43. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z8

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Antonín Vrba (editor): 43. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1993/1994. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1996. pp. 15–27.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404986

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

(Řešení úloh na str. 18)

Z8 – I – 1

Čtyři kamarádi z 8.C měli štěstí. Společně si koupili tiket loterie a vyhráli první cenu. Byla v korunách vyjádřená pěticiferným číslem. Samozřejmě, že si výhru rozdělili stejným dílem. Petr si všiml zajímavé věci: dostal částku zapsanou stejnými číslicemi jako první cena, ale v opačném pořadí. Kolik korun byla první cena? (*Burjan*)

Z8 – I – 2

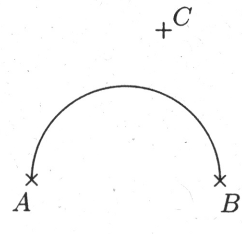
Představ si, že na papíře je narýsovaný trojúhelník a úsečka. Napiš postup, jak se z tohoto trojúhelníka dá narýsovat rovnoramenný trojúhelník se stejným obsahem a s jednou stranou shodnou s danou úsečkou. Postup se musí hodit na každý trojúhelník a na každou úsečku. (*Černek*)

Z8 – I – 3

Na číselné ose jsou znázorněna tři čísla x, y, z. Narýsuj na této číselné ose obraz nuly, jestliže víš, že $3y = x + z$. Najdi řešení pro všechny polohy čísel x, y, z, pro které $x < y < z$. (*Černek*)

Z8 – I – 4

Nad průměrem AB je opsaná půlkružnice, jejíž střed není viditelný. Dále je daný bod C tak, že trojúhelník ABC je ostroúhlý (obr. 1). Z bodu C sestroj kolmici na AB. Ale pozor! Na konstrukci můžeš použít jen tužku a pravítko bez měřítka, které má jen jednu stranu rovnou. (*Hozová*)



Obr. 1

Z8 – I – 5

Na ostrově Pavouk je šest měst. Každé z nich je spojené přímými cestami s dalšími čtyřmi z daných šesti měst. Tyto cesty se nikde nekřižují. Zajímavé je to, že všechny cesty mají jen tři různé délky. Nejkratší měří 10 km, nejdelší 40 km. Kolik kilometrů měří ostatní? (*Černek*)

Z8 – I – 6

Dva plavci se koupou v obdélníkovém bazénu. Délka bazénu je vyjádřena v metrech celým číslem a šířka bazénu je 40 m. Jeden z plavců plave na šířku, a to uprostřed. Druhý zase na délku (ne nutně uprostřed). Oba najednou skočili do bazénu a plavali stejnou rychlostí. Když se poprvé setkali, uplaval každý z nich 510 m. Jak dlouhý je bazén? Nalezněte všechna řešení. (*Demko*)

ÚLOHY II. KOLA

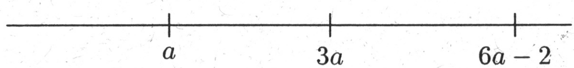
(Řešení úloh na str. 23)

Z8 – II – 1

V rovině je dán trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník ABZ, jehož obsah je roven polovině obsahu trojúhelníku ABC a přitom $|BZ| = \frac{1}{4}|BC|$. Kolik má úloha řešení? Počet řešení diskutujte v závislosti na velikosti úhlu β.

Z8 – II – 2

Na číselné ose jsou vyznačeny obrazy čísel a, $3a$, $6a-2$. Sestrojte obrazy čísel 0 a 1.



Z8 – II – 3

Jestliže v čtyřciferném čísle zvětšíme dvě číslice o 3 a zbývající dvě zmenšíme o 4, dostaneme dvakrát větší číslo. Najděte všechna taková čísla.

Z8 – II – 4

Nová pneumatika se na zadním kole úplně opotřebí po ujetí 80 000 km, na předním kole po ujetí 60 000 km. Koupí-li otec na auto 4 nové pneumatiky, po kolika km jízdy má přehodit přední a zadní pneumatiky, aby s nimi mohl ujet co nejvíce kilometrů? Kolik km ujede? (Rezervní kolo neuvažujeme.)

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 26)

Z8 – III – 1

V pravoúhlém trojúhelníku ABC se osy úhlů protínají v bodě P. Jeho vzdálenost od přepony AB je $\sqrt{8}$ cm. Jaká je vzdálenost bodu P od vrcholu C?

