41. ročník matematické olympiády na středních školách

Korespondenční seminář ÚV MO 1991/92

In: Andrej Blaho (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Moravčík (editor); Václav Sedláček (editor); Jaromír Šimša (editor); Pavel Töpfer (editor): 41. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1991/1992. 33. mezinárodní matematická olympiáda. 4. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1997. pp. 118–123.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404962

Korespondenční seminář ÚV MO 1991/92

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří neměli možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Nyní, kdy existují i krajské korespondenční semináře a kdy speciální školy s třídami zaměřenými na matematiku najdeme v každém kraji, je cílem tohoto semináře zlepšit individuální přípravu všech studentů, kteří prokázali své schopnosti a matematický talent v předchozích ročnících matematické olympiády. Korespondenční seminář tak nadále zůstává důležitou součástí přípravy na mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorií B a C předchozího ročníku MO. V průběhu 41. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh, jejichž texty najdete na následujících stranách. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Pavel Růžička*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
2. *Pavel Vrbacký*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
3. *Josef Menšík*, 4. ročník G, kpt. Jaroše, Brno
4. *Richard K. Kollár*, 4. ročník GAM, Bratislava
5. *Filip Sajdák*, 3. ročník G, V. Okružná, Žilina

Korespondenční seminář byl řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. *Karlem Horákem*, CSc., který se staral o výběr úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici).

Úlohy korespondenčního semináře

1.1 V rovině je dána množina E 1 991 bodů, z nichž některé dvojice jsou spojeny čarou. Předpokládejme, že pro každý bod z E existuje v E aspoň 1 953 dalších bodů, s kterými je uvedený bod spojen čarou. Dokažte, že v E existuje šest bodů, z nichž každé dva jsou spojeny čarou.

1.2 V ostroúhlém trojúhelníku ABC postupně označme M střed strany BC, P ten bod úsečky AM, pro který je $|PM| = |BM|$, H patu kolmice spuštěné z bodu P na stranu BC, Q průsečík strany AB s přímkou procházející bodem H, která je kolmá na PB, a R průsečík strany AC s přímkou procházející bodem H, která je kolmá na PC. Dokažte, že strana BC daného trojúhelníku se dotýká kružnice opsané trojúhelníku HQR.

1.3 Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{995} \frac{(-1)^k}{1\,991-k}\binom{1\,991-k}{k} = \frac{1}{1\,991}.$$

1.4 Je dáno přirozené číslo n a celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z nichž žádné není dělitelno n, dokonce ani jejich součet není n dělitelný. Dokažte, že existuje aspoň n různých posloupností $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nul a jedniček takových, že n dělí součet $e_1a_1 + e_2a_2 + \ldots + e_na_n$.

1.5 Označme α kladný kořen rovnice $x^2 = 1\,991x + 1$ a pro kladná celá čísla m, n označme

$$m * n = mn + [\alpha m][\alpha n],$$

kde $[x]$ je celá část čísla x. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla p, q, r platí

$$(p * q) * r = p * (q * r).$$

1.6 Dva studenti A a B hrají následující hru: Každý z nich napíše na lístek papíru kladné celé číslo a dá lístek rozhodčímu. Ten napíše na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je rovno součtu čísel napsaných oběma hráči. Poté se rozhodčí zeptá studenta A: „Můžeš říci číslo napsané soupeřem?“ Je-li jeho odpověď „ne“, rozhodčí se zeptá na totéž hráče B. Jestliže i B odpoví záporně, zeptá se rozhodčí opět hráče A, atd. Předpokládejme, že oba studenti jsou inteligentní a pravdomluvní. Dokažte, že po konečném počtu otázek jeden z nich odpoví „ano“.

1.7 Najděte maximální hodnotu součtu

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j)$$

kde n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ splňují podmínky $x_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ a $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

2.1 Uvnitř trojúhelníku ABC je dán bod P. Označme P_1, P_2 paty kolmic spuštěných z bodu P na přímky AC a BC a Q_1, Q_2 nechť jsou paty kolmic spuštěných z bodu C na přímky AP a BP. Dokažte, že průsečík přímek Q_1P_2 a Q_2P_1 leží na přímce AB.

