(x) = P(x) - 1$ platí $Q(-x) = -Q(x)$ a dosazením a snadnou úpravou zjistíme, že rovnost ze zadání přejde do tvaru $\big(Q(x)\big)^2 = Q(x^2)$.

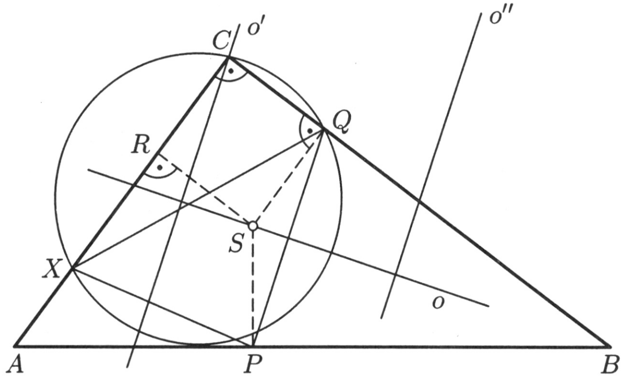
Shrneme-li tedy oba případy, zjistíme, že v každém z nich máme určit mnohočlen R, který je sudou nebo lichou funkcí a splňuje pro každé x rovnost $\big(R(x)\big)^2 = R(x^2)$. Hledejme taková R nejdříve mezi jednočleny: po dosazení $R(x) = ax^n$ zjistíme, že je buď $a = 0$, nebo $a = 1$ a $n \geqq 0$ libovolné. Připusťme, že R není jednočlen, tedy $R(x) = ax^n + bx^k + S(x)$, kde a, b jsou čísla různá od nuly, $n > k$ a S je nulový mnohočlen nebo mnohočlen stupně nejvýše $k-1$. Porovnáme-li v rovnosti

$$\big(ax^n + bx^k + S(x)\big) \cdot \big(ax^n + bx^k + S(x)\big) = ax^{2n} + bx^{2k} + S(x)$$

koeficienty členů s mocninou x^{n+k}, dostaneme rovnost $2ab = 0$, která je ve sporu s tím, že $a \neq 0$ a $b \neq 0$. Proto podmínku $\big(R(x)\big)^2 = R(x^2)$ splňují pouze mnohočleny R rovné 0, 1, x, x^2, x^3, ...

A – III – 2

Označme ještě R bod dotyku s odvěsnou AC a S střed zmíněné kružnice (obr. 24). Protože $SQCR$ je čtverec a bod S leží na ose o úsečky PQ, leží bod C na přímce o', která je obrazem osy o v otočení kol bodu Q o pravý úhel. Vrchol C proto sestrojíme jako průsečík přímky o' s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem QX. Zbytek *konstrukce* je zřejmý.



Obr. 24

Úloha má (pro dané body P, Q, X) jediné řešení. I když osu o můžeme kol bodu Q otočit o pravý úhel dvěma způsoby, jedna z otočených přímek o'' kružnici τ vůbec neprotne; druhá z nich má s kružnicí τ sice dva společné body, ale jednomu z nich odpovídá takový trojúhelník ABC, že místo kružnice vepsané má požadované vlastnosti kružnice *připsaná* přeponě AB (bod Q jejího dotyku s přímkou BC neleží na odvěsně BC, ale na jejím prodloužení za vrchol B).

A – III – 3

Označme $(*)$ danou nerovnici a $\mathsf{K} = (-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$ příslušnou množinu (všech) řešení. Z toho, že 0 patří do K, plyne pro b podmínka $b \geqq 0$ a zároveň $\sqrt{b} > -c$. Kdyby však platilo $b > 0$, byl by výraz $\sqrt{2x^2 + ax + b}$ definován v některém okolí bodu $x = 0$ a z (ostré) nerovnosti $(*)$ pro $x = 0$ by plynula její platnost i pro malá kladná čísla x, což je ve sporu s tvarem množiny K. Proto musí být $b = 0$ a z nerovnosti $\sqrt{b} > -c$ plyne podmínka $c > 0$.

Protože $\sqrt{2x^2 + ax + b} = \sqrt{x(2x + a)}$ a protože množina K obsahuje všechna čísla $x > 1$, platí pro taková x nerovnost $2x + a \geqq 0$, která znamená, že $a \geqq -2$. Protože $1 \notin \mathsf{K}$, nerovnost $\sqrt{2 + a} > 1 - c$ neplatí, její levá strana však má díky nerovnosti $a \geqq -2$ smysl. Proto naopak platí $\sqrt{2 + a} \leqq 1 - c$, odkud plyne podmínka $c \leqq 1$. Kdyby platila ostrá nerovnost $\sqrt{2 + a} < 1 - c$, nerovnost $\sqrt{x(2x + a)} < x - c$ by byla splněna nejen pro $x = 1$, ale také pro $x = 1 + \varepsilon$ s dostatečně malým $\varepsilon > 0$, což je ve sporu s tím, že $1+\varepsilon \in \mathsf{K}$. To znamená, že $\sqrt{2+a}=1-c$, odkud $a=(1-c)^2-2=c^2-2c-1$.