Z8 – III – 2

Jirka napsal čtyřciferné číslo, které mělo zajímavou vlastnost. Když zvětšil jeho obě krajní číslice o jisté číslo a zároveň zbývající číslice o toto číslo zmenšil, dostal trojnásobek původního čísla. Najděte všechna čtyřciferná čísla, která mají tuto vlastnost.

Z8 – III – 3

Kolik je přirozených čísel menších než 501, která nejsou dělitelná třemi ani sedmi? (Přirozená čísla jsou celá čísla větší než 0.)

Z8 – III – 4

V rovině jsou dány dva body A, B. Narýsujte osy x, y soustavy souřadnic tak, aby $A = [5, 1]$, $B = [1, 5]$.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8–I–1 (str. 15)

Číslice pěticiferného čísla v, které udává celkovou výhru, označíme A, B, C, D, E, a to tak, že A $\neq 0$ udává desetitisíce, B tisíce, C stovky atd., takže $v = 10\,000\,\mathrm{A} + 1\,000\,\mathrm{B} + 100\,\mathrm{C} + 10\,\mathrm{D} + \mathrm{E}$ korun, stručně budeme psát ABCDE. Podle podmínky úlohy je

$$\mathrm{ABCDE} = 4 \cdot \mathrm{EDCBA} \tag{1}$$

Kdyby bylo E $\geqq 3$, bylo by $4 \cdot \mathrm{E} > 10$ a číslo v by bylo šesticiferné. Proto je E $\leqq 2$. Protože je ABCDE násobek 4, tedy sudé číslo, je i E sudé. Tedy E $= 0$ nebo E $= 2$.

Kdyby bylo E $= 0$, muselo by platit A $= 5$ (aby $4 \cdot \mathrm{A}$ končilo číslicí 0). Avšak čtyřnásobek čtyřciferného čísla DCBA je menší než $4 \cdot 10\,000 = 40\,000$, takže nemůže být A $= 5$ ani E $= 5$.

Proto je E $= 2$ a tudíž podle (1) je $v \geqq 80\,000$ a tedy A $\geqq 8$. Protože $4 \cdot \mathrm{A}$ končí číslicí 2 a A $\geqq 8$, musí být A $= 8$. Rovnost (1) můžeme zapsat

$$8\mathrm{BCD}2 = 4 \cdot 2\mathrm{DCB}8. \tag{2}$$

Porovnáním desítek dostáváme, že číslo $4 \cdot \mathrm{B} + 3$ končí číslicí D, takže je liché. Kdyby bylo D $\geqq 3$, bylo by $4 \cdot 2\mathrm{DCD}8 \geqq 90\,000$ a to podle (2) není možné, takže D $= 1$. Proto musí číslo $4 \cdot \mathrm{B}$ končit číslicí 8, takže B $= 2$ nebo B $= 7$. Avšak porovnáním číslice udávající tisíce vidíme, že B $\geqq 4 \cdot \mathrm{D} = 4$, tudíž B $= 7$. Po dosazení do (2) dostaneme

$$87\mathrm{C}12 = 4 \cdot 21\mathrm{C}78. \tag{3}$$

Porovnáním stovek vidíme, že číslo $4 \cdot C + 3$ má končit číslicí C, takže $3 \cdot C + 3$ má končit nulou, $3 \cdot C$ sedmičkou, proto je $C = 9$.

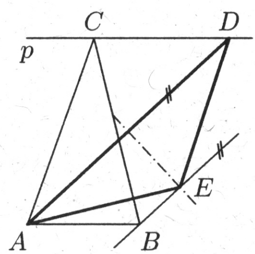
Celkem dostaneme

$$87912 = 4 \cdot 21978$$

První cena činila 87 912 Kč, každý ze čtyř kamarádů dostal 21 978 Kč. To je velmi pěkná výhra. Zkouškou se přesvědčíme o správnosti tohoto výsledku.

Řešení úlohy Z8–I–2 (str. 15)

Je-li dán trojúhelník ABC a vedeme-li bodem C přímku p rovnoběžnou se stranou AB, mají všechny trojúhelníky ABX, kde $X \in p$, stejný obsah jako trojúhelník ABC. Je-li vzdálenost přímek p, AB nejvýše rovna délce dané úsečky (označme ji KL), můžeme na p zvolit bod D tak, že $|AD| = |KL|$. Osa úsečky AD protne přímku vedenou bodem B rovnoběžně s AD v bodě E. Přitom se rovnají obsahy trojúhelníků ADE a ADB a také obsahy trojúhelníků ADB a ACB. Trojúhelník ADE má tedy všechny požadované vlastnosti.



