40. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z6

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor): 40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 69–83.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404945

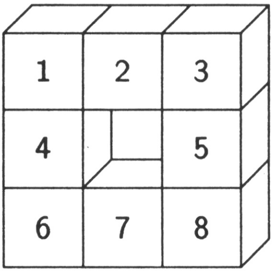
Kategória Z6

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 73)

Z6 – I – 1

Na obrázku 30 je znázornené teleso zložené z ôsmich kociek s hranou 1 cm. Koľko štvorcov so stranou 1 cm tvorí povrch tohto telesa? Aký je najmenší počet farieb, ktorými možno vyfarbiť tieto štvorce tak, aby žiadne dva, ktoré majú spoločnú stranu, neboli vyfarbené tou istou farbou? Spôsob vyfarbenia opíšte alebo nakreslite.



Obr. 30

Z6 – I – 2

Hviezdičky nahraďte číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie.

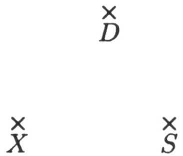
$$\begin{array}{r} ** \\ \cdot\ ** \\ \hline *5* \\ *8* \\ \hline 2052 \end{array}$$

V českom letáku:

$$\begin{array}{r} ** \\ \cdot\ ** \\ \hline *6* \\ *8* \\ \hline 2052 \end{array}$$

Z6 – I – 3

Dané sú tri body X, D, S (obr. 31). Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby bod S bol jeho stred a bod X ležal na priamke AB.



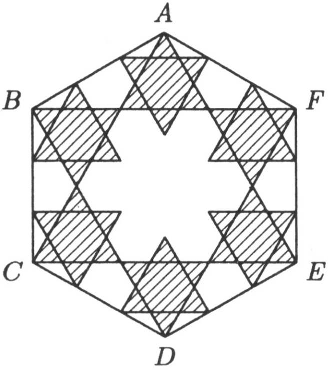
Obr. 31

Z6 – I – 4

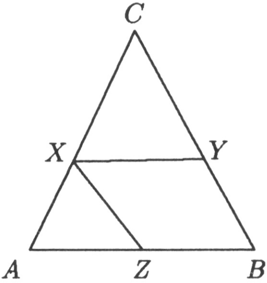
Štyria kamaráti majú spolu 206 guľôčok. Každý z nich (okrem najmladšieho) má o 5 guľôčok viac, ako je polovica z guľôčok, ktoré majú spolu od neho mladší kamaráti. Koľko guľôčok má každý z nich?

Z6 – I – 5

Z lesklej hliníkovej fólie tvaru pravidelného šesťuholníka *ABCDEF* bola vystrihnutá vianočná ozdoba, ktorú tvorí 6 pravidelných hviezd (obr. 32). Narysujte ozdobu, ktorá vznikne zo šesťuholníka so stranou $a = 6\,\text{cm}$. Rysujte čo najpresnejšie. Vyjadrite zlomkom veľkosť odpadu.



Obr. 32



Obr. 33

Z6 – I – 6

V trojuholníku *ABC* (obr. 33) platí:

$$|\sphericalangle ZBY| = 61^\circ, \qquad |\sphericalangle XCY| = 55^\circ,$$

$$|\sphericalangle ZXY| = 53^\circ \quad \text{a} \quad |AZ| = |ZX|.$$

Zistite, či je dvojica priamok AB, XY alebo dvojica priamok BC, XZ rovnobežná.

ÚLOHY II. KOLA

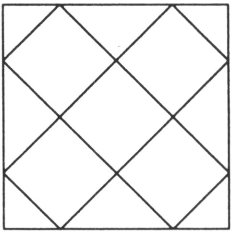
(Riešenia úloh na str. 81)

Z6 – II – 1

V danom trojuholníku bol najväčší uhol o $4°$ menší ako súčet ostatných dvoch. Najmenší uhol bol štyrikrát menší ako súčet ostatných dvoch. Určte uhly daného trojuholníka.

Z6 – II – 2

Zo štvorca bol vystrihnutý kríž, ktorý je zložený z 5 zhodných štvorcov. Odpad tvorili rovnoramenné trojuholníky, ktorých obsah spolu bol $48\,cm^2$. Určte obsah pôvodného štvorca (obr. 34).



