42. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 42. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1992/1993. 34. mezinárodní matematická olympiáda. 5. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2002. pp. 50–67.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404973

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

Uvažujme n jednotkových kružnic se středy ve vrcholech konvexního mnohoúhelníku. Dokažte, že na některé z těchto kružnic existuje oblouk délky $2\pi/n$, který nemá společný bod s žádnou jinou z uvažovaných kružnic.

A – I – 2

Najděte všechny hodnoty parametru p, pro který existují reálná čísla x, y, z taková, že

$$\begin{aligned} x+y+z&=4,\\ xy+yz+zx&=4,\\ xyz&=p. \end{aligned}$$

A – I – 3

Jsou dány dvě rekurentní posloupnosti

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=5a_n+2b_n,\\ b_{n+1}&=-2a_n+b_n,\\ a_1&=12,\quad b_1=-3. \end{aligned}$$

Najděte n-tý člen obou posloupností.

A – I – 4

Označme S obsah trojúhelníku ABC a ϱ poloměr jeho kružnice vepsané, v výšku čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu ABC. Pro povrch P čtyřstěnu $ABCD$

pak platí

$$P \geqq S\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}\right).$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

A – I – 5

Ve čtvercovém schématu je zapsáno $1\,000 \times 1\,000$ celých čísel. Přitom každá dvě sousední čísla v řádku nebo ve sloupci se liší nejvýše o 100. Dokažte, že mezi zapsanými čísly je jedno, jež se ve schématu vyskytuje aspoň šestkrát.

A – I – 6

Dokažte, že pro $n \geqq 1$ má zlomek $\dfrac{3n+1}{n(2n-1)}$ nekonečný periodický rozvoj.

A – S – 1

Pre ktoré hodnoty reálneho parametra p má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 1,\\ x^2+y^2+z^2 &= p \end{aligned}$$

riešenie v obore reálnych čísel?

A – S – 2

Pro každé přirozené číslo n jsou přirozená čísla a_n, b_n určena podmínkou $a_n + b_n\sqrt{5} = \left(3+\sqrt{5}\right)^n$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n jsou obě čísla $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ dělitelná číslem 2^n.

A – S – 3

V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ označme P patu výšky vedené bodem D na rovinu ABC a M střed úsečky DP. Rovina rovnoběžná s přímkou BC a obsahující přímku AM rozdělí čtyřstěn na dvě části. Určete poměr jejich objemů.

A – II – 1

Určte dvaciaty člen postupnosti prirodzených čísel (a_k), ak je člen $a_{1\,992}$ rovný prvočíslu 1 993 a pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{k+1} = a_k + n(a_k, a_{k+1}) - D(a_k, a_{k+1}),$$

kde $n(x, y)$, resp. $D(x, y)$ označuje najmenší spoločný násobok, resp. najväčší spoločný deliteľ čísel x, y.

A – II – 2

Je dána kružnice k a na ní dva různé body A, B. Uvažujme kružnice k_1, k_2 takové, že k_1 se dotýká k zevnitř v bodě A, k_2 se dotýká k zevnitř v bodě B a obě kružnice k_1, k_2 se navzájem dotýkají v bodě C. Najděte množinu všech takto vzniklých bodů C.

A – II – 3

Ak pre reálne nenulové čísla x, y, z platí

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1,$$

potom $xy + yz + zx < 0$. Dokážte.

A – II – 4

Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, jehož stěna ABC má obsah $60\,\mathrm{cm}^2$ a žádná z jejích stran a, b, c není delší než 13 cm. Přitom zvolíme-li jejich označení tak, že $a \geqq b \geqq c$, mají aspoň dvě z hran DA, DB, DC čtyřstěnu délku b. Určete největší možný objem takového čtyřstěnu.

A – III – 1

Pre ktoré prirodzené číslo n je číslo $7^n - 1$ násobkom čísla $6^n - 1$?

A – III – 2

V tabulce 19×19 jsou zapsána celá čísla tak, že čísla zapsaná v sousedních políčkách se liší nejvýše o 2. Jaký je nejvyšší možný počet různých čísel v takovéto tabulce? (Dvě políčka tabulky považujeme za sousední, mají-li společnou stranu.)

A – III – 3

V rovině je dán trojúhelník AKL takový, že $|\sphericalangle ALK| > 90^\circ + |\sphericalangle LAK|$. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, tak, aby bod K ležel na straně BC, bod L ležel na úhlopříčce AC a průsečík S úseček AK a BL byl středem kružnice opsané lichoběžníku $ABCD$.

A – III – 4

Daná je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel určená rekurentne takto: $a_1 = 2$, pre každé $n \geqq 1$ je a_{n+1} rovné súčtu desiatych mocnín cifier čísla a_n. Rozhodnite, či sa môže v postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytnúť nejaká hodnota dvakrát.