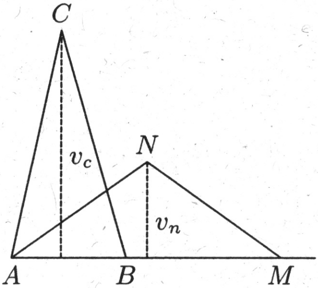
Obr. 2

Je-li vzdálenost přímek p, AB větší než délka úsečky KL, nahradíme nejdříve bod B bodem B' na přímce q ($q \parallel AC$, $B \in q$) tak, aby vzdálenost bodu C od přímky AB' byla nejvýše $|KL|$.

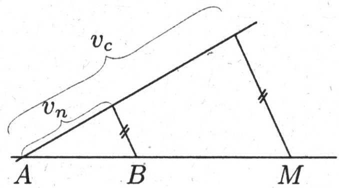
Bod B' můžeme sestrojit např. takto: Opíšeme kolem bodu C kružnici k o poloměru $r = |KL|$ a bod B' sestrojíme tak, aby přímka AB' protínala kružnici k. Pak pokračujeme pro nový trojúhelník $AB'C$ stejně jako v prvním případě pro trojúhelník ABC.

Nevýhodou uvedeného řešení je, že musíme rozlišit dva případy. Uveďme proto ještě jedno řešení, kde se této nevýhodě vyhneme.

Jiné řešení: Nechť ABC je daný trojúhelník a AMN hledaný trojúhelník, kde M leží na polopřímce AB a strana AM je shodná s danou úsečkou (obr. 3 a). Výšky ke stranám AB a AM v trojúhelnících ABC a



Obr. 3 a



Obr. 3 b

AMN označme v_c a v_n. Potom z rovnosti obsahů trojúhelníků ABC a AMN plyne:

$$|AB| \cdot v_c = |AM| \cdot v_n$$

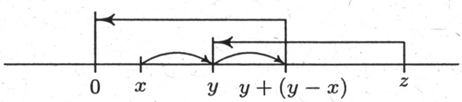
Odtud dostaneme:

$$|AB| : |AM| = v_n : v_c$$

Neznámou výšku v_n pak snadno sestrojíme užitím podobnosti trojúhelníků (obr. 3 b). Pak už snadno sestrojíme hledaný trojúhelník AMN.

Řešení úlohy Z8–I–3 (str. 15)

Danou rovnost $3y = x+z$ můžeme upravit takto: $y+(y-x)+(y-z) = 0$. Proto dostaneme obraz počátku tak, že k obrazu bodu y „přičteme“ $y-x$ a $y-z$. Obě tyto hodnoty vyčteme z číselné osy (obr. 4).



Obr. 4

Jiné řešení: Rovnost $3y = x + z$ dělíme číslem 2. Dostaneme

$$1{,}5 \cdot y = \frac{x+z}{2}$$

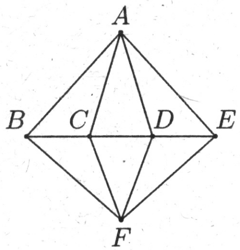
Obrazem aritmetického průměru x a z je střed úsečky určené body x a z, což je zároveň obraz bodu $1{,}5 \cdot y$. Známe-li obrazy čísel y a $1{,}5 \cdot y$ snadno najdeme počátek.

Řešení úlohy Z8–I–4 (str. 15)

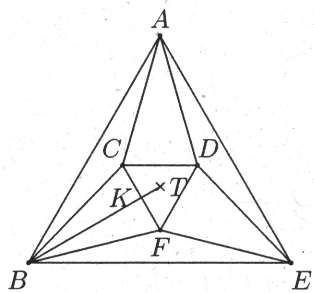
Úsečka BC protne danou půlkružnici v bodě K a podle Thaletovy věty je $AK \perp BC$ (Nakreslete si obrázek!). Podobně AC protne půlkružnici v bodě L, $BL \perp AC$. Vidíme, že AK a BL jsou výšky v trojúhelníku ABC, proto jejich průsečíkem V prochází i výška vedená bodem C, přímka CV je kolmá na AB.