Shrňme výsledky našich úvah: zjistili jsme, že každá vyhovující trojice čísel (a,b,c) je nutně tvaru $(c^2-2c-1,0,c)$, kde $0<c\leqq 1$. Ukažme nyní, že obráceně každá trojice popsaného tvaru má požadované vlastnosti. Řešme proto v oboru reálných čísel nerovnici

$$\sqrt{x(2x+a)}>x-c, \tag{1}$$

pro pevně zvolené $c \in (0,1\rangle$ a odpovídající $a=c^2-2c-1$.

Z nerovností $0<c\leqq 1$ a vyjádření $a=(1-c)^2-2$ plyne, že $-2\leqq a<<-1$. Pro každé $x\leqq 0$ tudíž platí $2x+a<0$, takže levá strana (1) má smysl a je nezáporná, zatímco pravá strana (1) je pro takové x záporná (neboť $x-c\leqq -c<0$). Proto celý interval $(-\infty,0\rangle$ patří do množiny řešení (1). Nepatří tam však žádné číslo x z intervalu $(0,-\frac{1}{2}a)$, neboť pro ně nemá smysl levá strana (1). Zbývá tedy vyřešit nerovnici (1) na intervalu $\langle -\frac{1}{2}a,\infty)$. Zdůvodníme předtím, že pro krajní bod $-\frac{1}{2}a$ platí odhady $c\leqq -\frac{1}{2}a\leqq 1$. Skutečně, horní odhad okamžitě plyne z toho, že $a\geqq -2$, dolní odhad se snadno odvodí ze zřejmé nerovnosti $c^2\leqq 1$:

$$-\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}(c^2-2c-1)=c+\frac{1}{2}(1-c^2)\geqq c.$$

Pro každé $x\in\langle -\frac{1}{2}a,\infty)$ platí tedy $x\geqq c$, a proto jsou obě strany nerovnice (1) nezáporné. Po umocnění obou stran na druhou a snadné úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnici $x^2+(a+2c)x-c^2>0$. Odtud po dosazení $a=c^2-2c-1$ vychází nerovnice $(x-1)(x+c^2)>0$, která platí pro právě ta (kladná) čísla $x\in\langle -\frac{1}{2}a,\infty)$, která jsou větší než 1 (zopakujme, že $-\frac{1}{2}a\leqq 1$). Tím je dokázáno, že množinou řešení nerovnice (1) je skutečně množina K ze zadání úlohy.

Odpověď: Hledané trojice jsou $(a,b,c)=(c^2-2c-1,0,c)$, kde c je libovolné číslo z intervalu $(0,1\rangle$.

A - III - 4

V žádném slově zřejmě nemohou být čtyři stejná písmena. Maximální možná délka slova uvažovaného jazyka je tedy $3n$ (skupina n trojic stejných písmen za sebou je zřejmě slovo). Zároveň je jasné, že pro $n=1$ existuje jediné slovo délky 3.

Nechť $n\geqq 2$.

1. *Každé slovo začíná dvěma stejnými písmeny.* Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom slovo $AB \dots A \dots A \dots$ začínající dvojicí různých písmen A, B. Další písmeno B se však nemůže vyskytovat mezi prvním a druhým písmenem A (jedno už tam je), ani za třetím písmenem A (dvě A by byla mezi dvěma B). Obě zbývající písmena B by tedy musela být mezi druhým a třetím písmenem A, což také není možné.

2. *Vypustíme-li ze slova maximální délky* $3n$ *tři stejná písmena, dostaneme v jazyce s* $n-1$ *písmeny opět slovo maximální délky* $3(n-1)$.

Počet slov maximální délky v jazyce s n písmeny označme p_n. Zjistíme, kolik je slov maximální délky začínajících zvoleným písmenem A. Každé takové slovo začíná dvěma písmeny A, takže třetí písmeno je buď opět A (takových slov je zřejmě tolik, kolik je slov maximální délky obsahujících $n-1$ písmen, tj. p_{n-1}), nebo písmeno $B \neq A$. Protože po vypuštění všech písmen A dostaneme opět slovo (a to musí začínat, jak už víme, dvěma stejnými písmeny), musí původní slovo začínat skupinou $AABAB$ (možnost $AABB \dots A$ zřejmě nepřichází v úvahu). Takových slov je opět p_{n-1}. Celkem je tedy $2p_{n-1}$ slov maximální délky začínajících zvoleným písmenem A. To znamená, že $p_n = 2np_{n-1}$, odkud snadno plyne, že

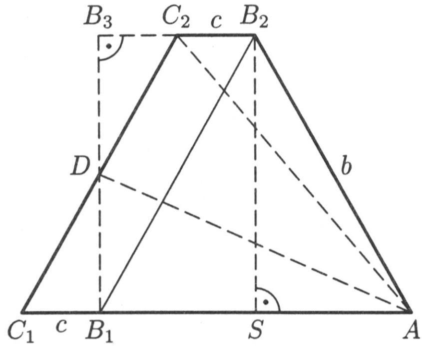
$$p_n = 2^{n-1} n! p_1 = 2^{n-1} n!.$$

Nalezený vzorec vyhovuje i pro $n = 1$.