A – III – 5

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že

$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy) \tag{1}$$

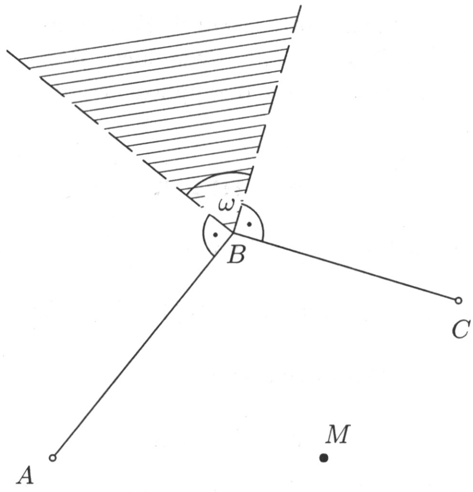
platí pre každé x, y celé a naviac $f(-1) = f(1)$.

A – III – 6

Dokažte, že existuje čtyřstěn, který lze rozdělit na osm shodných čtyřstěnů podobných původnímu.

A – I – 1

Uvažujme nejprve konvexní úhel ABC a jeho vnitřní bod $M \neq B$ a dále dvě kružnice se stejnými poloměry a se středy v bodech M a B (obr. 19).



Obr. 19

Průsečíky těchto kružnic (existují-li) leží v polorovině určené bodem M a přímkou procházející bodem B kolmo k BM. Tyto průsečíky tedy neleží uvnitř úhlu s vrcholem B, jehož ramena jsou kolmá k BA, BC a neleží v úhlu ABC.

Buďte nyní A, B, C sousední vrcholy konvexního mnohoúhelníku. Průsečíky jednotkové kružnice, která má střed ve vrcholu B, s jednotkovými kružnicemi, které mají středy v ostatních vrcholech, neleží uvnitř úhlu ω, neboť tyto vrcholy leží v úhlu ABC. Zbývá uvážit, že nejmenší z vnitřních úhlů n-úhelníku není větší než ω, takže největší z příslušných úhlů není menší než $2\pi/n$.

A – I – 2

Podle známých vztahů mezi kořeny a koeficienty mnohočlenu má daná soustava rovnic řešení v oboru reálných čísel, právě když mnohočlen

$$f(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - p$$

má tři reálné kořeny. Vyšetříme průběh této funkce. Zřejmě

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty.$$

Protože f má derivaci

$$f'(t) = 3t^2 - 8t + 4 = 3\left(t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}\right) = 3\left(t - \frac{2}{3}\right)(t-2),$$

funkce $f(t)$ v intervalech $(-\infty, \frac{2}{3})$ a $(2, \infty)$ roste a v intervalu $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ klesá. Funkce má tedy v bodě $t_1 = \frac{2}{3}$ lokální maximum a v bodě $t_2 = 2$ lokální minimum. Mnohočlen bude mít tři reálné kořeny (počítány i s násobností), právě když $f(t_1) \geqq 0$ a zároveň $f(t_2) \leqq 0$. Snadno zjistíme, že to nastane, právě když $p \in \left\langle 0, \frac{32}{27}\right\rangle$.

A – I – 3

Uvažujme posloupnost c_n definovanou vztahem

$$c_n = a_n + b_n.$$

Protože

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} = 5a_n + 2b_n - 2a_n + b_n = \\ &= 3a_n + 3b_n = 3c_n, \\ c_1 &= 12 - 3 = 9, \end{aligned}$$

je $c_n = 3^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud

$$\begin{aligned} b_n &= c_n - a_n = 3^{n+1} - a_n, \\ a_{n+1} &= 5a_n + 2\left(3^{n+1} - a_n\right) = 3a_n + 2 \cdot 3^{n+1}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Z tohoto rekurentního vztahu můžeme posloupnost a_n určit např. takto: Všimneme si, že $3^n \mid a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a položíme

$$a_n = 3^n x_n.$$

Dosadíme-li do $(*)$, dostaneme

$$x_{n+1} = x_n + 2,$$

a protože $x_1 = 4$, máme

$$x_n = 2(n+1), \qquad a_n = 2 \cdot 3^n(n+1),$$
$$b_n = 3^{n+1} - a_n = -3^n(2n-1).$$

Snadno se přesvědčíme, že tyto posloupnosti a_n, b_n splňují požadavky úlohy.