Řešení úlohy Z8–I–5 (str. 16)

Žák by si měl nejdříve zkusit nakreslit schéma spojení jednotlivých měst. Označme je A, B, C, D, E, F tak, že A je spojeno přímou cestou s B, C, D, E a nemá přímé spojení s F. Pak je F též spojeno s B, C, D, E. Přitom každé z měst B, C, D, E je spojeno přímou cestou s dvěma dalšími. Na obrázku 5 a lehce spojíme C s B a D, D s C a E. Je však



Obr. 5 a



Obr. 5 b

třeba ještě spojit přímou cestou E s B, což nejde. Musíme body B, E posunout například dolů. Novou situaci znázorňuje obrázek 5 b.

Nejdelší úseky dlouhé 40 km jsou zřejmě mezi body A, B, E, nejkratší úseky dlouhé 10 km jsou mezi body C, F, D. Trojúhelníky ABE a CDF jsou proto rovnostranné. Podle zadání jsou zbylé úseky shodné a tedy trojúhelníky ACD, BFC, EFD jsou rovnoramenné. Proto mají rovnostranné trojúhelníky CDF a ABE společné těžiště a rovnoběžné strany $CD \parallel BE$, $|CD| = 10$, $|BE| = 40$. Úsečka BT se rovná $\frac{2}{3}$ výšky v rovnoramenném trojúhelníku ABE, tedy $|BT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{40}{2}\sqrt{3} = \frac{40}{3}\sqrt{3}$.

Úsečka TK se rovná $\frac{1}{3}$ výšky v trojúhelníku CDF, tj.

$$|TK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{2}\sqrt{3} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

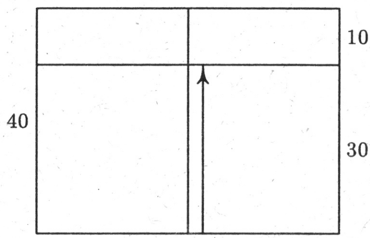
Odtud vypočteme $|BK| = \frac{35}{3}\sqrt{3}$. Podle Pythagorovy věty je

$$|BF|^2 = |BK|^2 + |KF|^2 = 1\,300 : 3, \quad |BF| = \frac{10}{3}\sqrt{39} \doteq 20{,}8$$

Třetí vzdálenost je přibližně 20,8 km.

Řešení úlohy Z8–I–6 (str. 16)

Každý plavec uplaval 510 m. Protože $500 = 40 \cdot 12 + 30$, přeplaval první plavec bazén šestkrát na šířku tam i zpět a pak ještě 30 m. Druhý uplaval také 510 m. Označíme-li délku bazénu a (v metrech), uplaval $(n \cdot a + \frac{a}{2})$ metrů, kde n udává, kolikrát přeplaval celý bazén.



Obr. 6

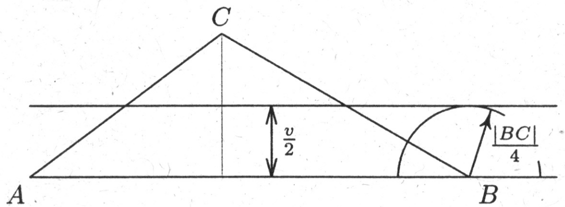
Je tedy $510 = a(n + \frac{1}{2})$, tj. po úpravě $1\,020 = a(2n+1)$. Protože $1\,020 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 17$ a $2n+1$ je číslo liché, mohou nastat jen tyto případy:

$2n+1$	1	3	5	15	17	51	85	255
a	1 020	340	204	68	60	20	12	4

Poslední tři možnosti musíme vyloučit, délka bazénu nemůže být kratší než šířka. Zbývá pět možností, bazén však nebude delší než kilometr. Pravděpodobně bude délka bazénu 60 m. V tom případě je $2n+1 = 17$, $n = 8$, druhý plavec přeplaval bazén čtyřikrát tam a zpět a pak ještě do poloviny bazénu, celkem tedy $4 \cdot (60 + 60) + 30 = 510$ metrů.

Řešení úlohy Z8–II–1 (str. 16)

Obsah trojúhelníku ABZ se rovná polovině obsahu trojúhelníku ABC, přitom oba trojúhelníky mají společnou základnu. Proto musí mít trojúhelník ABZ poloviční výšku. Bod Z tedy leží na rovnoběžce, jejíž vzdálenost od přímky AB je rovna polovině výšky trojúhelníka ABC příslušné ke straně AB. Takové rovnoběžky existují dvě.



