Ako sme počítali v Pekingu

(Správa z 31. medzinárodnej matematickej olympiády)

Stalo sa už tradíciou, že každoročne začiatkom letných prázdnin sa stretávajú najlepší z najlepších stredoškolákov z desiatok krajín, aby si na medzinárodnej matematickej olympiáde zmerali svoje sily v riešení náročných úloh. V roku 1990 sa ujala usporiadania tohto veľkého podujatia Čínska ľudová republika a za miesto konania súťaže zvolila svoje hlavné mesto Peking. Účasť na súťaži bola rekordná: zúčastnili sa jej žiaci z 54 krajín (tab. 6, str. 266), zväčša zastúpených úplnými šesťčlennými družstvami. Českú a Slovenskú Federatívnu Republiku reprezentovalo na 31. MMO v Pekingu týchto šesť žiakov:

Martin Dindoš	4 G J. Hronca, Bratislava
Petr Hliněný	4 G M. Koperníka, Bílovec
Štěpán Kasal	3 G W. Piecka, Praha
Michal Konečný	3 G Brno, tř. kpt. Jaroše
Pavol Ševera	4 G A. Markuša, Bratislava
Ondrej Šuch	4 G A. Markuša, Bratislava

Vedúcim delegácie bol RNDr. *Karel Horák*, CSc. (MÚ ČSAV), jeho zástupcom RNDr. *Vladimír Burjan* (MŠMŠ SR), obaja členovia predsedníctva ÚV MO.

Vedúci delegácie odletel do Pekingu 7. júla, aby sa ako člen medzinárodnej jury zúčastnil výberu súťažných úloh. Jury po dvojdňovom náročnom rokovaní vybrala z desiatok návrhov šesť súťažných úloh. Možno považovať za úspech, že medzi vybrané úlohy sa dostala aj jedna československá (úloha č. 2), ktorej autorom je RNDr. *Pavol Černek*, CSc., z katedry matematiky Elektrotechnickej fakulty SVŠT v Bratislave.

Naobed 9. júla 1990, po vyše 7 hodinovom lete z Moskvy, dorazili do Pekingu aj šiesti súťažiaci sprevádzaní V. Burjanom. Organizátori súťaže im poskytli nasledujúce dva dni na aklimatizáciu a prípravu na súťaž. Vzhľadom na vysoké teploty vzduchu a jeho mimoriadnu vlhkosť, na akú nie sme v našich podmienkach zvyknutí, bola táto aklimatizácia ozaj potrebná. Navyše — vzhľadom na osemhodinový časový posun medzi Pekingom a ČSFR — bolo v Pekingu doobedie v tom čase, kedy je u nás doma noc. Keďže súťaž prebiehala vždy doobeda, boli naši žiaci nútení podávať vrcholný intelektuálny výkon v (biologickom) čase, kedy je zvyčajne ich organizmus v najhlbšom útlme. Táto skutočnosť, ako aj spomenuté horúčavy s vlhkosťou vzduchu určite mali vplyv na ich výkony.

Počas dvoch prípravných dní si žiaci prezreli niektoré časti Pekingu a navštívili ZOO, kde videli okrem iného pandy — zvieratá, ktoré sú národným symbolom Číňanov. Poobede pred súťažou sa konal v modernej športovej hale ceremoniál slávnostného otvorenia 31. medzinárodnej matematickej olympiády. Po úvodných prejavoch zástupcov ministerstva školstva a mesta Pekingu ho spestrilo veľmi atraktívne a exoticky pôsobiace vystúpenie rôznych artistických a akrobatických skupín. Na tomto stretnutí sa prvýkrát od príletu do Pekingu videli vedúci delegácií s ostatnými ich členmi. Aj to len na vzdialenosť niekoľko desiatok metrov. Pravidlá súťaže totiž vyžadujú, aby vedúci delegácií (ktorí sa podieľajú na výbere súťažných úloh) ostali oddelení od súťažiacich až do skončenia druhého súťažného dňa.

