39. ročník matematické olympiády na základních školách

Příloha

In: Milan Koman (editor); Vladimír Repáš (editor): 39. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. pp. 116–137.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404921

Příloha

Ve zprávě o průběhu 39. ročníku MO jsme uvedli, že mnoho našich žáků základních škol mělo možnost zúčastnit se nejen matematické olympiády, ale i řady korespondenčních seminářů (KS) a dalších soutěží. Uvedeme ukázky úloh z některých z nich. Věříme, že vás zaujmou a pokusíte se aspoň některé z nich vyřešit. Nejlepší však bude, když se v budoucnosti podobných akcí sami zúčastníte.

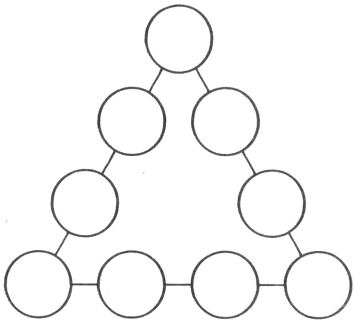
KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘE

Korespondenční seminář pro žáky 4. ročníků — Frýdek-Místek, vedoucí RNDr. *Z. Bachelová.* Uvádíme úlohy 3. kola korespondenčního semináře, který byl v roce 1989/90 již IV. ročníkem soutěže.

1. Na 3 stromy přiletělo 36 kavek. Když z prvního přeletělo na druhý 6 kavek a z druhého na třetí 4 kavky, byl na všech stromech stejný počet kavek. Kolik kavek sedělo původně na každém stromě?

2. Před i za číslo 1 989 napište jednu číslici tak, aby vzniklé šesticiferné číslo bylo dělitelné 88.

3. Do kroužků na obr. 49 vepište číslice 1, 2, 3, ..., 9 tak, aby součet čísel na každé straně byl a) 17, b) 20.



Obr. 49

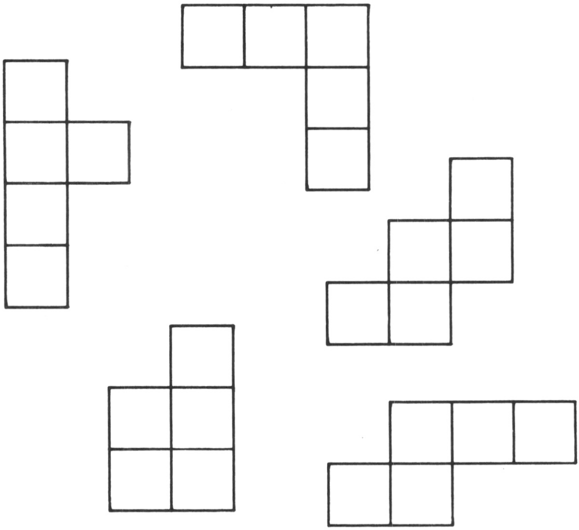
4. Každé písmeno nahraď číslicí, aby vznikl správný zápis sčítání. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá písmena různými číslicemi.

$$
\begin{array}{r}
S\,P\,O\,R\,T \\
P\,O\,R\,T \\
O\,R\,T \\
\hline
R\,R\,R\,R\,R
\end{array}
$$

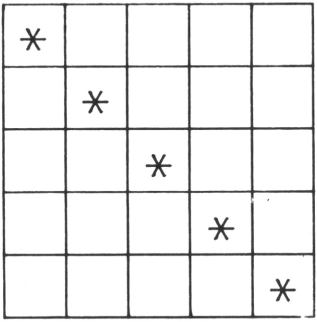
Korespondenční seminář pro žáky 5. ročníků — Frýdek-Místek, vedoucí RNDr. *Z. Bachelová.* Seznámíme vás s úlohami 1. kola IV. ročníku soutěže (1989/90).

1. Máte 100 shodných krychlí s hranami délky 1 cm. Kolik různých kvádrů z nich můžete sestavit, jestliže použijete vždy všechny krychle?