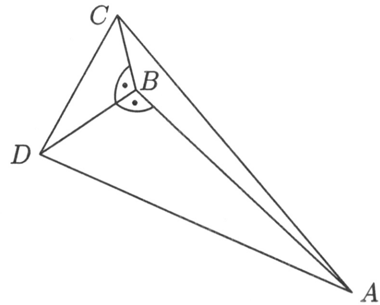
A – III – 5

Z rovnosti úseček, jež v popsané síti odpovídají týmž hranám výsledného čtyřstěnu $ABCD$, dostáváme, že $|AB_1| = |AB_2| = |AB| = b$, $|B_1C_1| = |B_2C_2| = |BC| = c$. Označme S střed úsečky AB_1 a B_3 patu kolmice z bodu D na přímku B_2C_2 (obr. 25). Trojúhelníky B_1C_1D a B_3C_2D jsou středově souměrné podle bodu D, proto $|B_3C_2| = |B_1C_1| = c$. Protože lichoběžník $C_1AB_2C_2$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník B_1AB_2 (vzhledem k předchozím rovnostem je dokonce rovnostranný), a z obdélníku $B_1SB_2B_3$ tak plyne $\frac{1}{2}b = |B_1S| = |B_2B_3| = 2c$, takže $b = 4c$.

Nyní si už jen uvědomíme, že sestavený čtyřstěn $ABCD$ bude mít dvě pravoúhlé stěny CDB a ADB s pravými úhly při vrcholu B (obr. 26), což znamená, že hrana BD bude kolmá ke stěně ABC. Přitom výška v trojúhelníku ABC (neboli trojúhelníku AB_2C_2) na stranu BC je zároveň výškou B_2S rovnostranného trojúhelníku B_1AB_2, takže $v = \frac{1}{2}\sqrt{3}b$ a zároveň $|BD| = |B_1D| = \frac{1}{2}v$. Objem V čtyřstěnu $ABCD$ tedy spočteme



Obr. 25



Obr. 26

jako

$$V = \frac{1}{3}S(ABC)|BD| = \frac{1}{3}S(AB_2C_2) \cdot \frac{1}{2}v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}cv \cdot \frac{1}{2}v =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}b \cdot v^2 = \frac{1}{4^3}b^3,$$

takže $b = \sqrt[3]{64^2}\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$.

A – III – 6

Matematickou indukcí nejprve dokážeme, že všechny hodnoty $f(x)$ leží v dvouprvkové množině $\mathsf{M} = \{0, 1\}$. Tvrzení $f(x) \in \mathsf{M}$ totiž platí pro každé $x < 0$; je-li celé číslo $x \geqq 0$ takové, že $f(y) \in \mathsf{M}$ pro každé celé $y < x$, pak v M leží každé z n čísel $f(x - a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a tedy i jejich součin, podle (1) tedy i číslo $f(x)$. Důkaz indukcí je hotov.

Označme nyní $A = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pak všechna čísla $x - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ leží mezi A čísly $x - 1$, $x - 2$, …, $x - A$. Podle (1) to znamená, že platí-li pro některá nezáporná čísla p a q následujících A rovností

$$f(p-1) = f(q-1),\ f(p-2) = f(q-2),\ \ldots,\ f(p-A) = f(q-A), \quad (2)$$

platí rovněž rovnost $f(p) = f(q)$; matematickou indukcí lze pak ověřit rovnost $f(p + r) = f(q + r)$ pro každé celé $r \geqq 0$. Dokážeme-li proto existenci přirozených čísel p a q, $p < q$, pro něž platí soustava rovností (2), bude tvrzení z textu úlohy platit pro čísla $s = p$ a $t = q - p$.

Podmínku (2) lze vyjádřit jako rovnost dvou uspořádaných A-tic

$$[f(p-1), f(p-2), \ldots, f(p-A)] = [f(q-1), f(q-2), \ldots, f(q-A)],$$

které jsou, jak již víme, sestaveny výhradně z čísel 0 a 1. Ze dvou různých prvků lze ale sestavit pouze 2^A různých A-tic, takže například v následující skupině A-tic

$$\{[f(x-1), f(x-2), \ldots, f(x-A)]\colon x = 0, 1, \ldots, 2^A\}$$

jsou některé dvě A-tice stejné. Tím je důkaz tvrzení úlohy hotov.