Vo štvrtok a piatok (12. a 13. júla) prebiehala samotná súťaž. Žiaci riešili každý deň tri súťažné úlohy, pričom na vypracovanie riešení mali vždy 4,5 hodiny čistého času. V triedach, kde sa súťažilo, nebola dostatočná klimatizácia, a tak tí žiaci, ktorí nesedeli bezprostredne pri niektorom z ventilátorov, sa dosť potili nielen nad úlohami. Zdá sa, že čo sa podmienok týka, bola táto olympiáda jedna z najnáročnejších. To však v žiadnom prípade nemá byť kritika organizátorov, ktorí skutočne dôkladne všetko pripravili a vyvinuli maximálne úsilie, aby súťaž prebehla hladko a aby sa hostia v ich krajine cítili príjemne. Keď si uvedomíme, že ide o skupinu zhruba 500 ľudí, ktorých treba ubytovať, stravovať, zabezpečiť pre nich program na 10 dní, dopravovať ich z miesta na miesto, atď., uvedomíme si, že MMO v dnešnej podobe je podujatím veľmi nákladným a navyše organizačne nesmierne náročným. (Usporiadanie 30. MMO v Spolkovej republike Nemecko si údajne vyžiadalo 1,3 milióna mariek). Navyše stále trvá trend zvyšovať počet účastníckych krajín. Preto neprekvapuje, že budúci organizátori medzinárodných olympiád uvažujú aj o možnom znížení počtu súťažiacich z jednotlivých krajín na štyroch. (Pre tých, ktorí sa na začiatky MMO nepamätajú, dodajme, že pôvodne boli družstvá jednotlivých krajín osemčlenné.)

Po dvoch súťažných dňoch nastáva medzi súťažiacimi veľká psychická úľava — zvyšok pobytu strávia exkurziami po krajine, návštevou zaujímavých miest a pamätihodností. Pre vedúcich delegácií a ich zástupcov naopak začína niekoľko dní náročnej práce. Všetky riešenia svojich zverencov musia opraviť a podľa vopred stanovených kritérií obodovať. Aby bola zabezpečená objektívnosť, musia byť všetky riešenia a ich opravy následne skoordinované. Touto náročnou a únavnou prácou sú spravidla poverení matematici poriadajúcej krajiny. Tí postupne prejdú každé jedno žiacke riešenie s vedúcimi príslušnej krajiny (ktorí ho opravovali), nechajú si ho slovo po slove preložiť do niektorého zo svetových jazykov a posúdia, či bodové ohodnotenie navrhnuté vedením delegácie je opodstatnené. Vzhľadom na to, že by nebolo rozumné, aby koordinátori kontrolovali aj opravu riešení žiakov z ich vlastnej krajiny, bolo prijaté pravidlo, podľa ktorého riešenia žiakov z poriadajúcej krajiny koordinujú vedúci delegácií krajín, z ktorých pochádzajú jednotlivé súťažné úlohy. Keďže tentokrát bola jedna zo súťažných úloh z Československa, pripadla nám úloha koordinovať jej riešenia z pera šiestich čínskych študentov. Zhodou okolností išlo o úlohu, ktorej riešenie bolo založené len na istých logických a kombinatorických úvahách, takže v riešeniach sa takmer nevyskytovali čísla a vzorce. Tie by boli mohli byť istými záchytnými bodmi pre nás, pretože čínština (našťastie) používa arabské číslice a v matematických textoch dokonca aj latinské písmená pre premenné, takže mnohé matematické texty vyzerajú „obdobne“ ako u nás. Žiaľ, riešenia nami zadanej úlohy neobsahovali takmer žiadne čísla a vzorce, a tak väčšina textu vyzerala asi takto:

第 31 届国际数学奥林匹克 中国北京

Usporiadatelia pripravili účastníkom súťaže veľmi atraktívny a bohatý program na nesúťažné dni. Počas desiatich dní strávených v Pekingu sme mali možnosť zhliadnuť takmer všetky významné pamätihodnosti tohto starého mesta a jeho blízkeho okolia. Navštívili sme rozsiahly areál legendárneho Zakázaného mesta, kde po storočia žili čínski cisári a kam prostý občan nesmel nikdy vkročiť, ani nahliadnuť. Rovnako exoticky a okúzľujúco na nás zapôsobil letný palác čínskej cisárovnej, ktorý vystavila na okraji Pekingu pri nádhernom jazere. Dodajme, že z peňazí, za ktoré sa malo vybudovať čínske vojnové námorníctvo. Starý Peking bol mestom chrámov: nahliadli sme do chrámu spiaceho Budd-hu, do chrámu Bi-Yun, do Nebeského chrámu, kde sa konali obety na zabezpečenie dobrej úrody. Strnuli sme na najväčšom námestí sveta Tien'an men, ktoré sa smutne preslávilo v roku 1989 ako centrum študentských nepokojov a ich násilného potlačenia. Prešli sme niekoľko kilometrov po najväčšej stavbe sveta slávnom čínskom múre pri Ba-Da-Lingu a vošli do podzemia, kde sú v obrovských, umelo vytesaných priestoroch umiestené hrobky príslušníkov starej dynastie Mingov. Veľkým zážitkom bola návšteva čínskej národnej opery, ktorá s európsky ponímanou operou má len pramálo spoločného.

Podvečer predposledného dňa nášho pobytu v Pekingu (18. júla) bol vyplnený slávnostným ukončením olympiády a ceremoniálom odovzdávania cien a medailí. Tu sa naši žiaci dozvedeli, že napriek náročným podmienkam súťaže obstáli veľmi dobre: všetci šiesti získali medaile, a to M. Dindoš bronzovú (chýbal mu 1 bod do striebornej) a ostatní strieborné (pričom P. Hliněnému chýbal 1 bod do zlatej). Spolu získali naši žiaci 153 bodov (z 252 možných), čo aj pri silnej konkurencii stačilo na obsadenie celkového 8. miesta (pozri tabuľku 6). Pritom treba poznamenať, že MMO je podľa svojho štatútu súťažou jednotlivcov, poradie krajín sa určuje iba neoficiálne. Štyria účastníci súťaže (dvaja z Číny, jeden z Francúzska a jedna žiačka zo ZSSR) získali plný počet 42 bodov. Všeobecné uznanie vyvolalo presvedčivé víťazstvo čínskeho družstva, ktorého náskok na v poradí druhý Sovietsky Zväz bol úctyhodný.

V ďalšom uvádzame súťažné úlohy 31. MMO v Číne, ich stručné riešenia a tabuľky, obsahujúce niektoré podrobnosti o výsledkoch súťaže. Možno nie je bez zaujímavosti, že výbor, poverený prípravou budúcich MMO už rozhodol o miestach konania súťaže v nasledujúcich 11 rokoch (s výnimkou roku 1998), a to takto:

1991 Švédsko (Sigtuna)
1992 ZSSR
1993 Turecko
1994 Mongolsko (náhradne Hong Kong)
1995 Kanada
1996 Brazília
1997 Veľká Británia
1998 ???
1999 Rumunsko (jubilejná 40. MMO)
2000 Južná Kórea
2001 USA

Veríme, že sa naši žiaci všetkých týchto medzinárodných matematických olympiád zúčastnia a uspejú na nich aspoň tak dobre, ako v roku 1990 na 31. MMO v Pekingu.

Vladimír Burjan
Karel Horák

Tabuľka 5
Výsledky nášho družstva v jednotlivých úlohách

Meno	Body získané za úlohu č. 1	2	3	4	5	6	Spolu	Cena
Martin Dindoš	0	7	2	2	3	2	16	III.
Petr Hliněný	7	7	2	7	7	3	33	II.
Štěpán Kasal	7	7	1	1	7	7	30	II.
Michal Konečný	0	7	0	7	7	3	24	II.
Pavol Ševera	0	7	2	7	7	1	24	II.
Ondrej Šuch	3	3	3	7	7	3	26	II.
Spolu bodov	17	38	10	31	38	19	153	
% z možných b.	40 %	90 %	24 %	74 %	90 %	45 %	52 %	

