

40. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z8

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor): 40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 23–54.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

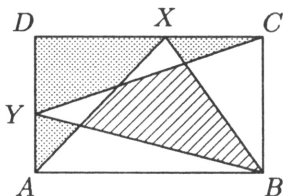
(Řešení úloh na str. 29)

Z8 - I - 1

Ve třídě je méně než 50 dětí. Chlapců je 72 % z počtu děvčat. Kolik dětí je ve třídě?

Z8 - I - 2

V obdélníku $ABCD$ jsme zvolili na straně CD bod X a na straně AD bod Y . Pak jsme sestrojili úsečky AX, BX, BY a CY (obr. 1). Zjistěte, co je větší: obsah vyšrafované části, nebo součet obsahů vytečkovaných částí.



Obr. 1

Z8 – I – 3

Sečteme-li největší společný dělitel a nejmenší společný násobek dvou neznámých čísel, dostaneme výsledek 121. Která jsou to čísla? Určete všechny možnosti.

Z8 – I – 4

Narýsujte různoběžky a, b , které svírají úhel velikosti 45° . Najděte množinu všech bodů X , jejichž součet vzdáleností od přímk a, b se rovná 3 cm. Množinu narýsujte a dokažte, že každý bod narýsované množiny má uvedenou vlastnost.

Z8 – I – 5

Máme 10 kartiček a na každou napíšeme dvě čísla, jedno na jednu stranu, druhé na druhou stranu. Jsou to čísla

47 a 98, 113 a 30, 107 a 35, 78 a 65, 84 a 68,
130 a 10, 91 a 50, 71 a 73, 21 a 123, 100 a 42.

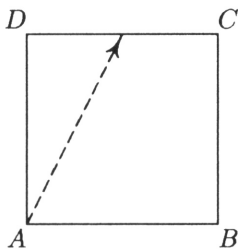
Položte je na prázdná místa (obr. 2) tak, abyste dostali co nejmenší výsledek. Výsledek zdůvodněte.

$$\square + \square + \square + \square + \square - \square - \square - \square - \square - \square$$

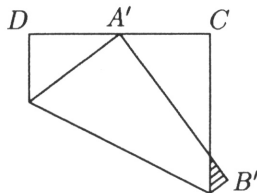
Obr. 2

Z8 – I – 6

Čtverec $ABCD$ o straně 8 cm byl přeložen tak, že vrchol A se přemístil do středu strany CD (obr. 3a, b). Zjistěte obsah vyšrafovaného trojúhelníku.



Obr. 3a



Obr. 3b

ÚLOHY II. KOLA

Řádný termín 13. 2. 1991

(Řešení úloh na str. 41)

Z8 – II – 1

Z papíru jsme vystřihli obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm. Přeložíme ho tak, aby se vrchol A kryl s vrcholem C . Vypočítejte délku úsečky, která vznikne přehnutím papíru. Své řešení zdůvodněte.

Z8 – II – 2

Součin nejmenšího společného násobku dvou přirozených čísel a , b s jejich největším společným dělitelem je 693. Najděte všechna taková čísla a , b .

Z8 – II – 3

Je dán kosočtverec $ABCD$ s úhlem velikosti 60° při vrcholu C a se středem S . Bod X je střed strany AD , bod Y je střed úsečky SC . Vypočítejte obsah trojúhelníku XYB .

Z8 – II – 4

V táboře se 10 chlapců rozhodlo hrát nohejbal. Kolika způsoby je možno je rozdělit do dvou družstev po pěti hráčích, jestliže Matěj chce hrát s Kubou a Jožka nechce hrát s Ondřejem. (Všichni chlapci mají různá jména.)

ÚLOHY II. KOLA

Náhradní termín 20. 2. 1991

(Řešení úloh na str. 46)

Z8 – II – 1

Z papíru jsme vystřihli obdélník $ABCD$ se stranami $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm. Přeložme ho tak, aby se vrchol A kryl se středem S obdélníku $ABCD$. Vypočítejte délku úsečky, která vznikne přehnutím papíru. Své řešení zdůvodněte.

Z8 – II – 2

Určete počet dvojic trojčiferných přirozených čísel, pro něž podíl nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele je 342. (Dvojice čísel a, b a b, a přitom nerozlišujeme.)

Z8 – II – 3

Je dán kosočtverec $ABCD$ s úhlem velikosti 60° při vrcholu C a se středem S . Vypočtete obsah trojúhelníku BT_1T_2 , kde T_1 a T_2 jsou těžiště trojúhelníků ASD a DSC .

Z8 – II – 4

V táboře se deset chlapců rozhodlo hrát nohejbal. Kolika způsoby je možno je rozdělit do dvou družstev po pěti hráčích, jestliže Matěj chce hrát s Kubou a Jožka nechce hrát s Ondřejem. (Všichni chlapci mají různá jména.)

ÚLOHY III. KOLA

(Řešení úloh na str. 52)

Z8 – III – 1

Honza dostal za úkol vynásobit dvě dvojciferná čísla. Špatně si však opsal příklad – v jednom z čísel si přeho-

díl pořadí cifer. Tím dostal výsledek o 3 816 větší než měl být. Jaký byl správný výsledek?

Z8 – III – 2

Ve vsi jsou koně, kozy a krávy. Koní je 13%. Krav je osmkrát víc než koz. Určete nejmenší možný počet koní, krav a koz.