A – I – 4

Označme Q patu výšky čtyřstěnu na stěnu ABC, a, b, c délky stran trojúhelníku ABC a x, y, z vzdálenosti bodu Q od stran BC, CA, AB. Pro obsah $S(BCD)$ trojúhelníku BCD platí

$$S(BCD) = \frac{1}{2}\, a\sqrt{v^2 + x^2} \geqq \frac{1}{2}\, a\, \frac{v^2 + \varrho x}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}$$

(podle Cauchyovy nerovnosti

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \geqq |x_1 y_1 + x_2 y_2|,$$

v níž nastane rovnost, právě když $x_1 y_2 = x_2 y_1$), analogicky

$$S(ACD) \geqq \frac{1}{2}\, b\, \frac{v^2 + \varrho y}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}, \qquad S(ABD) \geqq \frac{1}{2}\, c\, \frac{v^2 + \varrho z}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} P &= S + S(BCD) + S(ACD) + S(ABD) \geqq \\ &\geqq S + \frac{1}{2\sqrt{v^2 + \varrho^2}}\left[a(v^2 + \varrho x) + b(v^2 + \varrho y) + c(v^2 + \varrho z)\right] = \\ &= S + \frac{1}{2\sqrt{v^2 + \varrho^2}}(a\varrho + b\varrho + c\varrho) + \frac{\varrho}{\sqrt{v^2 + \varrho^2}}(ax + by + cz). \end{aligned}$$

Přitom

$$\frac{1}{2}(ax + by + cz) = S(BCD) + S(ACD) + S(ABD) \geqq S,$$

protože trojúhelník ABC je vždy obsažen ve sjednocení trojúhelníků BCQ, ACQ, ABQ. (Rovnost zde nastane, právě když bod Q leží v trojúhelníku ABC.) Je tedy

$$P \geqq S + \frac{v^2}{\varrho\sqrt{v^2+\varrho^2}}S + \frac{\varrho}{\sqrt{v^2+\varrho^2}}S = S\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}\right).$$

Rovnost nastane, právě když $\varrho = x = y = z$, tj. právě když bod Q splyne se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

Poznámka. Ze všech čtyřstěnů daného objemu a s danou podstavou má nejmenší povrch ten, který má shodné odchylky všech tří pobočných stěn od podstavy. Ze všech čtyřstěnů daného objemu s podstavou daného obsahu má nejmenší povrch právě ten, jehož podstava je navíc rovnostranný trojúhelník.

A – I – 5

Zvolme libovolná dvě čísla ve schématu. Od jednoho k druhému se můžeme dostat nanejvýš $999 + 999 = 1\,998$ kroky tak, že postupně procházíme přes sousední čísla. Žádná dvě čísla ve schématu se tedy neliší více než o $199\,800$, proto čísla ve schématu nabývají nanejvýš $199\,801$ různých hodnot. Kdyby tam byla každá hodnota zastoupena nejvýše pětkrát, nebylo by ve schématu více než $5 \cdot 199\,801 < 10^6$ čísel, je jich tam však milión. Musí tam tedy být aspoň jedno číslo nejméně šestkrát.

A – I – 6

Nejprve prozkoumáme soudělnost čitatele a jmenovatele. Čísla $3n + 1$, n jsou zřejmě nesoudělná a čísla $3n + 1$, $2n - 1$ mohou mít jako společného dělitele jedině číslo 5: je-li d jejich společný dělitel, $3n + 1 = da$, $2n - 1 = db$, je

$$d(2a - 3b) = 2(3n + 1) - 3(2n - 1) - 5.$$

Všechna uvažovaná čísla jsou racionální a jejich desetinné rozvoje mohou tedy být, jak známo, buď konečné, nebo nekonečné periodické (ke zdůvodnění je potřeba vědět něco málo o nekonečných řadách).

Vyloučíme první případ: Konečný rozvoj mají právě ty zlomky v základním tvaru, které mají jmenovatele tvaru $2^r 5^s$ (to vidíme hned, uvědomíme-li si, že vynásobením takového zlomku vhodnou mocninou deseti dostaneme celé číslo). Dejme tomu, že jmenovatel našeho zlomku má tento tvar (o to, zda je v základním tvaru, se starat nemusíme, zkrátit by šel, jak už víme, leda číslem 5). Čísla n, $2n-1$ jsou nesoudělná, $2n-1$ je liché, musí tedy být $n = 2^r$, $2n - 1 = 5^s$. Potom je

$$2^{p+1} = 5^s + 1 = (4+1)^s + 1.$$

Toto číslo dává při dělení čtyřmi zbytek 2 (binomická věta), je tedy $r = 0$, $s = 0$ a $n = 1$. Pro $n > 1$ tento případ nemůže nastat a rozvoj je nekonečný.