Tabuľka 6
Neoficiálne poradie krajín a počty získaných medailí

Miesto	Krajina	Spolu bodov	Počet medailí Z	S	B	Počet súťažiacich
1.	Čína	230	5	1	0	6
2.	ZSSR	193	3	2	1	6
3.	USA	174	2	3	0	6
4.	Rumunsko	171	2	2	2	6
5.	Francúzsko	168	3	1	0	6
6.	Maďarsko	162	1	3	2	6
7.	NDR	158	0	4	2	6
8.	Československo	153	0	5	1	6
9.	Bulharsko	152	1	4	1	6
10.	Veľká Británia	141	2	0	2	6
11.	Kanada	139	0	3	1	6
12.	SRN	138	0	2	4	6
13.	Taliansko	131	1	1	4	6

pokračování tabulky 6

Miesto	Krajina	Spolu bodov	Počet medailí			Počet súťažiacich
			Z	S	B	
14.	Irán	122	0	4	0	6
15.	Austrália	121	0	2	4	6
15.	Rakúsko	121	0	1	4	6
17.	India	116	1	1	2	6
18.	Nórsko	112	0	3	1	6
19.	KĽDR	109	0	1	3	6
20.	Japonsko	107	0	2	1	6
21.	Poľsko	106	0	2	1	6
22.	Hong Kong	105	0	0	4	6
23.	Vietnam	104	0	1	3	6
24.	Brazília	102	1	0	2	6
25.	Juhoslávia	98	0	1	2	6
26.	Izrael	95	0	1	3	6
27.	Singapur	93	0	0	2	6
28.	Švédsko	91	0	1	2	6
29.	Holandsko	90	0	1	2	6
30.	Kolumbia	88	0	1	2	6
31.	Nový Zéland	83	0	0	2	6
32.	Južná Kórea	79	0	1	1	6
33.	Thajsko	75	0	0	2	6
33.	Turecko	75	0	0	1	6
35.	Španielsko	72	0	0	0	6
36.	Maroko	71	0	1	0	5
37.	Mexiko	69	0	0	1	6
38.	Argentína	67	0	0	1	6
38.	Kuba	67	0	0	1	6
40.	Bahrajn	65	0	0	0	6
40.	Írsko	65	0	0	1	6
42.	Grécko	62	0	0	1	6
43.	Fínsko	59	0	0	1	6
44.	Luxembursko	58	1	0	1	2
45.	Tunisko	55	0	0	1	4
46.	Mongolsko	54	0	0	0	6
47.	Kuvajt	53	0	0	1	4
48.	Cyprus	46	0	0	1	4
48.	Filipíny	46	0	0	1	6
50.	Portugalsko	44	0	0	0	6

pokračování tabulky 6

Miesto	Krajina	Spolu bodov	Počet medailí Z	S	B	Počet súťažiacich
51.	Indonézia	40	0	0	0	6
52.	Macao	32	0	0	0	6
53.	Island	30	0	0	1	3
54.	Alžírsko	29	0	0	0	4
Spolu		5 286 40,86 %	23 155 medailí	56	76	308 žiakov

Texty soutěžních úloh

1. Je dána kružnice, jejíž dvě tětivy AB a CD se protínají ve vnitřním bodě E. Je-li M vnitřní bod úsečky EB, označme F a G průsečíky přímek BC a AC s tečnou sestrojenou v bodě E ke kružnici procházející body D, E, M. Je-li $\frac{|AM|}{|AB|} = t$, vyjádřete poměr $\frac{|EG|}{|EF|}$ pomocí t.