Z8 – III – 3

Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c takové, že největší společný dělitel čísel a, b je 3, čísel b, c je 4 a čísel a, c je 5 a nejmenší společný násobek všech tří čísel je 1 800.

Z8 – III – 4

Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s rameny délky 10 cm. Určete a narýsujte množinu všech bodů trojúhelníku, které mají od jeho stran součet vzdáleností: a) 10 cm, b) 9 cm. Dokažte, že každý narýsovaný bod má uvedenou vlastnost.

ŘEŠENÍ ÚLOH I. KOLA

Řešení úlohy Z8-I-1 (str. 23)

Počet dívek označíme d . Chlapců je 72 % z počtu dívek, tzn. $0,72 \cdot d$. Dívek i chlapců je dohromady $1,72 \cdot d$. Přitom je $1,72 \cdot d < 50$.

Číslo $1,72d$ musí být celé. Upravíme $1,72$ na zlomek:

$$1,72d = \frac{172}{100}d = \frac{43}{25}d$$

Odtud vidíme, že d musí být násobek 25. Dívek musí být méně než 50, proto je $d = 25$.

Odpověď. Ve třídě jsou 43 děti. Dívek je 25 a chlapců 18, což je skutečně 72 % z počtu dívek.

Poznámka. Další úlohy o procentech z MO lze najít v publikaci: Vyšín, J. – Macháček, V. – Mída, J.: Vybrané úlohy z MO — kategorie Z, SPN Praha, 1982 (2. vydání), úlohy 62 – 68, str. 99 až 112.

Řešení úlohy Z8-I-2 (str. 23)

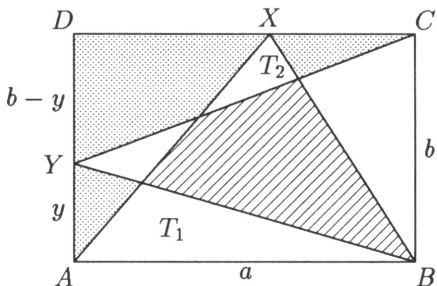
1. *způsob.* Součet obsahů tečkovaných částí (obr. 4) je:

$$\begin{aligned} S_{ABY} + S_{YCD} - (T_1 + T_2) &= \\ &= \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}a(b-y) - (T_1 + T_2) = \frac{1}{2}ab - (T_1 + T_2) \end{aligned}$$

Obsah šrafované části se rovná:

$$S_{ABX} - (T_1 + T_2) = \frac{1}{2}ab - (T_1 + T_2)$$

Dostáváme výsledek: Šrafované i tečkované části mají stejný obsah.

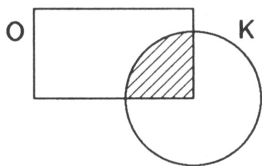


Obr. 4

2. způsob. Hlavní myšlenka řešení vychází ze známého vztahu mezi obsahy sjednocení a průniku dvou útvarů, viz obrázek 5. Například obsah sjednocení útvarů O a K je roven

$$S(O \cup K) = S(O) + S(K) - S(O \cap K),$$

tj. součtu obsahů útvarů O a K zmenšenému o obsah jejich průniku $O \cap K$.



Obr. 5

Provedeme vlastní řešení. Označme po řadě S a P obsahy sjednocení a průniku trojúhelníků ABX a BCY . Potom platí:

$$S = S_{ABX} + S_{BCY} - P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab - P$$

Tedy obsah šrafované části je:

$$P = ab - S$$

Ale stejný obsah má i tečkovaná část.

Poznámka. Obdobná úloha se vyskytla i v 37. ročníku MO (1987/88). Viz Koman, M. – Repáš, V.: 37. ročník MO na ZŠ, SPN Praha, 1990, úloha Z8–I–2, str. 94 – 96.

Řešení úlohy Z8–I–3 (str. 24)

Hledaná čísla a , b zapíšeme ve tvaru

$$a = a_1D, \quad b = b_1D,$$

kde D je největší společný dělitel čísel a , b . Činitelé a_1 , b_1 jsou tedy nesoudělná čísla, mají společného dělitele pouze číslo 1. Potom nejmenší společný násobek a , b je $n = a_1b_1D$.¹⁾ Podle zadání je:

$$D + n = D + a_1b_1D = D(1 + a_1b_1) = 121 = 11^2$$

¹⁾ To plyne ze známé rovnosti $a \cdot b = n \cdot D$. Tuto rovnost lze snadno dokázat rozložením čísel a , b na prvočinitele. Pro lepší názornost si to můžete ověřit na konkrétním příkladu, např. $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $b = 3 \cdot 5^3 \cdot 7$, $D = 3 \cdot 5^2$, $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$.

Pro největší společný dělitel D jsou tedy tři možnosti:

$$D = 1, \quad D = 11, \quad D = 121$$

a) Je-li $D = 1$, potom $a_1 b_1 = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Protože čísla a_1, b_1 jsou nesoudělná, dostáváme pro a, b ($a = a_1, b = b_1$, neboť $D = 1$) tyto možnosti:

$$1, 120 \quad 8, 15 \quad 3, 40 \quad 5, 24$$

b) Je-li $D = 11$, potom $a_1 b_1 = 10 = 2 \cdot 5$. Pro čísla a_1, b_1 , která jsou nesoudělná, máme dvě možnosti 1, 10 a 2, 5. Odtud dostaneme další dvě řešení

$$11, 110 \quad 22, 55,$$

neboť $a = a_1 \cdot D = 11 \cdot a_1$ a $b = b_1 \cdot D = 11 \cdot b_1$.

c) Je-li $D = 121$, potom je $a_1 b_1 = 0$. Ale to není možné.