A – S – 1

Protože

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz},$$

je uvedená soustava tří rovnic pro $xyz \neq 0$ ekvivalentní soustavě

$$x + y + z = 1,$$
$$xy + yz + zx = \frac{1-p}{2},$$
$$xyz = \frac{1-p}{2}.$$

Dále postupujeme jako při řešení úlohy A–I–2: Čísla x, y, z jsou řešením této soustavy, právě když jsou řešením rovnice

$$t^3 - t^2 + \frac{1-p}{2}t - \frac{1-p}{2} = 0,$$

neboli

$$(t-1)\left(t^2 + \frac{1-p}{2}\right) = 0.$$

Je zřejmé, že poslední rovnice má tři *nenulové* reálné kořeny, právě když pro parametr p platí $p > 1$.

Jiné řešení dostaneme, jestliže dosadíme z z první rovnice do druhé; po úpravě dostaneme $(x+y)(1-x)(1-y) = 0$. Odtud plyne, že aspoň jedno z čísel x, y, z je rovno 1. Dále postupujeme stejně jako v předešlém řešení.

A – S – 2

Využijeme toho, že dvě čísla $a+b\sqrt{5}$, $c+d\sqrt{5}$, kde a, b, c, d jsou celá čísla, se rovnají, právě když $a = c$ a $b = d$ (to plyne z iracionality čísla $\sqrt{5}$). Po roznásobení pravé strany rovnosti

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{5} = \left(a_n + b_n\sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

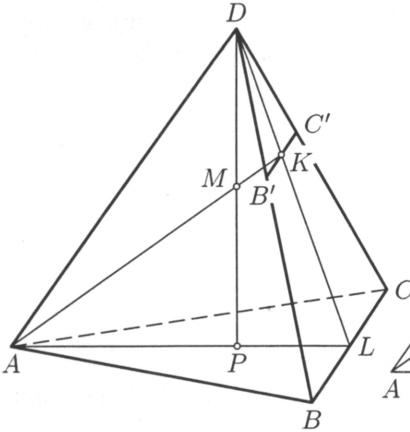
tak dostaneme dva rekurentní vztahy

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + 5b_n, \\ b_{n+1} &= a_n + 3b_n. \end{aligned}$$

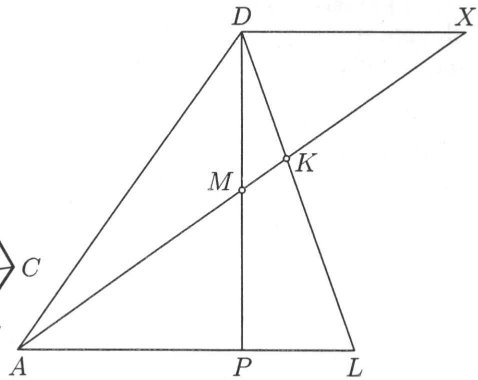
Tvrzení úlohy dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, takže $a_1 + b_1 = 4$, $a_1 - b_1 = 2$, tj. obě čísla jsou dělitelná dvěma. Předpokládejme, že $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ jsou dělitelná číslem 2^n. Potom je $a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_n + 8b_n = 6(a_n + b_n) - 2(a_n - b_n)$, takže $a_{n+1} + b_{n+1}$ je dělitelné číslem 2^{n+1}. Podobně je i $a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + 2b_n = 2(a_n + b_n)$ dělitelné číslem 2^{n+1}. Tím je důkaz hotov.

A – S – 3

Označme K průsečík přímky AM s rovinou BCD, L střed úsečky BC a B', C' průsečíky dané roviny s hranami DB, DC (obr. 20).



Obr. 20



Obr. 21

Bodem D veďme přímku rovnoběžnou s přímkou AL a její průsečík s přímkou AK označme X (obr. 21 ukazuje situaci v rovině AKD). Trojúhelníky ALK a XDK jsou souměrně sdružené podle středu M, takže $|DX| = |AP|$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků $ALK \sim XDK$ vychází

$$\frac{|DK|}{|KL|} = \frac{|DX|}{|AL|} = \frac{|AP|}{|AL|} = \frac{2}{3},$$

neboť P je těžiště trojúhelníku ABC. Je tedy

$$\frac{|DK|}{|DL|} = \frac{|DK|}{|DK| + |KL|} = \frac{1}{1 + \dfrac{|KL|}{|DK|}} = \frac{2}{5}.$$

Objemy čtyřstěnů $AB'C'D$ a $ABCD$ jsou ve stejném poměru jako obsahy trojúhelníků $B'C'D$ a BCD, tj. $4 : 25$. Hledaný poměr je tedy $4 : 21$.

A – II – 1

Nejmenší společný násobek $n = n(a, b)$ dvou přirozených čísel $a > b$ a jejich největší společný dělitel $d = D(a, b)$ zřejmě splňují nerovnost $n \geqq a > b \geqq d$, přičemž znaménko rovnosti v obou krajních nerovnostech nastane, právě když $b \mid a$. To ale znamená, že $n - d \geqq a - b$ s rovností, právě když $b \mid a$.