Obr. 34

Z6 – II – 3

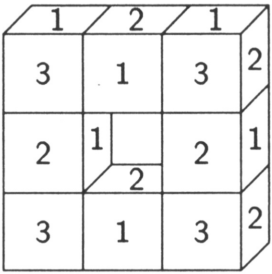
Martinka počítala úlohu. Keď prišla do školy, zistila, že sa jej v taške rozbila fixka a urobila machuľu. Tak sa stalo, že z výsledku vedela prečítať len 57∗7∗, číslice na mieste

∗ boli nečitateľné. Martinka si však pamätala, že výsledok bol deliteľný 12. Aké sú všetky možnosti výsledkov?

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z6–I–1 (str. 69)

Povrch telesa tvorí 32 štvorcov — 8 vpredu, 8 vzadu, 12 „dookola" a 4 „v diere". Jedno z možných vyfarbení je na obr. 35.



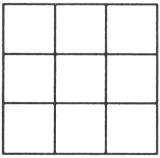
Obr. 35

Rovnaké čísla v obrázku znamenajú rovnaké farby. Protiľahlé steny jednotlivých kociek sú vyfarbené rovnakou farbou. Teleso teda možno vyfarbiť tromi farbami. Že sa to nedá dvoma farbami je možné vidieť na „rohových kockách" — museli by byť dve rovnaké farby vedľa seba.

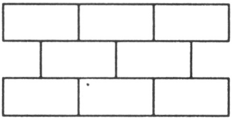
Poznámky. Teleso možno vyfarbiť aj inými spôsobmi. Úloha sa dá riešiť aj rozvinutím povrchu telesa do roviny — do siete telesa.

Pomocné úlohy

1. Koľkými farbami a ako možno podobným spôsobom vyfarbiť útvary na obrázku 36a, b.



Obr. 36a



Obr. 36b

2. Koľkými farbami a ako možno podobným spôsobom vyfarbiť kocku?

Riešenie úlohy Z6–I–2 (str. 70)

1. riešenie. Najskôr určíme medzivýsledky. To môžme určiť jednoznačne:

$$\begin{array}{r} {*}{*} \\ \cdot\ {*}{*} \\ \hline 252 \\ 180 \\ \hline 2052 \end{array}$$

V českej verzii:

$$\begin{array}{r} {*}{*} \\ \cdot\ {*}{*} \\ \hline 162 \\ 189 \\ \hline 2052 \end{array}$$

Neznámy prvý činiteľ súčinu musí deliť obidva medzivýsledky; teda bude to ich spoločný deliteľ. Pritom podiely, ktoré dostaneme vydelením medzivýsledkov spoločným deliteľom, musia byť jednociferné. Sú to cifry druhého činiteľa. Jediná možnosť potom je

$$252 = 36 \cdot 7 \qquad \text{V českej verzii:} \qquad 162 = 27 \cdot 6$$
$$180 = 36 \cdot 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 189 = 27 \cdot 7$$

Z toho už vychádza jednoznačné riešenie

$$\begin{array}{r} 36\\ \cdot\, 57\\ \hline 252\\ 180\\ \hline 2052 \end{array} \qquad \text{V českej verzii:} \qquad \begin{array}{r} 27\\ \cdot\, 76\\ \hline 162\\ 189\\ \hline 2052 \end{array}$$

2. riešenie. Najskôr nájdeme neznáme činitele. Súčin 2052 rozložíme na dva dvojciferné činitele. Sú to práve tri možnosti: $27 \cdot 76$, $36 \cdot 57$, $38 \cdot 54$. Preskúšame roznásobením, či vyhovujú medzivýsledky. Nesmieme zabudnúť na zmenu poradia činiteľov — teda šesť preskúšaní:

$$\begin{array}{r} 27\\ \cdot\, 76\\ \hline 1\mathbf{6}2\\ 1\mathbf{8}9\\ \hline \underline{\underline{2052}} \end{array} \quad \begin{array}{r} 76\\ \cdot\, 27\\ \hline 532\\ 152\\ \hline 2052 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36\\ \cdot\, 57\\ \hline 2\mathbf{5}2\\ 1\mathbf{8}0\\ \hline \underline{\underline{2052}} \end{array} \quad \begin{array}{r} 57\\ \cdot\, 36\\ \hline 342\\ 171\\ \hline 2052 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38\\ \cdot\, 54\\ \hline 152\\ 190\\ \hline 2052 \end{array} \quad \begin{array}{r} 54\\ \cdot\, 38\\ \hline 432\\ 162\\ \hline 2052 \end{array}$$