2. Čtverec na obrázku 51 pokryjte mnohoúhelníky z obrázku 50 tak, aby každý mnohoúhelník pokryl jednu hvězdičku.

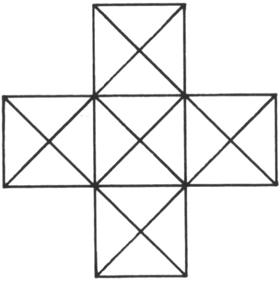


Obr. 50

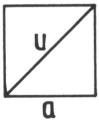


Obr. 51

3. Určete počet všech trojúhelníků nakreslených na obrázku 52a. Nakreslete všechny typy těchto trojúhelníků a k náčrtku napište délky stran; užijte označení z obrázku 52b.



Obr. 52a

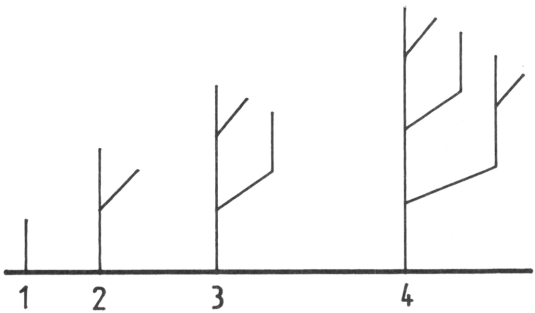


Obr. 52b

4. Honzík si koupil dvě lízátka a jeden perník. Zaplatil za ně dohromady 4,50 Kčs. Kdyby si koupil jedno lízátko a dva perníky, byl by zaplatil 6 Kčs. Kolik korun stalo lízátko a kolik korun stál perník?

Korespondenční seminář pro žáky 6. až 8. ročníků — Dvořákovo gymnázium Kralupy nad Vltavou, vede RNDr. *K. Šimánek*. Uvedeme jako ukázku úlohy z 2. série věnované tzv. Fibonacciovým číslům (podle italského matematika Leonarda Pisano zvaného Fibonacci (1170–1230), který se jimi zabýval). Další série byly věnovány geometrii, fyzikálním aplikacím ap.

1. Zasadili jsme stromek. Po roce už byl skoro dvojnásobný. Také mu vyrostla dlouhá boční větev. Následující rok mu vyrostla další boční větev a první větev už nerostla šikmo, ale směrem vzhůru jako kmen (obr. 53). Vždy po roce začala každá boční větev růst směrem vzhůru. Z větví, které v minulém roce rostly směrem vzhůru, vyrostla vždy v příštím roce i nová boční větev.



Obr. 53

a) Nakresli strom v 5. roce.

b) Doplň místo pomlček, kolik větví bude mít strom v dalších letech. Strom si načrtni na velkém papíře a do řešení napiš pouze čísla.

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ -,\ -,\ -,\ -,\ -,\ -$$

Těmto číslům říkáme Fibonacciova čísla.

c) Zamysli se nad tím, podle jakého pravidla se vytvářejí další a další Fibonacciova čísla.

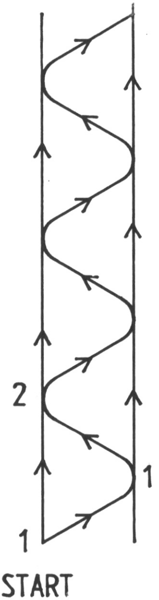
d) Pokus se pokračovat ve Fibonacciově posloupnosti také opačným směrem, tedy doleva. Doplň místo pomlček správná čísla.

$$-,\ -,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$$

2. Turisté stoupají do kopce. Na kopec vedou serpentiny (cesta se samými zatáčkami, na obrázku 54 (str. 122) znázorněna „klikatou“ čarou). Z míst, v nichž serpentiny mění směr, můžeme ve výstupu pokračovat i přímou strmou cestou (zkratkou). Komu prudké stoupání nevadí, může si občas cestu zkrátit.

a) Ke každému bodu, ve kterém se cesta větví, napiš, kolika způsoby se tam turisté mohou dostat. Samozřejmě se nebudou přitom vracet, ale půjdou stále vzhůru ve směru udaném některou šipkou. Na první dvě rozcestí jsme již správnou odpověď napsali. Ke startu jsme napsali číslo 1, protože nikde před startem nebylo rozcestí — dalo se tam dostat jen jednou cestou.

b) Rozhodni, zda tato čísla rostou podle Fibonacciovy posloupnosti.