Obr. 7

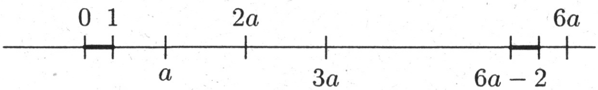
Dále $|BZ| = \frac{1}{4}|BC|$, takže bod Z leží na kružnici o středu B a poloměru $\frac{1}{4}|BC|$. Tato kružnice může mít s každou z rovnoběžek jeden, dva nebo žádný společný bod. Přitom jeden společný bod má, právě když $\frac{v}{2} = \frac{|BC|}{4}$ (viz obr. 7; v jsme označili velikost výšky trojúhelníka ABC ke straně AB), tj. když $v = \frac{|BC|}{2}$. V tomto případě tvoří body B, C a D, kde D je pata výšky na stranu AB, trojúhelník, který se rovná polovině rovnostranného trojúhelníka. Proto je $\beta = 30°$. Je-li $\beta > 30°$, je $\frac{v}{2} > \frac{1}{4}|BC|$ a obě rovnoběžky nemají s kružnicí žádný společný bod. Je-li $\beta < 30°$, je $\frac{v}{2} < \frac{1}{4}|BC|$ a kružnice protíná každou z rovnoběžek ve dvou bodech.

Úloha má čtyři řešení, je-li $\beta < 30°$, dvě řešení, je-li $\beta = 30°$ a žádné řešení v případě, kdy $\beta > 30°$.

Řešení úlohy Z8–II–2 (str. 16)

Nejprve najdeme obraz čísla $2a$ jako střed úsečky s krajními body a a $3a$ a pak obraz 0 (a je střed úsečky určené obrazy čísel 0 a $2a$) a čísla $6a$ ($3a$ je střed dvojice bodů 0 a $6a$). Orientovaná úsečka s počátečním bodem $6a-2$ a koncovým bodem $6a$ znázorňuje číslo 2, takže její polovina odpovídá jednotkové úsečce. Jejím posunutím do bodu 0 dostaneme obraz čísla 1.

Při konstrukci je třeba rozlišit případy, kdy obraz $6a-2$ leží vlevo nebo vpravo od obrazu $6a$. Pokud by tyto obrazy splynuly, nemá úloha řešení.



Obr. 8

Řešení úlohy Z8–II–3 (str. 17)

Hledané číslo označíme x. Aby se číslo x zvětšilo, musíme první číslici zvětšit. Můžeme proto rozlišit tři případy:

1. Zvětšíme první a druhou cifru. Číslo x se zvětšením prvních dvou cifer o 3 zvětší o 3 300 a zmenšením zbývajících dvou cifer o 4 se zmenší o 44. Z rovnice $x + 3\,300 - 44 = 2x$ dostaneme $x = 3\,256$.
2. Zvětšíme první a třetí cifru. Stejným způsobem jako v prvním případě dostaneme rovnici $x + 3\,030 - 404 = 2x$. Její řešení je $x = 2\,626$.
3. Zvětšíme první a čtvrtou cifru. Dostaneme rovnici $x + 3\,003 - 440 = 2x$. Její řešení je $x = 2\,563$.

Zkouškou se přesvědčíme, že každé z nalezených čísel je řešením úlohy:

nalezené číslo	3 256	2 626	2 563
číslo po záměně číslic	6 512	5 252	5 126

Zkouška je zde nutná, neboť např. zvětšení čtyřciferného o 3 300 nemusí vždy znamenat zvětšení prvních dvou cifer o 3. Podobně zmenšení čtyřciferného čísla o 44 nemusí znamenat zmenšení jeho posledních číslic o 4.

Úloha má tři řešení.

Řešení úlohy Z8–II–4 (str. 17)

Při současném maximálním využití všech pneumatik ujede každá z nich stejný počet kilometrů na předním i na zadním kole. Po ujetí jednoho kilometru se zadní pneumatika opotřebí o $\frac{1}{80\,000}$ celkového přípustného opotřebení a přední pneumatika o $\frac{1}{60\,000}$. Ujede-li nová pneumatika x km na zadním kole a stejný počet kilometrů na předním kole a zároveň bude maximálně opotřebovaná, musí platit

$$\frac{x}{80\,000} + \frac{x}{60\,000} = 1.$$

Rovnice má jedno řešení; po zaokrouhlení je $x = 34\,286$.