(Indie)

2. Pro $n \geqq 3$ uvažujme množinu E obsahující $2n-1$ různých bodů na kružnici. Předpokládejme, že právě k těchto bodů je obarveno černě. Takové obarvení označíme jako dobré, jestliže existuje aspoň jedna dvojice černých bodů, pro kterou vnitřek jednoho z příslušných oblouků obsahuje právě n bodů množiny E. Najděte nejmenší k, pro které je každé takové obarvení dobré. *(ČSFR)*

3. Najděte všechna celá čísla $n > 1$, pro něž je $\frac{2^n + 1}{n^2}$ celé číslo. *(Rumunsko)*

4. Označme Q^+ množinu všech kladných racionálních čísel. Sestrojte funkci $f\colon \mathsf{Q}^+ \to \mathsf{Q}^+$ takovou, že pro všechna x a y

z $\mathbb{Q}^+$ platí

$$f\big(x\,f(y)\big) = \frac{f(x)}{y}.$$

(Turecko)

5. Je-li dáno celé číslo $n_0 > 1$, dva hráči A a B střídavě vybírají celá čísla $n_1, n_2, n_3, \ldots$ podle následujících pravidel: Jakmile je známo číslo n_{2k}, hráč A zvolí celé číslo n_{2k+1} takové, že

$$n_{2k} \leqq n_{2k+1} \leqq n_{2k}^2.$$

Je-li známo n_{2k+1}, zvolí hráč B celé číslo n_{2k+2} takové, že podíl

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

je kladnou mocninou nějakého prvočísla. Hráč A vyhraje, jakmile zvolí číslo 1 990, zatímco hráč B vyhrává, když zvolí číslo 1. Pro jaká n_0

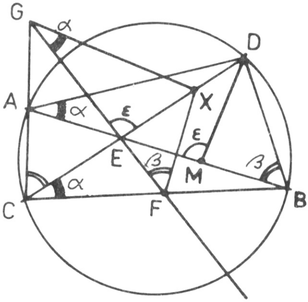
a) hráč A má vyhrávající strategii,
b) hráč B má vyhrávající strategii,
c) ani jeden z hráčů nemá vyhrávající strategii?

(SRN)

6. Dokažte, že existuje konvexní 1 990úhelník s následujícími dvěma vlastnostmi:

a) všechny jeho úhly jsou shodné;
b) jeho strany mají v nějakém pořadí délky $1^2, 2^2, \ldots, 1\,989^2, 1\,990^2$. *(Nizozemí)*

1 (podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec). Označme $\alpha = |\sphericalangle DAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABD|$ a $\varepsilon = |\sphericalangle AMD|$ (obr. 73), pak je podle věty o obvodových a úsekových úhlech také $\varepsilon = |\sphericalangle GED|$ (neboť GE je tečnou kružnice procházející body D, E, M), $\alpha = |\sphericalangle BCD|$ a $\beta = |\sphericalangle ACD|$.



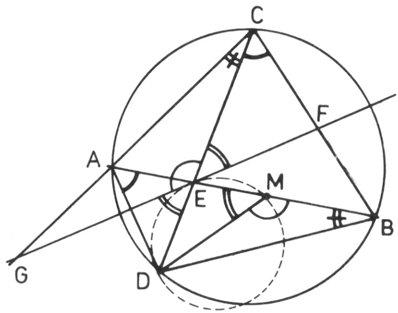
Obr. 73

Zvolme nyní bod X na polopřímce ED tak, aby úhel EGX měl velikost α. Podle věty o obvodových úhlech leží body C, F, G, X na kružnici a platí $|\sphericalangle GFX| = |\sphericalangle GCX| = \beta$. Trojúhelníky GEX a AMD a trojúhelníky EFX a MBD jsou tedy podobné, takže

$$\frac{|GE|}{|EX|} = \frac{|AM|}{|MD|}, \qquad \frac{|EF|}{|EX|} = \frac{|MB|}{|MD|}.$$

Odtud snadno plyne, že je

$$\frac{|GE|}{|EF|} = \frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AM|}{|AB| - |AM|} = \frac{1}{\frac{|AB|}{|AM|} - 1} = \frac{t}{1-t}.$$