2.2 Předpokládejme, že a, b, c jsou celá čísla a p liché prvočíslo. Jestliže $f(x) = ax^2 + bx + c$ je druhou mocninou celého čísla pro $2p - 1$ po sobě jdoucích celých čísel x, pak p dělí $b^2 - 4ac$. Dokažte.

2.3 Nechť a je racionální číslo, $0 < a < 1$, a nechť

$$\cos 3\pi a + 2 \cos 2\pi a = 0.$$

Dokažte, že $a = \frac{2}{3}$.

2.4 Označme O střed kulové plochy opsané danému čtyřstěnu $ABCD$, středy jeho stran BC, CA, AB označme po řadě L, M, N a předpokládejme, že $|AB| + |BC| = |AD| + |DC|$, $|BC| + |CA| = |BD| + |DA|$ a $|CA| + |AB| = |CD| + |DB|$. Dokažte, že $|\sphericalangle LOM| = |\sphericalangle MON| = |\sphericalangle NOL|$.

2.5 Je dán trojúhelník ABC s úhlem $\alpha = 60°$. Sestrojme rovnoběžku VF se stranou AC, kde V je střed kružnice vepsané a F bod ležící na straně AB. Jestliže pro bod P na straně BC platí $3|BP| = |BC|$, pak $|\sphericalangle BFP| = \frac{1}{2}\beta$.

2.6 Jsou dána reálná čísla a, b, c taková, že existuje právě jeden čtverec, jehož všechny vrcholy leží na kubické křivce $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Zjistěte velikost strany takového čtverce.

2.7 Jsou dány dvě celočíselné funkce f a g, jež jsou definovány pro všechna celá čísla a splňují následující dvě podmínky:

(a) $f\big(m + f(f(n))\big) = -f\big(f(m+1)\big) - n$ pro všechna celá čísla m a n;

(b) g je mnohočlen s celočíselnými koeficienty a $g(n) = g\big(f(n)\big)$ pro všechna celá n.

Určete $f(1\,991)$ a tvar mnohočlenu g.

3.1 Uvažujme množinu S v rovině, která obsahuje n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že existuje množina P obsahující $2n-5$ bodů s touto vlastností: Uvnitř každého trojúhelníku, jehož vrcholy patří do S, leží bod množiny P.

3.2 Označme a_n poslední nenulovou číslici dekadického rozvoje čísla $n!$. Zjistěte, zda je posloupnost (a_n) od jistého členu počínaje periodická.

3.3 Je dán mnohočlen $f(x) = x^{1991} + a_1x^{1990} + \dots$ s celočíselnými koeficienty. Ukažte, že počet různých celočíselných kořenů mnohočlenu $g(x) = f^2(x) - 9$ nemůže být větší než 1 995.

3.4 V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Předpokládejme, že kružnice s průměrem AB protíná přímku CC' v bodech M, N a přímku BB' v bodech P, Q, kde CC' a BB' jsou výšky trojúhelníku ABC. Dokažte, že body M, N, P, Q leží na jedné kružnici.

3.5 Náhrdelník A obsahuje 14 korálků a náhrdelník B 19 korálků. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n existuje způsob, jak všech 33 korálků očíslovat čísly z množiny

$$\{n, n+1, n+2, \dots, n+32\}$$

tak, že každé číslo použijeme jen jednou a sousední korálky budou označeny nesoudělnými čísly. (Na náhrdelník se díváme jako na kružnici s korálky, z nichž každý má právě dva sousední.)

3.6 Pravoúhelníkový list papíru o rozměrech $a \times b$ je rozřezán na obdélníkové kousky, z nichž každý má jednu stranu délky 1. Dokažte, že aspoň jedno z čísel a, b je celé.

3.7 V rovině je dáno n bodů. Vyznačme středy všech úseček s krajními body v daných bodech. Jaký je nejmenší možný počet takto označených bodů?

4.1 V daném trojúhelníku ABC označme A_1, B_1, C_1 středy stran BC, CA, AB. Jaký je nejmenší možný obsah průniku trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a KLM, jestliže body K, L, M leží na úsečkách AB_1, BC_1, resp. CA_1?