Obr. 54

3. Kolik párů potomků může mít v jednom roce jediný pár králíků, když budou splněny následující tři podmínky:

a) každému dospělému páru se v každém měsíci narodí jeden pár králíků,

b) z narozených králíků budou dospělí králíci za dva měsíce (tzn. pár narozený v lednu má první dvojici potomků v březnu),

c) žádný pár neuhyne.

Korespondenční seminář pro žáky 6. až 8. ročníků — pořádal KV MO Košice. Seminář měl 5 sérií po 6 úlohách.

Všechny vycházely z příběhů, které vyprávěl medvídek Miška. Hrdinové jeho matematických příběhů byli jeho přátelé mravenci, kteří měli matematická jména. Uvedeme úlohy poslední série.

1. „No teda“ — vzdychl si Hrkátko při pohledu na domácí úlohu:

$$20 : 5 \cdot 2 + 6^2 =$$

„Zapomněl jsem si napsat závorky“. Kde má Hrkátko napsat závorky, jestliže výsledek má být a) 38, b) 196, c) 152, d) 111? Kolik různých výsledků může dostat různým uzávorkováním tohoto výrazu?

2. Mocninko chtěl pomocí čtyř dvojek zapsat co největší číslo. Které z těchto čísel to bylo:

$$222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},\ 22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}?$$

Umíte tato čísla uspořádat podle velikosti?[1])

---

[1]) Autoři korespondenčního semináře měli zřejmě na mysli, že se umocňuje postupně, tzn. například:

$$2^{2^{22}} = (2^2)^{22} = 4^{22} = 2^{44}.$$

Obtížnější úloha by vznikla, kdybychom měli počítat tak, aby vznikl co největší výsledek, tzn. kdybychom měli možnost vybrat si pořadí umocňování uzávorkováním. Například

$$2^{(2^{22})} = 2^{4\,194\,304}.$$

3. Číselko, Následko, Násobko a Rozumko trávili odpoledne na nedaleké louce procházkou. Každý z nich se pohyboval po přímce rovnoměrnou rychlostí, přičemž žádné dvě z těchto přímek nebyly rovnoběžné a žádné tři neměly společný bod. Rozumko se setkal s Číselkem, Následkem i Násobkem a při setkání dostal od každého jednu úlohu. Víme, že Číselko se setkal s Následkem a Násobkem. Dokažte, že i Následko se setkal s Násobkem.

4. Číselko řekl Rozumkovi: „Číslo A je 1 990ciferné a je dělitelné devíti. Číslo B je ciferným součtem čísla A, číslo C je ciferným součtem čísla B a číslo D je ciferným součtem čísla C." Po chvíli přemýšlení pověděl Rozumko číslo D. Jak ho poznal?

5. Následko měl proužek papíru, na kterém byla napsána řada znamének + a −. Ukázal ho Rozumkovi a řekl: „Můžeš vygumovat libovolná dvě znaménka a místo dvou stejných znamének napsat jedno znaménko + a místo dvou různých znamének napsat jedno znaménko −. To opakuj, až nakonec dostaneš jediné znaménko." Rozumko se dobře podíval na řadu znamének a hned řekl, jaké znaménko zůstane nakonec, aniž by znaménka gumoval. Jak to zjistil?

6. Násobko dal Rozumkovi čtverečkovaný papír (délka stran čtverečků byl 1 mravenčí centimetr) a vybídl ho: „Nakresli rovnoběžník s vrcholy ve vrcholech této čtvercové sítě tak, aby jeho obsah byl 25,5 mravenčích centimetrů čtverečných." „To nejde," namítl Rozumko. Měl pravdu? Proč?