Odověď. Existuje 6 dvojic čísel požadované vlastnosti.

Jsou to:

$$1, 120 \quad 8, 15 \quad 3, 40 \quad 5, 24 \quad 11, 110 \quad 22, 55$$

Poznámka. Další úlohy k řešení. Najděte všechna čísla a, b , pro která platí:

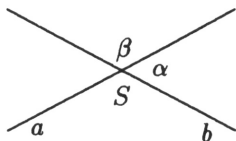
a) $D(a, b) = 24, \quad n(a, b) = 2\,520$

b) $D(a, b) = 24, \quad n(a, b) = 1\,260$

Mají obě úlohy řešení?

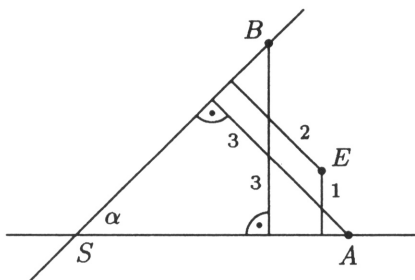
Řešení úlohy Z8-I-4 (str. 24)

Narýsujme různoběžky a, b (obr. 6). Vzhledem k souměrnosti podle středu S (průsečík a, b) stačí vyšetřit jen úhly α, β .



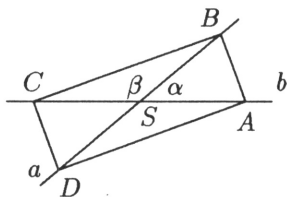
Obr. 6

Začneme s úhlem α . Nejdříve najdeme hledané body na ramenech úhlu α . Jsou to body A, B , které mají vždy od jedné z přímek a, b vzdálenost $v = 3 \text{ cm}$ (a leží na druhé přímce). Oba body A, B mají od bodu S zřejmě stejnou vzdálenost (obr. 7).



Obr. 7

Dále najdeme další body. Rozdělíme v na dvě části $v = v_1 + v_2$ a sestrojíme body, které mají od jedné přímky vzdálenost v_1 a od druhé vzdálenost v_2 . Jako příklad je na obrázku 7 vyznačen bod E . Na základě několika dalších pokusů (provedte sami), dojdeme k domněnce, že hledaná množina – omezíme-li se na úhel α – má tvar úsečky AB (obr. 8).



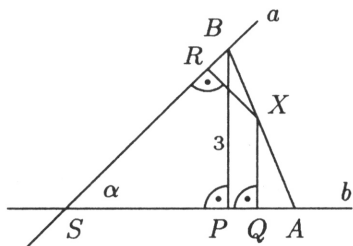
Obr. 8

Podobným způsobem dojdeme k domněnce, že v úhlu β má hledaná množina tvar úsečky BC (obr. 8).

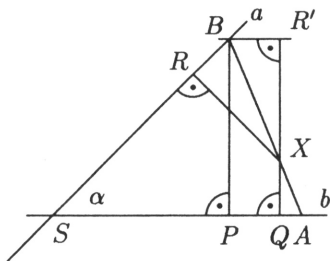
Celá množina se skládá ze čtyř stran obdélníku $ABCD$ (obr. 8).

Zbývá dokázat správnost této domněnky. Důkaz lze provést různými způsoby. Naznačíme dva. V obou případech se však omezíme jen na část důkazu pro kratší strany obdélníku $ABCD$. Zbývající část přenecháme našim čtenářům.

1. *způsob* (pomocí podobnosti, obr. 9). Ukážeme, že každý bod X úsečky AB má součet vzdáleností od přímk a, b roven $v = 3$ cm. Přitom víme, že B má od přímky b vzdálenost 3 cm a podobně bod A má vzdálenost 3 cm od přímky a .



Obr. 9



Obr. 10

Trojúhelníky AXQ , BXR a ABP jsou podobné podle věty (uu). Proto je:

$$|XQ| : |AX| = |XR| : |BX| = |BP| : |AB| = 3 : |AB|$$

Odtud vypočítáme:

$$|XQ| = \frac{3 \cdot |AX|}{|AB|} \qquad |XR| = \frac{3 \cdot |BX|}{|AB|}$$

Sečtením dostaneme:

$$|XQ| + |XR| = \frac{3}{|AB|}(|AX| + |BX|) = \frac{3}{|AB|} \cdot |AB| = 3$$

Když naopak bod X neleží na úsečce AB , ale je v úhlu α , nemůže mít tento bod součet vzdáleností od přímek a , b rovný 3 cm. Důkaz zde nebudeme provádět. Snadno ho uděláte sami. Stačí tímto bodem vést rovnoběžku s AB , jejíž průsečíky s rameny úhlu označíme A' a B' a postupujeme dále stejně jako pro body na úsečce AB .