4.2 Uvažujme konvexní mnohoúhelník s následující vlastností: jestliže všechny jeho strany posuneme vně o jednotkovou vzdálenost, vytvoří odpovídající přímky mnohoúhelník podobný danému mnohoúhelníku. Dokažte, že takovému mnohoúhelníku lze vepsat kružnici.

4.3 Součet stovky přirozených čísel, z nichž žádné není větší než 100, je roven 200. Dokažte, že z nich lze vybrat několik čísel, jejichž součet je roven 100.

4.4 Uvažujme n závaží s celočíselnou hmotností, jež jsou rozdělena do k skupin stejné hmotnosti ($k \geqq 2$). Dokažte, že lze nejméně k různými způsoby odstranit jedno ze závaží tak, aby zbývajících $n-1$ závaží už nešlo rozložit na k skupin stejné hmotnosti.

4.5 V rovině je dáno $2n$ bodů — n modrých a n červených, přičemž žádné tři body neleží v přímce. Dokažte, že je možno sestrojit n úseček tak, že každá z nich má jeden krajní bod modrý a jeden červený, přičemž žádné dvě úsečky nemají společný bod.

4.6 Dokažte, že na množině $\mathbb{Z}_+$ celých nezáporných čísel existuje právě jedna binární operace $\circ$ s následujícími vlastnostmi:
(1) $a \circ b = b \circ a$;
(2) jestliže $a \circ b = c$, je $b \circ c = a$;
(3) jestliže $a \circ b > c$, pak $b \circ c < a$ nebo $a \circ c < b$.
Najděte pravidlo umožňující pro daná čísla a, $b \in \mathbb{Z}_+$ vypočítat $a \circ b$.

4.7 Do rovnoběžníku P_1 je vepsán rovnoběžník P_2, do kterého je vepsán další rovnoběžník P_3, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami P_1. Dokažte, že alespoň jedna ze stran rovnoběžníku P_3 je rovna nejméně jedné polovině strany P_1, která je s ní rovnoběžná.

5.1 Je dáno přirozené číslo n. Jestliže pro libovolné reálné x platí

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \geqq -1,$$

splňují čísla a_1, a_2, …, a_n nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq n.$$

Dokažte.

5.2 Na tětivách AB a $A'B'$ dané kružnice jsou zvoleny body C, C' tak, že přímky AA', BB' a CC' mají společný bod P. Označíme-li

$$\begin{aligned} t &= |AP| \cdot |A'P|, \\ s &= |AC| \cdot |CB|, \\ s' &= |A'C'| \cdot |C'B'|, \\ q &= |CP|, \qquad q' = |C'P'|, \end{aligned}$$

pak platí

$$\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + q'^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}.$$

Dokažte.

5.3 V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně 1. První hráč vybere bod X na straně AB, druhý bod Y na straně BC a nakonec zas první hráč zvolí bod Z na straně CA.

a) Cílem prvního hráče je dostat trojúhelníku byl co nejmenší. Jakého největšího obsahu může první hráč dosáhnout při optimální hře druhého?

b) Řešte tutéž úlohu pro obvod místo obsahu.

5.4 Je dán mnohočlen p s celočíselnými koeficienty. Pro libovolné přirozené číslo n označme a_n součet číslic v dekadickém zápisu čísla $p(n)$. Dokažte, že existuje číslo, které se v posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vyskytuje nekonečněkrát.

5.5 V rovině je dán obrazec, který je průnikem n kruhů a obsahuje aspoň dva body. Dokažte, že hranici takového obrazce lze vyjádřit jako sjednocení nejvýše $2n - 2$ kruhových oblouků.

5.6 V rovině je dána kružnice k a uvnitř ní bod P. Uvažujme čtyřstěny $ABCD$, jejichž stěny jsou shodné trojúhelníky a stěna ABC je vepsána do kružnice k tak, že bod P je jejím těžištěm. Pro které body P uvnitř kružnice k takový čtyřstěn existuje? Dokažte, že vrcholy D takových čtyřstěnů leží vždy v jednom ze dvou bodů prostoru, jež jsou souměrné podle dané roviny.

5.7 Mezi n-místnými čísly, jejichž zápis v desítkové soustavě neobsahuje žádnou nulu, najděte takové, jehož rozdíl od součinu jeho číslic je

a) nejmenší;

b) největší.