Pro danou posloupnost (a_k) odtud tedy plyne, že $a_1 \mid a_2$, $a_2 \mid a_3, \ldots,$ $a_{1\,990} \mid a_{1\,991}$, $a_{1\,991} \mid a_{1\,992}$. Protože $1\,993$ je prvočíslo, vyskytují se v posloupnosti $(a_k)_1^{1\,992}$ jen čísla 1 a $1\,993$. Proto je buď $a_{20} = 1$, nebo $a_{20} = 1\,993$.

Jiné řešení. Označme $D = D(a_k, a_{k+1})$, potom je $a_{k+1} = cD$, $a_k = dD$, kde c, d jsou nesoudělná čísla. Podle předpokladu pro dané k platí

$$cD = dD + cdD - D,$$

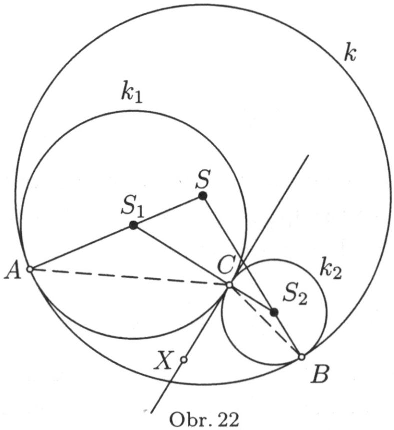
tj.

$$(c + 1)(d - 1)D = 0,$$

takže $d = 1$. Je tedy a_{k+1} přirozeným násobkem čísla a_k. Dále postupujeme stejně.

A – II – 2

Uvažujme společnou tečnu kružnic k_1, k_2 v bodě C. Pro úsekové úhly příslušné tětivám AC a BC platí (obr. 22)



Obr. 22

$$|\sphericalangle XCA| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle AS_1C|, \qquad |\sphericalangle XCB| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CS_2B|,$$

takže

$$\begin{aligned}|\sphericalangle ACB| &= \tfrac{1}{2}\big(|\sphericalangle AS_1C| + |\sphericalangle CS_2B|\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(2\pi - |\sphericalangle SS_1C| - |\sphericalangle SS_2C|\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(2\pi - (\pi - |\sphericalangle ASB|)\big) = \\ &= \frac{\pi + |\sphericalangle ASB|}{2} = \text{konst.}\end{aligned}$$

Bod C tedy leží na oblouku příslušné kružnice nad tětivou AB. Je-li ovšem $|\sphericalangle ASB| = 180°$ (body A, B jsou krajními body průměru dané kružnice k), vychází $|\sphericalangle ACB| = 180°$, takže hledanou množinu bodů C tvoří vnitřek úsečky AB.

Naopak pro libovolný bod tohoto oblouku (resp. úsečky AB) různý od bodů A, B sestrojme kružnice k_1', resp. k_2' tak, aby se dotýkaly kružnice k v bodě A, resp. B a procházely bodem C. Obrácením předchozího postupu je vidět, že obě kružnice mají v bodě C společnou tečnu.

A – II – 3

Podle předpokladu pro daná nenulová reálná čísla x, y, z platí

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz,$$

což po úpravě dává

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 0.$$

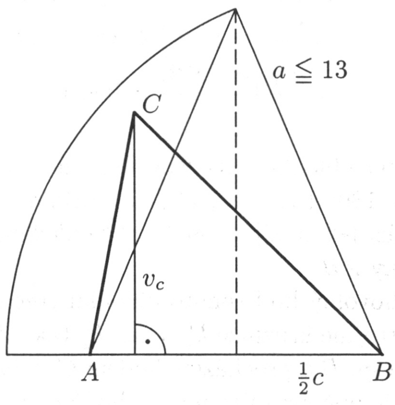
Protože daná rovnost je invariantní vůči permutacím čísel x, y, z, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je např. $y = -x$, a tudíž i $xy + yz + zx = -x^2 < 0$. Tím je důkaz hotov.

A – II – 4

Předpokládejme, že pro hrany a, b, c platí $13 \geqq a \geqq b \geqq c$. Jednu ze stěn uvažovaného čtyřstěnu při vrcholu D tvoří rovnoramenný trojúhelník s rameny délky b, pro jehož výšku na základnu x, a tedy i pro výšku v čtyřstěnu při vrcholu D platí

$$v \leqq \sqrt{b^2 - \tfrac{1}{4}x^2} \leqq \sqrt{13^2 - \tfrac{1}{4}c^2}.$$

Odtud je zřejmé, že objem $V = \frac{1}{3}v \cdot 60$ čtyřstěnu $ABCD$ bude největší, bude-li délka strany c co nejmenší (a uvažovaná stěna bude zároveň kolmá na stěnu ABC).