Korespondenční seminář pro žáky 6. až 8. ročníků — KV MO Praha a gymnázium, Praha 2, Korunní, vede RNDr. *J. Zhouf* a *Š. Kasal.* Přinášíme ukázky 4. série úloh.

1. Je mezi čísly 1, 2, 3, ..., 9 999 999 více těch, která obsahují číslici 1, nebo těch ostatních?

2. Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 1\,\mathrm{cm}$. Na úsečce CD jsou dány body E a F tak, že $|CD| = 3|CE| = 3|EF| = 3|FD|$. Určete součet velikostí úhlů BAC, BAE a BAF.

3. Zjistěte, zda existuje trojúhelník, který má obsah větší než $1\,\mathrm{m}^2$ a přitom všechny výšky menší než $1\,\mathrm{cm}$.

4. Indián Jones stanul na cestě za pokladem před 111 lampami, z nichž každá byla zapnuta nebo vypnuta. Jestliže si vybere 13 lamp a mávne kouzelným proutkem, pak je přepne (tzn. ty, které byly zhasnuté, rozsvítí a naopak ty, které byly rozsvícené, zase zhasne). To může opakovat kolikrát chce. Dále však může jít až tehdy, když budou všechny lampy zhasnuty.

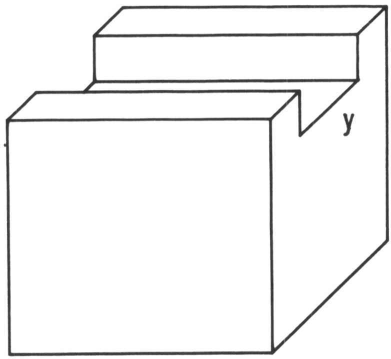
a) Podaří se — bez ohledu na počet lamp, které byly ze začátku rozsvíceny — pomocí kouzelného proutku všechny lampy zhasnout?

b) Na jaký nejmenší počet mávnutí může Jones pozhasínat všechny lampy, jestliže na začátku byly všechny rozsvíceny?

Korespondenční seminář pro žáky 7. a 8. ročníků — pobočka JČMF Jihlava, vedou *V.* a *M. Krejčí.* Autoři KS zadávali úlohy, které si navzájem předkládalo několik kamarádů.

Při řešení se seznamovali řešitelé i se jmény a úlohami některých starověkých a středověkých matematiků, mezi nimiž byli například Diofantos a Fermat. Uvedeme úlohy 2. kola.

1. V dílnách opracovávali plastickou hmotu a vyráběli pro nejmenší žáky krychličky s hranou délky 60 mm. V příští hodině měl Kamil udělat v jedné z nich výřez ve tvaru kvádru podle obr. 55. Ale chyba lávky! Zapomněl rozměry



Obr. 55

tohoto výřezu. Ještě, že si pamatoval, že to jsou v milimetrech celá čísla. Dále věděl, že povrch tělesa, které vznikne po výřezu, bude o jednu šestinu větší, než povrch celé krychle. Délka y (obr. 55) nesmí být menší než 10 mm, ale musí být menší než 30 mm. Může Kamil úkol splnit, nebo se musí jít přiznat, že byl nepozorný a na rozměry se přesně přeptat?

2. Radek dostal jiný úkol: Kolik kvádrů s povrchem 52 cm^2 a s jedním rozměrem $a = 2$ cm je možno sestavit z nejvíce 40 krychlí s hranou délky 1 cm? Poradíte?

3. Na zopakování úloh z 1. kola zadal Radek Kamilovi úlohu: „Vyjádři čísla 34 a 25 jako čísla rovná součtu dvou čtverců ve tvaru součtu dvou jiných čtverců.“[2])

4. Vzpomínka na prázdniny. Kamil s Radkem se domluvili s dalšími čtyřmi kamarády, že si budou dopisovat o dvou tématech. Každý bude psát všem zbývajícím a každá dvojice (jako Kamil a Radek) má smluveno jedno téma. Kluci bezpečně zjistili, že je možno najít aspoň jednu trojici kamarádů, kteří si dopisují o stejném tématu. Zkuste to také dokázat.