2. *způsob* (užitím osově souměrnosti, obr. 10). Nechť bod X leží na úsečce AB . Použijeme osově souměrnosti s osou v přímce AB . Při tomto zobrazení přejde

$$RX \longrightarrow R'X.$$

Snadno zjistíme, že bod R' leží na přímce QX , a proto je:

$$|QX| + |XR| = |QX| + |XR'| = |QR'|$$

Protože je úhel RBX shodný s úhlem $R'BX$ i s úhlem QAB , snadno zjistíme (pomocí střídavých úhlů), že PQ je rovnoběžná s BR' . Proto je $PQR'B$ obdélník. Takže:

$$|QR'| = |BP| = 3 \text{ cm}$$

Opět dostáváme, že součet vzdáleností X od přímek a , b je roven 3 cm.

Druhá část důkazu je stejná jako při prvním způsobu řešení.

3. *způsob*. První část důkazu můžeme řešit i pomocí obsahů trojúhelníků tak, že obsah trojúhelníku SAB (obr. 9) vyjádříme jako součet obsahů trojúhelníků SAX a SBX :

$$\frac{1}{2} \cdot |SA| \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot |SA| \cdot |QX| = \frac{1}{2} \cdot |SB| \cdot |RX|$$

Odtud opět dostaneme:

$$3 = |QX| + |RX|$$

Poznámka. Od řešitelů se v soutěži druhá část důkazu nepožadovala. Naším čtenářům můžeme doporučit, aby řešili úlohu pro případ, že přímky svírají úhly a) 90° , b) 60° . Pro mnohé čtenáře může být zajímavý a zároveň překvapující výsledek, když v podmínce úlohy zaměníme součet vzdáleností za rozdíl vzdáleností.

Řešení úlohy Z8–I–5 (str. 24)

Také tuto úlohu můžeme řešit různými způsoby. Ukážeme dva.

1. *způsob*. Zvolíme 2 kartičky. Na první označme menší číslo a , větší číslo A . Podobně označíme čísla na druhé kartičce b , B . Porovnáme rozdíly, dáme-li před jednu kartičku $+$ a před druhou $-$. Nejmenší rozdíl může vzniknout jedině tak, že na první kartičce bude navrchu menší z obou čísel a a na druhé kartičce bude navrchu větší z obou čísel.

To znamená, že nejmenší číslo dostaneme jedním z těchto způsobů:

$$\boxed{a} - \boxed{B} \quad \text{nebo} \quad \boxed{b} - \boxed{A}$$

Porovnáme tyto rozdíly. Aby byl první rozdíl menší, musí být

$$\boxed{a} - \boxed{B} < \boxed{b} - \boxed{A},$$

to znamená

$$\boxed{a} + \boxed{A} < \boxed{b} + \boxed{B}.$$

Vidíme, že před kartičkou, která má součet čísel na obou stranách menší, dáme znaménko + a před druhou kartičku znaménko -.

Po této úvaze můžeme dostat řešení tímto postupem.

1. Sečteme obě čísla na všech kartičkách. Dostaneme postupně čísla

$$\begin{array}{cccccc} 145, & \underline{143}, & \underline{142}, & 143, & 152, & \\ \underline{140}, & \underline{141}, & 144, & 144, & \underline{142}. & \end{array}$$

2. Vezměme pět kartiček, pro které jsme dostali nejmenší součty. Například kartičky, pro jejichž součty čísel na obou stranách dostaneme podtržená čísla. Ty položíme na prvních pět míst menším číslem navrch (bude před nimi znaménko +). Zbylé dáme na posledních pět míst (bude před nimi znaménko -).

Tím dostaneme řešení:

$$\boxed{10} + \boxed{50} + \boxed{35} + \boxed{42} + \boxed{30} - \boxed{78} - \boxed{73} - \boxed{123} - \boxed{98} - \boxed{84}$$

Výsledek, tj. nejmenší možné číslo, je $v = -289$.

2. *způsob*. Tento způsob je zajímavý tím, že budeme řešit obecnější úlohu. Budeme zkoumat všechny případy, kdy před žádnou kartičkou není znaménko – a pak případy, že jsou před kartičkami 1, 2, 3, ... znaménka –. Výhodou je, že začneme jednodušší úlohou, než je zadaná úloha. K naší úloze se pak dostaneme postupně.

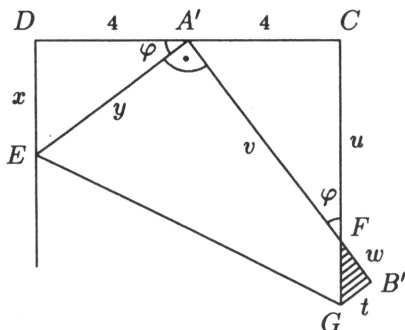
Vlastní řešení. Položíme na stůl všechny kartičky menším číslem navrch a před všechny dáme znaménko +. V prvním případě (všechna znaménka +) dostaneme zřejmě nejmenší možný výsledek. Co se nyní stane, když před jednu kartičku dáme znaménko – a porovnáme výsledky bez otočení a s otočením této kartičky? V obou případech se výsledek zmenší. V prvním případě se výsledek zmenší o dvojnásobek menšího z obou čísel na kartičce, ve druhém případě se zmenší o součet obou čísel, tedy zmenší se více. Chceme-li tedy najít nejmenší možný výsledek s jedinou kartou, před níž je znaménko minus, uděláme toto minus před kartičkou, na které je největší součet obou čísel a zároveň kartičku otočíme.