Obr. 23

Pro výšku v_c trojúhelníku ABC podobně platí $v_c \leqq \sqrt{13^2 - \frac{1}{4}c^2}$ (obr. 23), a protože $60 = \frac{1}{2}cv_c$, splňuje c nerovnici

$$60 \leqq \tfrac{1}{2}c\sqrt{13^2 - \tfrac{1}{4}c^2}.$$

Vyřešením této nerovnice dostaneme pro délku strany c nerovnost $10 \leqq c \leqq 24$. Pro $c = 10$ pak vyjde $v = 12$, takže maximální objem uvažovaného čtyřstěnu je $V = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 12 = 240\,\text{cm}^3$.

A – III – 1

Je jasné, že každé číslo tvaru $6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + \ldots + 1)$ pro n přirozené je dělitelné pěti. Proberème-li zbytky mocnin 7^i, $1 \leqq i \leqq 5$, zjistíme, že $7^n - 1$ je dělitelné pěti právě jen pro čísla n tvaru $n = 4k$ (tomu, kdo zná malou Fermatovu větu, stačí probrat mocniny 7, 7^2 a 7^4). Pro taková čísla n však platí, že $6^n - 1 = 6^{4k} - 1 = 36^{2k} - 1 = (7 \cdot 5 + 1)^{2k} - 1$ je dělitelné sedmi. Číslo $7^n - 1$ tedy nemůže být násobkem čísla $6^n - 1$ pro žádné přirozené n, protože není dělitelné sedmi.

A – III – 2

Uvažujme tabulku $n \times n$, $n \geqq 3$, a označme m nejmenší a M největší z čísel tabulky.

Cestou mezi políčky tabulky o souřadnicích (i, j) a (k, l) nazveme každou posloupnost sousedních políček tabulky, která začíná v (i, j) a končí v (k, l). Vzdálenost dvou políček tabulky o souřadnicích (i, j) a (k, l) definujeme jako $|i - k| + |j - l|$. Je jasné, že pro takovouto vzdálenost libovolných dvou políček tabulky platí, že je nejvýše rovna $2n - 2$.

Pokud je vzdálenost políček s čísly m a M menší, tedy nejvýše $2n - 3$, dostaneme pro rozdíl $M - m$ odhad $M - m \leqq 2(2n - 3) = 4n - 6$, takže tabulka může obsahovat nejvýše $4n - 5$ různých čísel (víc se jich do intervalu $\langle m, M \rangle$ nevejde).

Je-li vzdálenost políček s čísly m a M právě $2n - 2$ (maximální možná), musí příslušná políčka ležet v protějších rozích tabulky. V takovém případě označme k počet různých čísel v dané tabulce a nechť $b_1 = m < b_2 < \ldots < b_{k-1} < b_k = M$ jsou všechna čísla v ní zapsaná. Vzdálenost mezi políčky obsahujícími čísla b_2 a b_{k-1} je nejvýše $2n - 4$, a proto $b_{k-1} - b_2 \leqq 2(2n - 4) = 4n - 8$. Pro rozdíl čísel M a m tak máme

$$\begin{aligned} M - m &= (M - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_2) + (b_2 - m) \leqq \\ &\leqq (M - b_{k-1}) + 4n - 8 + (b_2 - m). \end{aligned}$$

Podle toho, zda některé z čísel $M - b_{k-1}$ a $b_2 - m$ je 1 nebo 2, odtud plyne, že může nastat jedna z následujících tří možností:

1) $M - m \leqq 4n - 6$,

2) $M - m \leqq 4n - 5$, přičemž tabulka neobsahuje buď číslo $m + 1$, nebo číslo $M - 1$,

3) $M - m \leqq 4n - 4$, přičemž tabulka neobsahuje ani jedno z čísel $m + 1$ a $M - 1$.

V každém případě vychází, že tabulka obsahuje nejvýše $4n - 5$ různých celých čísel intervalu $\langle m, M \rangle$.

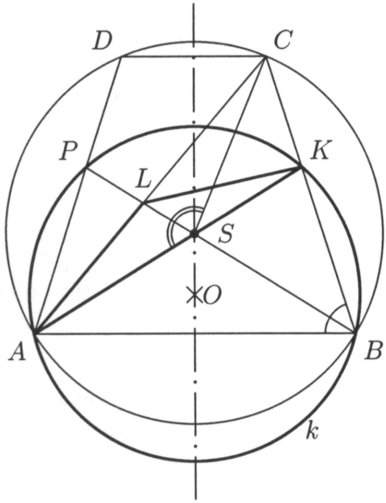
Nyní stačí ukázat, že do tabulky $n \times n$ lze zapsat čísla $1, 2, 3, \ldots, 4n - 5$ tak, aby byly splněny podmínky úlohy. To můžeme udělat například tak, že rozmístíme čísla podle schématu