Korespondenčný seminár pre žiakov 7. a 8. ročníka (PIKOMAT) seminár Zamat — MFF UK Bratislava, vedie *Z. Kocsis.* Uvádzame ukážku zimnej časti.

Kozmická loď Saturnin sa už po desaťročia plavila nekonečnými moriami vesmírneho oceánu hľadajúc miesto, kde vesmírny pirát škuľavý Sven ukryl dôkaz Goldbachovej hypotézy, v ktorej sa tvrdí, že ľubovoľné párne číslo väčšie než dva sa dá napísať ako súčet dvoch prvočísel. Posádku lode Saturnin tvorilo sto ostrieľaných vesmírnych pirátov. Aby dlho hľadané miesto neprehliadli, boli vždy traja chlapi v službe podľa predom stanoveného harmonogramu služieb. Tento harmonogram sa snažili urobiť tak, aby v ňom bol rozpis pre všetkých sto členov posádky, ale aby žiadny dvaja nemuseli spolu slúžiť dvakrát. Samozrejme všetci musia slúžiť rovnako veľakrát.

---

[2]) Jinými slovy: Najděte aspoň dvě dvojice celých nebo racionálních čísel x, y, které jsou řešením rovnice $x^2+y^2=34$ a rovnice $x^2+y^2=25$. Podobné úlohy řešil ve starověku řecký matematik Diofantos.

1. Pomôžte im zostaviť taký harmonogram.

Tento rok má službu trojica Joe, Bob a Georg. Joe a Bob sú vo velíne a snažia si rozdeliť kopu rombúl (vzácna plodina dorábaná na planéte Quicksort), ktoré ,dostali ako vylepšenie ku strave. Nie je to jednoduché lebo ich nie je párny počet. Tu Boba napadla takáto možnosť delenia:

Predpokladajme tri spôsoby delenia, z ktorých má každý tri etapy (1. a 2. etapa je zhodná pre všetky tri spôsoby):

1. etapa: Bob rozdelí kopu na dve časti, pričom v každej z nich budú aspoň dve rombuly.

2. etapa: Joe rozdelí každú časť znovu na dve časti tak, aby v každej časti zostala aspoň jedna rombula.

3. etapa: Pri 1. spôsobe Joe berie najväčšiu a najmenšiu časť.
Pri 2. spôsobe Joe berie dve stredné časti.
Pri 3. spôsobe Joe berie buď najväčšiu a najmenšiu časť, alebo dve stredné časti, ale za právo výberu musí dať Bobovi jednu rombulu.

2. Rozhodnite, ktorý spôsob je pre Joa najvýhodnejší a ktorý najmenej výhodný, ak na kope je aspoň 15 rombúl.

Georg sa medzitým pohrával s počítačom, dával si vypisovať rôzne čísla; chcel zistiť, koľko miesta zaberie 1 989ciferné, tak si dal nejaké vypísať. Zabralo to necelých 25 riadkov. Keď ho už mal vygenerované, tak sa o ňom snažil dozvedieť čo najviac. Okrem iného sa o ňom dozvedel z informácií počítača, že je deliteľné deviatimi. Potom si z neho dal urobiť ciferný súčet, dostal číslo a, dal spraviť ciferný súčet a, dostal b a potom ešte raz ciferný súčet z b a dostal c.

3. Čomu sa rovná c?

Georg po chvílke úvah dospel k názoru, že výsledok vôbec nezávisí od toho, aké číslo mu počítač vygeneroval. Len to je podstatné, aby bolo deliteľné deviatimi.

Tomuto objavu sa veľmi potešil, chcel ho oznámiť kolegom. Prudko vstal, pričom sa mu „podarilo" zhodiť veľkú krištálovú kocku. Tá sa rozpadla na niekoľko štvorstenov. Aké bolo jeho prekvapenie, keď zistil, že kocka sa rozpadla na najmenši možný počet štvorstenov.