V dalších krocích otočíme postupně vždy tu kartičku, před kterou je znaménko + a přitom součet čísel na obou stranách je co největší. Po otočení kartičky změním znaménko + na –.

Poznámka. Jistě si sami snadno vyřešíte. obměnu úlohy Z8–II–5, kde podmínku nejmenšího výsledku nahradíme podmínkou největšího výsledku. Můžete řešit i úlohu s podmínkou, že výsledek má co nejmenší absolutní hodnotu.

Řešení úlohy Z8-I-6 (str. 24)

K výpočtu použijeme obrázek 11, kde jsou označeny všechny délky, které budeme potřebovat.



Obr. 11

Snadno zjistíte, že úhly $DA'E$ a CFA' jsou shodné. Proto všechny tři pravoúhlé trojúhelníky $DA'E$, CFA' a $B'FG$ jsou podobné. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník $DA'E$ platí:

$$y^2 = 16 + x^2$$

Protože $x + y = 8$, neboli $y = 8 - x$, snadno vypočteme $x = 3$ cm, $y = 5$ cm. Nyní z podobnosti trojúhelníků CFA' a $DA'E$ plyne:

$$u : 4 : v = 4 : x : y = 4 : 3 : 5$$

Odtud vypočítáme $u = \frac{16}{3}$ cm a $v = \frac{20}{3}$ cm. Protože $|A'B'| = 8$ cm, dostaneme:

$$t : w = 4 : u \quad \text{neboli} \quad t : \frac{4}{3} = 4 : \frac{16}{3}$$

Odtud máme:

$$t = 1 \text{ cm}$$

Proto obsah šrafovaného trojúhelníku je:

$$S = \frac{1}{2} t \cdot w = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

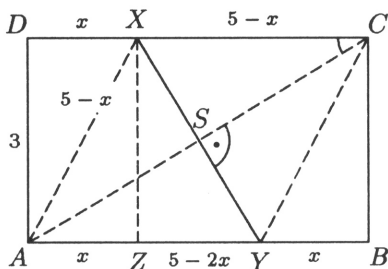
Pomocná úloha. Obdélník o stranách $a = 8 \text{ cm}$, $v = 10 \text{ cm}$ přeložíme podél jedné úhlopříčky. Vypočítejte obsah překrývajících se i nepřekrývajících se částí.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Řádný termín 13. 2. 1991

Řešení úlohy Z8-II-1 (str. 25)

Přehyb je úsečka XY (obr. 12), která je kolmá k úhlopříčce AC a prochází jejím středem S .



Obr. 12

Při přehybu splyne úsečka AX s úsečkou CX a podobně úsečka AY s úsečkou CY . Bod S je zřejmě středem úsečky XY , proto je čtyřúhelník $AYCX$ kosočtverec.

$$|AY| = |YC| = |CX| = |XA| = 5 - x$$

Dále můžeme postupovat různými způsoby; uvedeme dva.

1. způsob (užitím Pythagorovy věty). Z pravoúhlého trojúhelníku ADX dostaneme

$$3^2 + x^2 = (5 - x)^2,$$

odkud vypočítáme $x = 1,6$ cm.

Délku úsečky XY vypočítáme z pravouhlého trojúhelníku ZXY , jehož odvěsny mají délky 3 a $5 - 2x = 1,8$.

$$|XY|^2 = 3^2 + (5 - 2x)^2$$

$$|XY|^2 = 3^2 + 1,8^2$$

Odtud zjistíme $|XY| = \sqrt{12,24} \doteq 3,5$ (cm).

2. způsob (užitím podobnosti trojúhelníků). Pravoúhlé trojúhelníky ACD a XCS mají společný úhel při vrcholu C . Jsou proto podobné podle věty (uu). Proto je:

$$|XS| : |SC| = |AD| : |DC| = 3 : 5$$

Délka úsečky SC je rovna polovině úhlopříčky AC , její délku zjistíme podle Pythagorovy věty: $|AC| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Proto máme:

$$|XS| : \frac{\sqrt{34}}{2} = 3 : 5$$

neboli:

$$|XS| = 0,3\sqrt{34}$$

Délka celé úsečky $|XY|$ je dvojnásobná:

$$|XY| = 0,6\sqrt{34} \doteq 3,5 \text{ (cm)}$$

Došli jsme ke stejnému výsledku.

Řešení úlohy Z8-II-2 (str. 25)

1. způsob (s použitím rovnosti $a \cdot b = n \cdot D$, kde n je nejmenší společný násobek a, b a D největší společný dělitel a, b).

Protože

$$a \cdot b = n \cdot D = 693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11,$$

mohou nastat pouze následující případy:

a	1	3	7	9	11	21	33	63	77	99	231	693
b	693	231	99	77	63	33	21	11	9	7	3	1

Je třeba ověřit, že pro tato čísla je součin $n \cdot D$ skutečně roven 693. Stačí samozřejmě ověřit jen polovinu této tabulky. (Ověřte sami.)