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-3 & 2n-1 \\
2 & 4 & 6 & \ldots & 2n-2 & 2n \\
4 & 6 & 8 & \ldots & 2n & 2n+1 \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
2n-4 & 2n-2 & 2n & \ldots & 4n-8 & 4n-7 \\
2n-2 & 2n & 2n+2 & \ldots & 4n-6 & 4n-5
\end{array}
$$

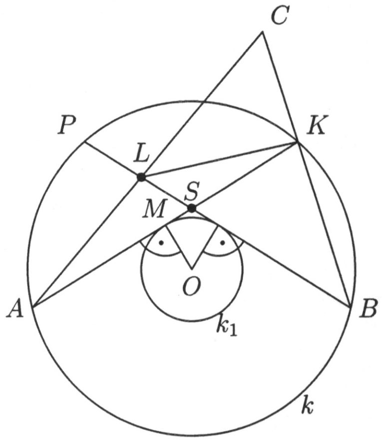
A – III – 3

Předpokládejme, že hledaný lichoběžník $ABCD$ existuje. Protože obvodovému úhlu ABC v kružnici opsané trojúhelníku ABC přísluší středový úhel ASC (obr. 24), jehož velikost je $180° - 2|\sphericalangle LAK|$, známe velikost úhlu $\beta = |\sphericalangle ABC| = 90° - |\sphericalangle LAK|$ hledaného lichoběžníku. Jeho vrchol B tedy leží na oblouku l kružnice k o středu O, kterému nad tětivou AK v polorovině opačné k polorovině AKL odpovídá obvodový úhel β. Protože $|\sphericalangle ALK| > 180° - \beta$, je bod L vnitřním bodem kruhu vymezeného kružnicí k.

Uvažujme průsečík P kružnice k s ramenem AD lichoběžníku $ABCD$. Ze souměrnosti podle osy SO úsečky AB plyne, že bod P je v této souměrnosti obrazem bodu K, bod L leží uvnitř úsečky BP a platí $|AK| = |BP|$. Odtud plyne konstrukce tětivy BP: Daným bodem L je nutno vést takovou přímku, která by na již sestrojené kružnici k vyťala tětivu BP dané délky $|AK|$. Takovou přímku sestrojíme jako tečnu vedenou bodem L ke kružnici k_1 soustředné s kružnicí k, jejíž poloměr je roven $|OM|$, kde M je střed AK. Protože $|AS| = |CS| > |SK|$, vybereme



Obr. 24



Obr. 25

ze dvou takových tečen tu, která protíná úsečku MK (a ne MA, obr. 25). Bod C pak najdeme jako průsečík polopřímek AL a BK.

Důkaz správnosti konstrukce. Stačí ověřit, že průsečík S sestrojené tětivy BP s úsečkou MK je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a že $|\sphericalangle CAB| < |\sphericalangle ABC|$ (pak je totiž možné doplnit ABC na lichoběžník $ABCD$). Předně ze shodnosti tětiv AK a BP ihned plyne, že $|AS| = |BS|$. Označme $\delta = |\sphericalangle LAK|$ a $\varepsilon = |\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA|$. Podle konstrukce je $|\sphericalangle CBA| = \beta = 90^\circ - \delta$ a z jednotlivých trojúhelníků plyne

$$\begin{aligned}
BSA&: |\sphericalangle BSA| = 180^\circ - |\sphericalangle SAB| - |\sphericalangle SBA| = 180^\circ - 2\varepsilon,\\
BAL&: |\sphericalangle BLA| = 180^\circ - |\sphericalangle LBA| - |\sphericalangle LAB| = 180^\circ - \varepsilon - (\varepsilon + \delta) =\\
&\qquad = 180^\circ - 2\varepsilon - \delta,\\
BCL&: |\sphericalangle BCL| = 180^\circ - |\sphericalangle CBL| - |\sphericalangle CLB| =\\
&\qquad = 180^\circ - (90^\circ - \delta - \varepsilon) - (2\varepsilon + \delta) = 90^\circ - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Platí tedy $|\sphericalangle BSA| = 2|\sphericalangle BCA|$, a to podle věty o středovém a obvodovém úhlu znamená, že bod C leží na kružnici o středu S procházející body A a B. Konečně platí

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle LAB| < |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle KBA| = |\sphericalangle CBA|,$$

Diskuse. Protože přímky LA a LK kružnici k_1 neprotínají a přímka LM je její sečna, lze bodem L proložit právě jednu tečnu ke kružnici

k_1, která protne úsečku MK (druhá tečna protne úsečku MA). Existence bodu C: Polopřímky AL a BK se protnou (v jediném bodě), pokud $|\sphericalangle LAB| + |\sphericalangle ABK| < 180°$. Protože platí $|\sphericalangle LAB| < |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle ABK| = \beta < 90°$, je také $|\sphericalangle LAB| + |\sphericalangle ABK| < 2\beta < 180°$. Úloha má proto jediné řešení.