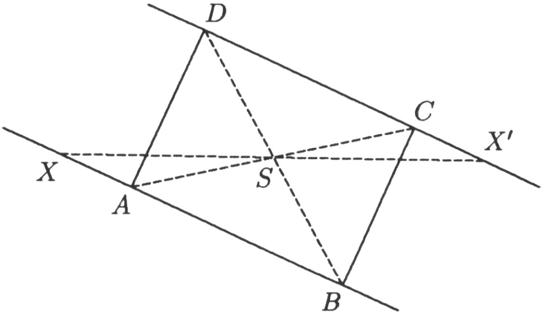
Len hrubo podčiarknutý súčin vyhovuje podmienkam úlohy — v medzisúčtoch musia byť v strede cifry 5 a 8 (resp. 6 a 8 v českej verzii). Teda úloha má práve jedno riešenie: v slovenskej verzii odpovedajúce súčinu $36 \cdot 57$ v českej verzii odpovedajúce súčinu $27 \cdot 76$.

Pomocné úlohy

Úlohy na algebrogramy napr. z učebnice Cvičenia z matematiky pre 6. ročník ZŠ, alebo zo zbierky Repáš, Pribišová, Vantuch: Úlohy z matematických olympiád pre ZŠ (SPN Bratislava, 1989, SPN Praha, 1991).

Riešenie úlohy Z6–I–3 (str. 70)

Uvažujeme, akoby sme úlohu už mali hotovú. Nakreslíme si ľubovoľný obdĺžnik $ABCD$, vyznačíme bod S a zvolíme bod X ľubovoľne na priamke AB (obr. 37).



Obr. 37

Je zrejmé, že obdĺžnik $ABCD$ je súmerný podľa stredu S. Teda priamka CD je obrazom priamky AB a teda bod X sa v stredovej súmernosti podľa stredu S musí zobraziť do bodu X' ležiaceho na priamke CD. Na tom je založené riešenie úlohy.

Zostrojíme bod X' súmerne združený s bodom X podľa stredu S; bodom D a bodom X je určená priamka, na ktorej leží strana CD. Obdĺžnik $ABCD$ už potom nie je problém zostrojiť. Stačí si uvedomiť, že susedné strany sú na seba kolmé.

Konštrukcia: (Predpokladáme, že body X, D, S zo zadania sú vyznačené.)

1. Zostrojíme bod X' súmerne združený s bodom X podľa stredu S.

2. Zostrojíme priamku DX'.
3. Zostrojíme priamku k kolmú na priamku DX', prechádzajúcu bodom D.
4. Zostrojíme priamku l rovnobežnú s priamkou DX', prechádzajúcu bodom X.
5. Zostrojíme bod A ako prienik priamok k, l.
6. Zostrojíme bod C, súmerne združený s bodom A podľa stredu S.
7. Zostrojíme bod B, súmerne združený s bodom D podľa stredu S.
8. Zostrojíme obdĺžnik $ABCD$.

Poznámka. Namiesto bodu X' sme mohli najprv zostrojiť bod B ako obraz bodu D v stredovej súmernosti podľa stredu S.

Pomocné úlohy

1. Nájdite všetky stredy a osi súmerností a) štvorca, b) obdĺžnika, c) kosoštvorca, d) rovnobežníka.

2. Zostrojte štvorec $ABCD$, ak je daný jeho stred S a body X, Y, ktoré ležia a) na priamke AB, b) na rovnobežkách AB a CD (teda $X \in AB$, $Y \in CD$).