Pneumatiky vydrží celkem asi 68 572 km, z toho po 34 286 km je třeba vyměnit přední pneumatiky za zadní a obráceně.

Poznámka: Maximální možná vzdálenost, kterou můžeme na pneumatikách ujet je tzv. harmonický průměr čísel 80 000 a 60 000. Označíme-li $A(a, b)$ aritmetický průměr čísel a a b, je jejich harmonický průměr $H(a, b) = \dfrac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a + b}$.

Řešení úlohy Z8–III–1 (str. 17)

Protože P je průsečíkem os úhlů trojúhelníku ABC, je zároveň středem kružnice tomuto trojúhelníku vepsané. Spojíme-li bod P s body dotyku této kružnice s odvěsnami trojúhelníku, vznikne při vrcholu C čtverec o straně $r = \sqrt{8}\,\mathrm{cm}$. Délka jeho úhlopříčky PC je hledaná vzdálenost.

Proto je $|PC| = r\sqrt{2} = 4\,\mathrm{cm}$.

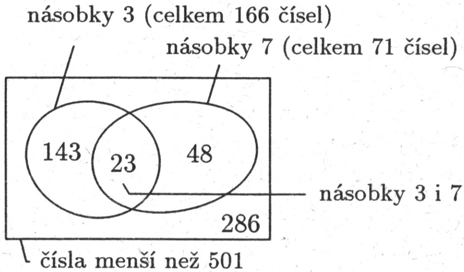
Řešení úlohy Z8–III–2 (str. 17)

Označíme-li x hledané číslo a k číslo, o které krajní číslice zvětšíme, má pro ně platit $x + 1\,001k - 110k = 3x$, tedy $2x = 891k$. Proto musí být k sudé, takže ho můžeme zapsat $k = 2m$, odkud vyjde $x = 891m$. Protože $k < 10$, je $m < 5$. Přitom m nemůže být rovno 1, jinak by x nebylo čtyřciferné číslo. Pro $m = 2$ je $k = 4$, $x = 1\,782$. Toto číslo vyhovuje, protože jeho trojnásobek se rovná 5 346. Podobně pro $m = 3$ a tedy $k = 6$ dostáváme $x = 2\,673$. Toto číslo opět vyhovuje, protože jeho trojnásobek se rovná 8 019. Pro $m = 4$ je $k = 8$, $x = 3\,564$. Tentokrát toto číslo nevyhovuje, protože žádnou číslici nemůžeme zvětšit ani zmenšit o 8.

Úloha má dvě řešení 1 782 a 2 673.

Řešení úlohy Z8–III–3 (str. 17)

Z čísel menších než 501 je 166 dělitelno třemi $(500 : 3 = 166$, zbytek 2), 71 je dělitelno sedmi $(500 : 7 = 71$, zbytek 3) a 23 je dělitelno třemi i sedmi $(500 : 21 = 23$, zbytek 17). Třemi ani sedmi není dělitelno $500 - 166 - 71 + 23 = 286$ čísel (viz obrázek 9).

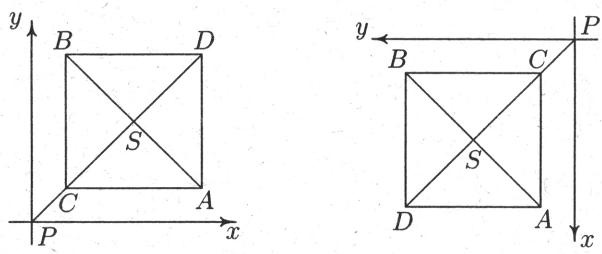


Obr. 9

Řešení úlohy Z8–III–4 (str. 18)

Protože souřadnice bodů A a A se li39 jen svým pořadím, musí být osa úsečky AB přímkou $y = x$. Střed S úsečky AB má souřadnice $x_S = y_S = 3$ (obrázek). Doplníme-li body A, B na čtverec $ACBD$ (pozor úsečka AB je jeho úhlopříčkou), snadno zjistíme, že $C = [1, 1]$, $D = [5, 5]$ (nebo obráceně). Pak už lehce sestrojíme bod $P[0, 0]$ (např. $|PC| = \frac{1}{2}|CS|$). Osa x je rovnoběžná s AC, osa y s CB.

Úloha má dvě řešení; jedna soustava je pravotočivá, druhá levotočivá.



Obr. 10