A – III – 4

Ukážeme, že daná posloupnost je shora omezená číslem 10^{12}. Z čísel menších než 10^{12} má zřejmě největší součet desátých mocnin svých číslic číslo $10^{12} - 1$, přičemž je $12 \cdot 9^{10} < 12 \cdot 10^{10} < 10^{12}$. V omezené (nekonečné) posloupnosti se aspoň jedna hodnota vyskytuje dokonce nekonečněkrát.

A – III – 5

Položíme-li v (1) $x := -y$ a $y := x$, dostaneme

$$f(-y) + f(x) = f(-y - 2xy) + f(x + 2xy). \qquad (2)$$

Odečtením (2) a (1) vyjde rovnost

$$f(y) - f(-y) = f\bigl(y(1 - 2x)\bigr) - f\bigl(y(-1 - 2x)\bigr).$$

Protože $1-2x$ a $-1-2x$ jsou libovolná dvě sousední lichá čísla, usoudíme, že f je lineární na množině všech lichých násobků pevného čísla y. Tedy

$$f(x) = a_k x + b_k \qquad (x \in \mathsf{T}_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

kde T_k značí množinu všech lichých násobků čísla 2^k.

Abychom zjistili čísla a_k, b_k, dosadíme do (1): je-li $x \in \mathsf{T}_k$ a $y \in \mathsf{T}_l$, je ovšem

$$x(1 + 2y) \in \mathsf{T}_k \qquad \text{a} \qquad y(1 - 2x) \in \mathsf{T}_l,$$

takže rovnost (1) bude mít tvar

$$a_k x + b_k + a_l y + b_l = a_k(x + 2xy) + b_k + a_l(y - 2xy) + b_l,$$

neboli $xy(a_k - a_l) = 0$. Protože $xy \neq 0$, dostáváme nutnou i postačující podmínku: všechna čísla a_k jsou rovna témuž číslu a. Protože rovnost (1) je triviálně splněna, je-li jedno z čísel x, y rovno nule, mají všechny funkce, jež vyhovují podmínce (1), tvar

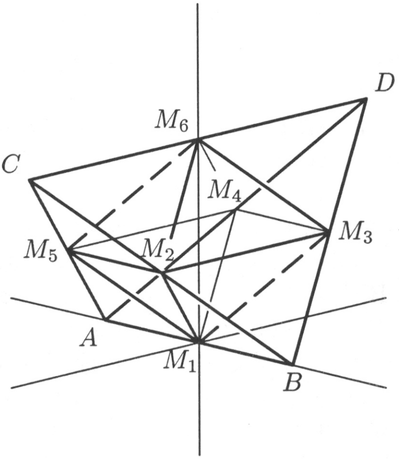
$$f(x) = \begin{cases} ax + b_k, & x \in \mathsf{T}_k, \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

kde a, c a b_k jsou libovolné konstanty. V naší úloze

$$a = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = 0, \quad \text{a tedy} \quad b_k = f(2^k) \ \text{a} \ c = f(0).$$

A – III – 6

Ukážeme, že takový čtyřstěn existuje. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ (obr. 26), jehož dvě protější hrany AB a CD délky 2 jsou shodné a navzájem kolmé a který je osově souměrný podle střední příčky těchto dvou hran. Stěny tohoto čtyřstěnu jsou navzájem shodné trojúhelníky o stranách 2, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$.



Obr. 26

Rozdělme každou stěnu uvažovaného čtyřstěnu $ABCD$ středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky. Každá z rovin určených středy tří hran se společným vrcholem je rovnoběžná s protější stěnou a ze čtyřstěnu oddělí čtyřstěn podobný původnímu (stejnolehlý s koeficientem $\frac{1}{2}$). Odříznutím těchto čtyř čtyřstěnů dostaneme osmistěn $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$, který lze rozložit na čtyři shodné čtyřstěny, jež mají společnou hranu M_1M_6 (střední příčku hran AB a CD). Bude-li velikost této společné hrany rovna velikosti k ní kolmých hran osmistěnu, budou uvedené čtyřstěny podobné původnímu čtyřstěnu s koeficientem $\frac{1}{2}$.

Početně se uvedená tvrzení snadno ověří, zvolíme-li vrcholy A, B, C, D v mřížových bodech krychlové sítě:

$$A = (1,0,0), \ B = (-1,0,0), \ C = (0,1,1), \ D = (0,-1,1).$$