Riešenie úlohy Z6–I–4 (str. 70)

1. riešenie (úvahou). Ak by mal najstarší o 5 guľôčok menej, mal by polovicu z toho, čo majú ostatní spolu. Spolu by potom bolo $206 - 5 = 201$ guľôčok, teda najstarší by mal $201 : 3 = 67$ guľôčok a ostatní spolu 134 guľôčok. Najstarší má ale o 5 viac, teda najstarší má 72 guľôčok. Podobne, ak by zvyšní traja chlapci mali o 5 guľôčok druhého najstaršieho menej, mali by spolu $134 - 5 = 129$ guľôčok, teda druhý najstarší by mal $129 : 3 = 43$ guľôčok. Ten má však o 5 viac, teda má 48 guľôčok. Tak isto, ak by mal tretí v poradí o 5 guľôčok menej, mal by polovicu z toho čo najmladší. Spolu by potom mali $86 - 5 = 81$ guľôčok, teda tretí najstarší má $81 : 3 + 5 = 27 + 5 = 32$ guľôčok a najmladší má $27 \cdot 2 = 54$ guľôčok.

Skúška: $54 + 32 + 48 + 72 = 206$.

Chlapci majú, v poradí od najstaršieho, 72, 48, 32, 54 guľôčok.

2. riešenie (rovnicou). Označme si počet guľôčok chlapcov od najstaršieho a, b, c, d. Potom zo zadania úlohy zrejme platí:

$$c = \frac{d}{2} + 5 = \frac{d + 10}{2} = \frac{1}{2}(d + 10)$$

$$b = \frac{c + d}{2} + 5 = \frac{\frac{d+10}{2} + d + 10}{2} = \frac{3d + 30}{4} = \frac{3}{4}(d + 10)$$

$$a = \frac{b + c + d + 10}{2} = \frac{\frac{3d+30}{4} + \frac{d+10}{2} + d + 10}{2} =$$

$$= \frac{3d + 30 + 2d + 20 + 4d + 40}{8} = \frac{9d + 90}{8} = \frac{9}{8}(d + 10)$$

Potom zo zadania: $a + b + c + d = 206$, teda

$$\frac{9}{8}(d + 10) + \frac{3}{4}(d + 10) + \frac{1}{2}(d + 10) + d = 206$$

$$\frac{(9 + 6 + 4) \cdot (d + 10)}{8} + d = 206$$

$$\frac{19}{8}d + d + \frac{190}{8} = 206$$

$$\frac{27}{8}d = \frac{1\,648 - 190}{8}$$

$$d = 54$$

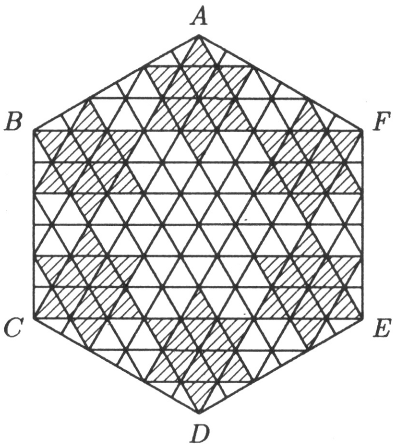
Z toho $c = 32$, $b = 48$, $a = 72$.

Pomocné úlohy

Úlohy Z5-I-5, Z4-I-4, Z6-II-1.

Riešenie úlohy Z6–I–5 (str. 71)

Celý šesťuholník aj s hviezdami je možné rozdeliť na zhodné rovnostranné trojuholníčky veľkosti cípu hviezdy, prípadne ich polovice (obr. 38). Potom z obrázku ľahko zistíme, že v šesťuholníku je práve 162 trojuholníčkov a v ozdobe je práve 72 trojuholníčkov. Teda na odpad zostáva $162 - 72 = 90$ trojuholníčkov. Z toho už zistíme, že odpad je $\frac{90}{162} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ celého šesťuholníka.



Obr. 38

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj počítaním obsahov, čo je však oveľa obtiažnejšie a aj neprimerané vedomostiam šestiaka.

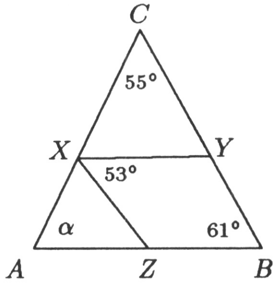
Pomocné úlohy

1. Akú časť šesťuholníka $ABCDEF$ tvorí trojuholník ABC?

2. Akú časť šesťuholníka $ABCDEF$ tvorí trojuholník ACE?

3. Akú časť šesťuholníka $ABCDEF$ tvorí zjednotenie trojuholníkov ACE a BDF?

Riešenie úlohy Z6–I–6 (str. 71)