4. Na koľko častí sa rozpadla kocka?

Ako takto na lodi plynul život, ozval sa zrazu výstražný hlas riadiaceho počítača oznamujúci, že dorazili na miesto, kde je ukrytý kľúč k tajomstvu. Toto miesto stráži maják, ktorý vysiela svetelný lúč s dosvitom 56 AU. Maják sa toči okolo svojej osi a rýchlosť konca lúča je 14 AU za hodinu. Rýchlosť nášho vesmírneho korábu je 2 AU za hodinu. Ak lúč zasiahne koráb, zničí ho.

5. Poraďte posádke, či sa k pokladu môže vôbec dostať, a ak áno, tak ako. Úlohu riešte len v rovine.

DALŠÍ MATEMATICKÉ SOUTĚŽE

Týmová soutěž „Dejte hlavy dohromady" — pořádá pobočka JČMF Praha, vede doc. RNDr. *M. Koman*, CSc.

Soutěž je určena žákům 6. ročníků tříd s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů z Prahy a Středočeského kraje. Soutěží čtyřčlenná družstva. Předností soutěže je, že žáci mohou řešit úlohy společně, vzájemně si radit, pomáhat a kontrolovat výsledky i celá řešení.

1. *Koláče*

Novákovi mají čtyři kluky jako buky. Na ráno jim maminka připravila mísu koláčů. První vstával Karel a snědl jeden koláč a ještě třetinu zbylých koláčů. Druhý se probudil Jirka a rovněž snědl jeden koláč a ještě třetinu zbylých. Třetí vstával Honza a počínal si stejně jako Karel a Jirka. Zbylé koláče dojedl Pavel, který vstával poslední. Jaký nejmenší počet koláčů musel být původně na míse?

2. *Rozhovor*

Petr: Naši sousedé mají tři děti. Součin jejich věků je 36. Umíš určit věk dětí našich sousedů?

Karel: Údaje mi nestačí.

Petr: Součet jejich věků je shodný s číslem vašeho domu.

Karel: Ještě mi to nestačí, pořád je více možností.

Petr: Jejich nejstarší syn nosí brýle.

Karel: Nyní je mi už jasné, kolik let je dětem vašich sousedů. Je jim $\square\ \square\ \square$ let.

Dovedete i vy určit věk všech tří dětí?

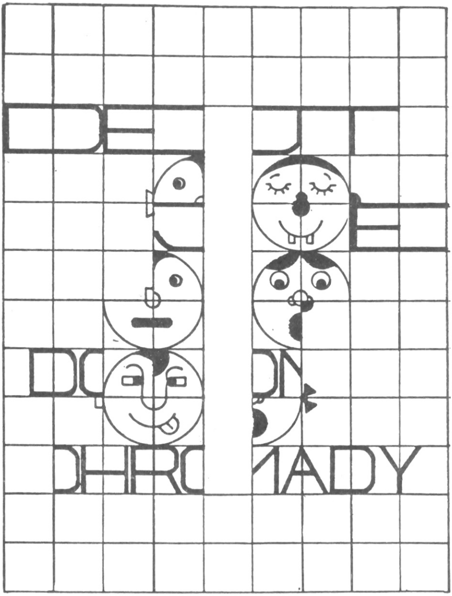
3. *Plot*

Vlnitým plechem je třeba ohradit prostranství tvaru čtverce se stranou délky 19 metrů. Dělníci mají 13 dílů délky 4 m a 8 dílů délky 3 m. Poraďte, jak mají prostranství ohradit, aniž by museli některé díly řezat nebo ohýbat. Nakreslete obrázek a vyznačte umístění dílů.

4. *Přesýpací hodiny*

Jirka má čtyřminutové a sedmiminutové přesýpací hodiny. Když si v kuchařské knize přečetl, že vajíčko natvrdo se vaří devět minut, zajímalo ho, zda tento čas může odměřit pomocí svých přesýpacích hodin. Po chvíli přemýšlení zjistil, že ano. Jak?