2. způsob (s použitím rozkladu na součiny $a = a_1 \cdot D$, $b = b_1 \cdot D$, kde D je největší společný dělitel a, b a činitele a_1 a b_1 jsou nesoudělná čísla). Protože $n = a_1 b_1 D$, můžeme součin $n \cdot D$ nyní zapsat:

$$n \cdot D = a_1 b_1 D \cdot D = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Odtud můžeme sestavit tabulku:

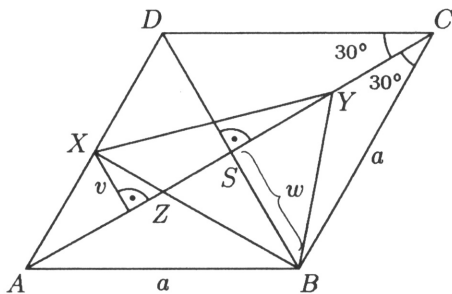
D	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3
a_1	9	77	7	99	11	63	1	693	1	77	7	11
b_1	77	9	99	7	63	11	693	1	77	1	11	7
a	9	77	7	99	11	63	1	693	3	231	21	33
b	77	9	99	7	63	11	693	1	231	3	33	21

Dostali jsme stejný výsledek jako při 1. způsobu. Je tedy celkem 6 dvojic hledaných čísel a, b (na pořadí nezáleží):

1, 693 3, 231 7, 99 9, 77 11, 63 21, 33

Řešení úlohy Z8-II-3 (str. 26)

Situaci znázorňuje obrázek 13. Obsah trojúhelníku XYB vypočítáme jako součet obsahů trojúhelníků ZXY a ZYB .



Obr. 13

Bod Z je těžištěm trojúhelníku ABD , proto je $|ZS| = \frac{1}{3}|AS|$. Oba trojúhelníky ABD a BDC jsou rovnostranné, neboť jejich shodné strany svírají úhel velikosti 60° . Úhlopříčka BD kosočtverce $ABCD$ má tedy délku a a její polovina $BS = w = \frac{1}{2}a$. Pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku ABS vypočítáme:

$$|AS| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

Odtud vypočítáme:

$$|ZS| = \frac{1}{6}a\sqrt{3}, \quad |SY| = \frac{1}{4}a\sqrt{3}$$

Sečtením dostaneme:

$$|ZY| = \frac{5}{12}a\sqrt{3}$$

Výška v trojúhelníku ZYX je rovna střední příčce trojúhelníku ASD (rovnoběžné s DS), a proto je $v = \frac{1}{4}a$. Můžeme tedy vypočítat obsahy obou trojúhelníků ZYX a ZYB :

$$S_{ZYX} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}a = \frac{5}{96}a^2\sqrt{3}$$

$$S_{ZYB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{5}{48}a^2\sqrt{3}$$

Sečtením a po úpravě vyjde:

$$S_{XYB} = \frac{5}{32}a^2\sqrt{3}$$

Snadno se přesvědčíte, že to je $\frac{5}{16}$ z obsahu daného kosočtverce $ABCD$.

Řešení úlohy Z8-II-4 (str. 26)

Budeme vytvářet jedno družstvo, například to, ve kterém bude hrát Matěj s Kubou. K nim musíme přidat tři chlapce. Jedním z nich je Jožka, anebo Ondřej (ale ne oba současně). Jsou tedy možnosti:

$$M K J \dots \quad M K O \dots$$

Poslední dva chlapce musíme vybrat ze zbývajících šesti chlapců. To můžeme udělat 15 způsoby. Což zjistíme buď výčtem všech možností, nebo jako počet dvojprvkových kombinací vybraných ze 6 prvků, tj. $\binom{6}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$. Celkem je dvakrát 15 možností, tj. dohromady 30 možností.

ŘEŠENÍ ÚLOH II. KOLA

Náhradní termín 20. 2. 1991

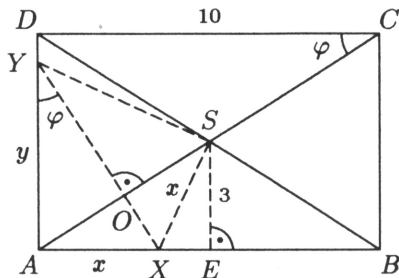
Řešení úlohy Z8-II-1 (str. 26)

Situaci znázorňuje obrázek 14. Přehybem je úsečka XY , která je kolmá k úsečce AS a prochází jejím středem. (Přímka XY je osa úsečky AS .) Proto je $|AX| = |XS| = x$.

Pravoúhlý trojúhelník EXS má délky odvěsen 3 a $5 - x$ a délku přepony x . Podle Pythagorovy věty je

$$3^2 + (5 - x)^2 = x^2,$$

odkud vypočítáme $x = 3,4$.



Obr. 14

Úhly AYX a DCA jsou shodné, neboť jsou oba ostré a jejich ramena jsou navzájem kolmá. Proto jsou trojúhelníky AYX a DCA podobné podle věty (uu). Takže můžeme napsat:

$$y : x = 10 : 6$$

Po dosazení za x vypočítáme $y = \frac{17}{3}$.

Tento dílčí výsledek potvrzuje správnost našeho obrázku, tj. že bod Y leží mezi body A , D . Nyní již pomocí Pythagorovy věty vypočítáme délku úsečky XY :

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3,4^2 + \left(\frac{17}{3}\right)^2} \doteq 6,6 \text{ (cm)}$$

Poznámka. Vyřešte sami úlohu, která je obměnou úlohy Z8-II-1. Obdélník $ABCD$ má pevnou délku strany AB rovnou 10 cm a proměnlivou délku strany BC . Zjistěte, kdy úsečka přehybu má krajní bod Y v bodě D a kdy na straně DC . Délku úsečky XY vypočítejte v závislosti na délce BC .