Obr. 39

Z trojuholníka ABC (obr. 39) vypočítame uhol $\alpha = 180° - (61° + 55°) = 64°$. Z rovnoramenného trojuholníka AXZ vypočítame veľkosť uhla AZX, $|\sphericalangle AZX| = 180° - 2 \cdot 64° = 52°$. Potom veľkosť uhla CXY $|\sphericalangle CXY| = 180° - \alpha - |\sphericalangle ZXY| = 180° - 64° - 53° = 63°$. Ak by boli priamky AB, XY rovnobežné, potom by museli byť uhly

BAC a YXC rovnako veľké. Ako sme spočítali, $|\sphericalangle BAC| = \alpha = 64°$, avšak $|\sphericalangle YXC| = 63°$. Teda priamky AB a XY nie sú rovnobežné.

Podobne priamky BC, XZ nie sú rovnobežné, pretože $|\sphericalangle AZX| = 52°$ a $|\sphericalangle ABC| = 61°$.

Pomocná úloha

V lichobežníku $ABCD$ je na základni AB zvolený bod X. Pre veľkosti uhlov platí: $|\sphericalangle BAD| = 64°$, $|\sphericalangle ABC| = 56°$, $|\sphericalangle DXC| = 57°$. Zistite, či sú priamky DX a CX rovnobežné s niektorým ramenom lichobežníka $ABCD$.

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z6–II–1 (str. 72)

1. riešenie (úsudkom). Súčet všetkých uhlov trojuholníka je 180°. Ak by sme k najväčšiemu uhlu pripočítali 4°, tak súčet by bol 184°a pritom takto zväčšený uhol by mal takú istú veľkosť ako súčet veľkostí zvyšných dvoch. Teda takto zväčšený uhol by mal veľkosť $184° : 2 = 92°$. Ale najväčší uhol je o 4° menší, teda má veľkosť 88°.

Najmenší uhol je štyrikrát menší ako súčet ostatných dvoch, teda tvorí pätinu celého súčtu, čo je $180° : 5 = 36°$.

Potom stredný uhol bude mať veľkosť $180° - 88° - 36° = 56°$.

Skúška: $56 + 32 = 92$, čo je o 4 viac ako 88. Najväčší uhol je o 4 menší ako súčet ostatných dvoch.

$88 + 56 = 144$; $144 : 4 = 36$ — najmenší uhol je štvrtina súčtu ostatných dvoch.

Uhly v danom trojuholníku majú veľkosti 88°, 56°, 36°.

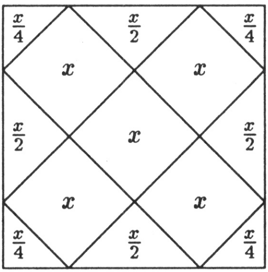
2. riešenie (rovnicou). Zvoľme $\alpha > \beta > \gamma$. Potom

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \gamma - 4 \\ \gamma &= \frac{\alpha + \beta}{4} \\ \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \end{aligned}$$

Z toho $\alpha = 88^\circ$, $\beta = 56^\circ$, $\gamma = 36^\circ$.

Riešenie úlohy Z6–II–2 (str. 72)

Označme obsah štvorčeka „kríža“ x. Potom obsahy trojuholníkov odpadu sú $\frac{x}{2}$ a $\frac{x}{4}$ (obr. 40).



Obr. 40

Teda platí:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \cdot \frac{x}{4} &= 48 \\
3x &= 48 \\
x &= 16
\end{aligned}
$$

Teda obsah "kríža" je $5 \cdot 16\,\text{cm}^2 = 80\,\text{cm}^2$ a potom obsah celého štvorca je $80\,\text{cm}^2 + 48\,\text{cm}^2 = 128\,\text{cm}^2$.

Riešenie úlohy Z6–II–3 (str. 72)

Aby bol výsledok deliteľný 12, musí byť dané číslo násobkom 3 a 4. Posledne dvojčíslie musí byt deliteľné 4, teda na konci musí byť 72, alebo 76 a ciferný súčet musí byť deliteľný 3. Z toho na mieste stoviek bude 3, 6, 9 alebo 2, 5, 8. Môžu to byť čísla 57 372, 57 672, 57 972, 57 276, 57 576, 57 876.