5. *Plakát*

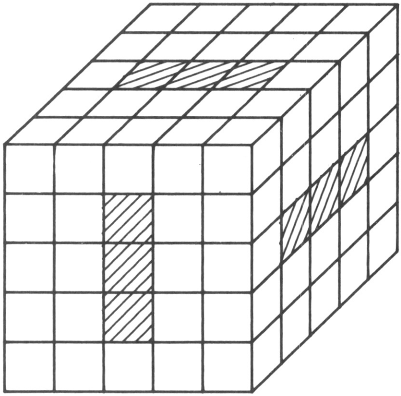


Obr. 56

Obrázek 56 rozstřihněte na dvě stejné části tak, aby jejich sestavením vznikl čtvercový plakát propagující naši soutěž.

6. *Krychle*

V krychli slepené ze 125 jednotkových krychlí byly provrtány 3 kolmé tunely ve tvaru hranolů, jejichž podstavy jsou vyznačeny na obrázku 57. Vypočítejte objem provrtané krychle.[3])



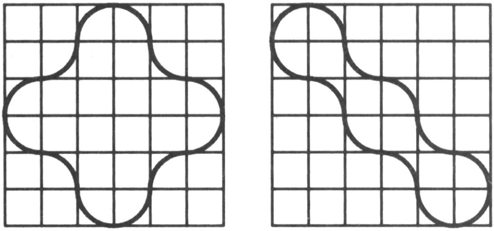
Obr. 57

7. *Železnice*

Díly modelu dětské železnice mají tvar čtvrtkružnic. Z nich lze sestavovat různé okružní dráhy. Na obrázku 58 jsou ukázky dvou sestavených okruhů ze 12 dílů. Nakreslete co

---

[3]) Našim čtenářům doporučujeme řešit i složitější úlohu — vypočítat povrch provrtané krychle.

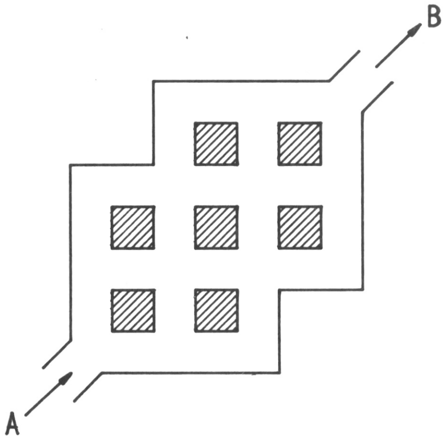


Obr. 58

největší počet okružních drah ze 16 dílů. Dráhy, které se liší jen jako levá a pravá rukavice, považujte za shodné.

8. *Bludiště*

V místě *A* vběhla do bludiště (obr. 59) vyděšená myší rodi-



Obr. 59

na. Všechny myši šťastně proběhly bludištěm do místa B. Z rozhovoru udýchaných myší se dozvídáme:

a) Každá myš běžela po chodbičkách jen směrem doprava a nahoru,

b) žádné dvě myši neběžely stejnou cestou,

c) kdyby bylo ještě o jednu myš více, pak by některé dvě musely běžet po stejné cestě.

Kolik členů měla myší rodina?

Týmová soutěž „Dejte hlavy dohromady" — pořádá OPS Opava, vede RNDr. *L. Hozová.* Pravidla soutěže jsou stejná jako pravidla stejnojmenné soutěže pořádané v Praze.

1. Rozložte v rovině 10 mincí do pěti přímých řad, přičemž v každé řadě musí být čtyři mince. Kolik najdete řešení?

2. Nahraďte písmena číslicemi od 0 do 9 tak, aby platilo všech 5 rovnic:

$$\begin{array}{ccc} AB \cdot AA & = & CDDC \\ - & & = \\ EF \cdot AA & = & GDDG \\ = & & + \\ FG \cdot AA & = & FDDF \end{array}$$

3. Čtyři bratři zdědili zahradu, na které byly vysázeny na čtvercových záhonech 4 jabloně a 4 třešně (obr. 60). Jak se mají o zahradu podělit, aby každý dostal část zahrady stejného tvaru a stejné velikosti jako ostatní a přitom, aby měl na svém dílu jednu jabloň a jednu třešeň?