Řešení úlohy Z8-II-2 (str. 27)

Čísla a , b rozložíme na součiny tvaru

$$a = x \cdot D, \quad b = y \cdot D, \quad (\text{R})$$

kde D je největší společný dělitel čísel a , b a čísla x , y jsou nesoudělná. Potom můžeme nejmenší společný násobek n čísel a , b zapsat ve tvaru $a = xyD$.

Podle předpokladu je $n : D = 342$. Odtud dostaneme:

$$n : D = xyD : D = xy = 342$$

Rozložíme číslo 342 na součin prvočísel:

$$342 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$$

Pro nesoudělná čísla x , y máme tedy možnosti:

$$1, 342 \quad 2, 171 \quad 9, 38 \quad 18, 19$$

(Rozklady čísla 342 na součiny $3 \cdot 114$ a $6 \cdot 57$ nevyhovují, neboť činitele nejsou nesoudělní.) Nyní budeme počítat a , b z rovností (R), kde se za D budeme snažit volit taková čísla, abychom dostali trojciferná čísla a , b . Z toho je vidět,

že první dvě možnosti pro x , y , tj. 1, 342 a 2, 171 nemohou vyhovovat. Nelze zvolit D tak, aby a , b byla současně trojčiferná čísla. Uvažujeme dvojici $x = 9$, $y = 38$. Aby byly součiny $xD = 9D$ a $yD = 38D$ současně trojčiferná čísla, musí být:

$$99 < 9D < 1000 \quad 99 < 38D < 1000$$

To znamená:

$$11 < D < 111,1 \quad 2,6 < D < 26,3$$

Těmto nerovnostem vyhovují současně čísla $D = 12, 13, \dots, \dots, 26$, tj. celkem 15 čísel. Z nich dostaneme čísla a , b .

108, 456	153, 646	198, 836
117, 494	162, 684	207, 874
126, 532	171, 722	216, 912
135, 570	180, 760	225, 950
144, 608	189, 798	234, 988

Nakonec uvažujeme dvojici $x = 18$, $y = 19$. Podobně jako výše dostaneme nerovnosti:

$$99 < 18 \cdot D < 1000 \quad 99 < 19 \cdot D < 1000$$

$$5,5 < D < 55,5 \quad 5,2 < D < 52,6$$

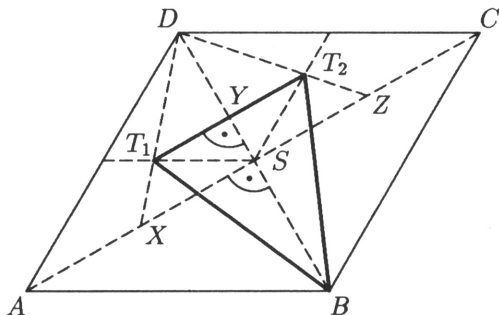
Těmto nerovnostem vyhovují čísla $D = 6, 7, \dots, 52$, tj. celkem 47 čísel. Z nich dostaneme 47 možností pro čísla a , b . Uvedeme jen nejmenší a největší dvojici:

$$108, 936 \quad 936, 988$$

Úloha má celkem $47 + 15 = 62$ řešení.

Řešení úlohy Z8-II-3 (str. 27)

1. *způsob.* Situaci znázorňuje obrázek 15. Úsečka T_1T_2 je rovnoběžná s úsečkou XZ jak plyne ze stejnolehlosti se středem stejnolehlosti D a s koeficientem $\frac{2}{3}$. Protože je $ABCD$ kosočtverec, jsou úhlopříčky AC a BD navzájem kolmé. Odtud plyne i kolmost T_1T_2 a BY . V trojúhelníku T_1T_2B je tedy BY výška příslušná k T_1T_2 . K výpočtu obsahu trojúhelníku tedy stačí vypočítat délky T_1T_2 a BY .



Obr. 15

Ze stejnolehlosti se středem D a koeficientem $\frac{2}{3}$ plyne, že délka T_1T_2 se rovná $\frac{2}{3}$ délky XZ . Protože X, Z jsou po řadě středy úseček AS, SC , je délka XZ rovna polovině délky úhlopříčky AC . Odtud plyne:

$$|T_1T_2| = \frac{1}{3}|AC| = \frac{2}{3}|AS|$$

Délku AS vypočítáme snadno jako výšku rovnostranného trojúhelníku ABD . Je-li délka strany AB rovna a , je:

$$|AS| = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{a} \quad |T_1T_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Délka BY je rovna $\frac{2}{3}$ délky BD , tj. $\frac{2}{3}a$. Odtud vypočítáme obsah S trojúhelníku T_1T_2B :

$$S = \frac{1}{9}a^2\sqrt{3}.$$

2. způsob. Vypočítáme, jakou částí obsahu rovnoběžníku $ABCD$ je obsah trojúhelníku T_1T_2B . Tyto obsahy jsou ve stejném poměru jako obsahy trojúhelníků ABD a BYT_1 .

Strana BY je rovna $\frac{2}{3}$ délky strany BD . Výška T_1Y pravouhlého trojúhelníku BYT_1 je rovna $\frac{1}{3}$ výšky AS trojúhelníku ABD . Proto je obsah S trojúhelníku BT_1T_2 roven:

$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{ABD} = \frac{2}{9} S_{ABD}$$

Podobně je obsah trojúhelníku T_1T_2 roven $\frac{2}{9}$ obsahu rovnoběžníku $ABCD$.