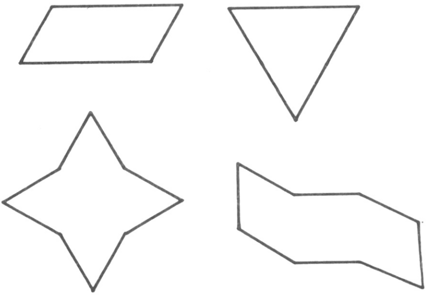
4. V jednom království byla věznice, v ní 100 cel a v každé cele byl jeden vězeň. Zámek každé cely bylo možno za-

					T
T					
	T	J	J		
		J	J		
	T				

Obr. 60

mknout pouze na 1 západ. Jednou měl král dobrou náladu a řekl si, že všechny vězně pustí na svobodu. Šel a otočil klíčem. Vězni však neutekli, protože na to nepřišli. Druhý den si král řekl, že by byl moc mírný, kdyby pustil všechny vězně. Šel a u každé druhé cely otočil klíčem. Třetí den otočil klíčem u každé třetí cely atd. až stý den u sté cely. Potom vyhlásil, že kdo není zamčen, je volný a může odejít. Určete, které cely byly odemčeny.

5. Z každé sítě z obr. 61 složte těleso.



Obr. 61

Doplňte čáry, podle kterých se musí síť přeložit.

Krajské kolo MO kategorie Z6 — pořádal pro žáky Západočeského kraje KV MO, vedla PaedDr. *M. Ausbergerová.*

1. Kalendář byl během roku zlevněn o 40 % a ke konci roku ještě o dvě třetiny nové ceny. Nakonec byla jeho cena snížena o další tři koruny a kalendář byl prodáván v bazaru za dvě koruny. Jaká byla jeho původní cena?

2. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Body E, F, G, H jsou po řadě středy stran $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Dokažte, že

$$|EG|(b + d) : 2, \qquad |FH| < (a + c) : 2.$$

3. Kolik různých obdélníků lze sestavit z 225 čtvercových dlaždic tak, aby byly vždy všechny použity? Vypočítejte obvody a obsahy těchto obdélníků.

4. Lyžař si vypočítal, že poběží-li rychlostí 10 km za hodinu, dorazí k cíli hodinu po poledni, poběží-li rychlostí 15 km za hodinu, bude v cíli hodinu před polednem. Jakou rychlostí musí běžet, aby dorazil na místo právě v poledne?

5. V dílně vyrobili za tři dny 58 výrobků. První a druhý den vyrobili dohromady 43 výrobky, druhý a třetí den vyrobili 35 výrobků. Vypočítejte, kolik výrobků vyrobili třetí den?

Krajské kolo MO kategorie Z7 — pořádal pro žáky Západočeského kraje KV MO, vedla PaedDr. *M. Ausbergerová.*

1. a) Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že pro délky jeho stran a úhlopříček platí:

$$a + b + c + d > u + v > (a + b + c + d) : 2.$$

b) Zahrada má tvar čtyřúhelníku se stranami délky nejvýše 100 m. Uprostřed každé strany je v plotě branka. Dokažte, že z libovolného místa na zahradě je k nejbližší brance nejvýše 50 m.

2. Jitka se o vánocích nebránila sladkostem a její hmotnost vzrostla o 5 %. Potom byla týden na horách a její hmotnost poklesla o 5 %. Má Jitka opět původní hmotnost?

3. Deset metrů vysoký stožár se zlomil tak, že jeho vrcholek se dotýká země 3 metry od paty stožáru. V jaké výšce se stožár zlomil?

4. Objem skříně je 2,5 m^3. Zjistěte, zda je možné do skříně uschovat tyč délky 3,4 metru. Přitom víte, že šířka skříně je čtyřikrát větší než její hloubka a její výška se rovná součtu zbývajících dvou rozměrů.