Poznámka k úloze Z8-II-3. Z 2. způsobu řešení snadno vyplýne, že tvrzení uvedené v jeho závěru platí pro každý rovnoběžník, nikoli jen pro kosočtverec s úhlem při vrcholu A velikosti 60 stupňů. Doporučujeme vám, abyste si to sami podrobněji promysleli.

Řešení úlohy Z8-II-4 (str. 27)

Řešení neuvádíme, protože tato úloha je stejná s úlohou 4 na str. 24.

ŘEŠENÍ ÚLOH III. KOLA

Řešení úlohy Z8–III–1 (str. 27)

Honza měl počítat součin čísel A a B . Místo čísla $A = 10x + y$ vzal číslo $10y + x$.

Pro rozdíl výsledků platí:

$$3816 = (10y + x)B - (10x + y)B$$

Po úpravě:

$$8 \cdot 53 = (y - x)B$$

Protože číslo B je dvojciferné, dostáváme jedinou možnost $y - x = 8$, tj. $y = 9$, $x = 1$.

Správný výsledek měl být $19 \cdot 53 = 1007$. Honza však počítal $91 \cdot 53 = 4823$, což je opravdu o 3816 více než 1007.

Řešení úlohy Z8–III–2 (str. 28)

Poměr počtu koní k počtu koz a krav je $13 : 87$, přitom počet koz a krav dohromady musí být dělitelný devíti. Protože $13 : 87 = 13 : (3 \cdot 29) = (3 \cdot 13) : (9 \cdot 29)$, je nejmenší počet koní 39, koz 29 a krav $8 \cdot 29 = 232$.

Řešení rovnicí: Počet koní označme x , krav y a počet koz z . Pak:

$$x = \frac{13}{100}(x + y + z) = \frac{13}{100}(x + 9z)$$

Odtud $3 \cdot 29 \cdot x = 13 \cdot 9 \cdot z$, takže nejmenší možný počet koní je $x = 13 \cdot 3$, koz $z = 29$, krav $y = 8 \cdot 29$.

Řešení úlohy Z8-III-3 (str. 28)

1. Podle předpokladu je:

$$D(a, b) = 3, \text{ tzn. } a, b \text{ jsou násobky } 3;$$

$$D(b, c) = 4, \text{ tzn. } b, c \text{ jsou násobky } 4;$$

$$D(a, c) = 5, \text{ tzn. } a, c \text{ jsou násobky } 5;$$

2. Proto je $a = 3 \cdot 5 \cdot x$, $b = 3 \cdot 2^2 \cdot y$, $c = 2^2 \cdot 5 \cdot z$, zároveň x není násobek 2 (jinak by $D(a, b)$ byl násobek 2). Podobně zjistíme, že y není násobek 5 a z není násobek 3.

3. $n(a, b, c) = 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

4. Proto je x nebo y násobek 3, x nebo z násobek 5, y nebo z násobek 2. Jsou možnosti:

$(a = 3 \cdot 5 \cdot x)$	$x:$	3·5	3·5	5	1	1	3	3	5
$(b = 3 \cdot 2^2 \cdot y)$	$y:$	2	1	2·3	2·3	3	1	2	3
$(c = 2^2 \cdot 5 \cdot z)$	$z:$	1	2	1	5	2·5	2·5	5	2

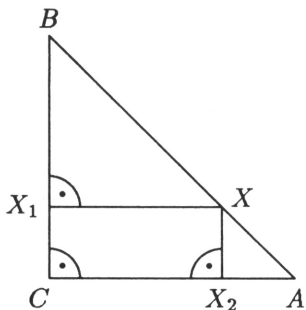
5. Pro čísla a, b, c jsou možnosti:

a	225	225	75	15	15	45	45	75
b	24	12	72	72	36	12	24	36
c	20	40	20	100	200	200	100	40

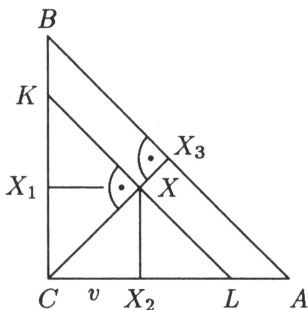
Úloha má tedy 8 řešení.

Řešení úlohy Z8-III-4 (str. 28)

a) Hledaná množina je přepona AB (obr. 16). Důkaz: $|XX_1| + |XX_2| + 0 = |BX_1| + |X_1C| = |BC|$ (plyne z rovnoramenných trojúhelníků).



Obr. 16



Obr. 17

b) Hledaná množina bude úsečka KL rovnoběžná s AB , neboť $|XX_1| + |XX_2| = |KC|$ a $|XX_3|$ se nemění. Určíme vzdálenost $|XX_3|$; stačí pro bod na výšce k přeponě AB (obr. 17):

$$\begin{aligned}
 |XX_1| + |XX_2| + |XX_3| &= 2v + |CX_3| - v\sqrt{2} = \\
 &= 2v + 5\sqrt{2} - v\sqrt{2} = v(2 - \sqrt{2}) + 5\sqrt{2} = 9
 \end{aligned}$$

Odtud vypočteme:

$$v = \frac{9 - 5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \doteq 3,3$$

Pro body K, L tedy platí: $|KC| = |LC| = 2v \doteq 6,6$.