Obr. 74

Jiné řešení. Protože podle věty o obvodových a úsekových úhlech platí (obr. 74) $|\sphericalangle CEF| = |\sphericalangle DEG| = |\sphericalangle EMD|$ a zároveň také $|\sphericalangle ECF| = |\sphericalangle MAD|$, jsou trojúhelníky ECF a MAD podobné. Zároveň ale je i $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$ a $|\sphericalangle GEC| = \pi - |\sphericalangle CEF| = \pi - |\sphericalangle EMD| = |\sphericalangle BMD|$, takže i trojúhelníky GEC a DMB jsou podobné. Porovnáním odpovídajících stran dostaneme

$$\frac{|GE|}{|MD|} = \frac{|CE|}{|MB|}, \qquad \frac{|AM|}{|CE|} = \frac{|MD|}{|EF|},$$

takže

$$\frac{|GE|}{|EF|} = \frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AM|}{|AB| - |AM|} = \frac{1}{\frac{|AB|}{|AM|} - 1} = \frac{t}{1-t}.$$

2 (podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha). Označme uvažované body postupně $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-2}$ a uvažujme posloupnost $A_0, A_{n-2}, A_{2n-4}, \ldots, A_{3n-6} = A_{n-5}, \ldots$, v níž každé dva následující body obsahují mezi sebou $n-3$ body na jednom oblouku a n bodů na druhém oblouku (přitom zřejmě je $A_k = A_l$ pro $k = l \pmod{2n-1}$). Tato posloupnost se po konečném počtu kroků zacyklí, protože daných bodů je jen konečný počet. Dané body se tak rozpadnou do $z = D(n-2, 2n-1)$ cyklů po $\dfrac{2n-1}{z}$ bodech. Protože $(2n-1) - 2(n-2) = 3$, je $z = 1$ nebo $z = 3$.

Daná množina E bude zřejmě dobře obarvená, právě když v uvedené posloupnosti budou některé dva sousední body černé. Položme $2m - 1 = \dfrac{2n-1}{z}$. Pokud je v každém z cyklů méně než m černých bodů, snadno sestrojíme příklad obarvení, jež nebude dobré (body v každém cyklu budeme střídavě obarvovat). Bude-li naopak aspoň v jednom z cyklů m černých bodů, bude už množina dobře obarvená, protože ať jsou body obarveny jakkoli, budou dva z černých bodů sousední.

Pro $z = 1$ (tj. $n \neq 2 \pmod 3$) vyjde jediný cyklus a z předchozí úvahy je zřejmé, že hledané nejmenší k je rovno n. Pro $z = 3$ (tj. $n = 2 \pmod 3$) dostaneme tři cykly po $2m - 1 = \frac{1}{3}(2n-1)$ bodech, takže pro $n - 2 = 3(m-1)$ snadno sestrojíme příklad „špatného“ obarvení, zatímco pro $k = n - 1$ aspoň jeden z cyklů obsahuje aspoň m černých bodů, tj. každé takové obarvení je dobré. Hledané nejmenší k je v tomto případě $k = n - 1$.

3. Protože číslo $2^n + 1$ je liché, je i n liché. Označme p nejmenší prvočinitel čísla n, je tedy $p \geqq 3$ a zároveň $2^n = -1 \pmod p$. Uvažujme teď nejmenší přirozené číslo i, pro které platí $2^i = -1 \pmod p$. Protože podle malé věty Fermatovy je $2^{p-1} = 1 \pmod p$, začnou se nejpozději od

$(p-1)$-ní mocniny zbytky čísel $2^0, 2^1, \ldots, 2^{p-1}$ cyklicky opakovat, takže je určitě $i < p-1 < n$.

Pišme $n = ki + r$, kde pro zbytek r platí $0 \leqq r \leqq i-1$. Protože $-1 = 2^n = 2^{ki} \cdot 2^r = (-1)^k 2^r \pmod p$, musí být k liché a zároveň $2^r = 1 \pmod p$, jinak bychom dostali $2^r = -1 \pmod p$, což odporuje volbě i. Kdyby však bylo $r > 0$, mohli bychom psát $i = r + d$, kde $1 \leqq d = i - r < i$, takže $-1 = 2^i = 2^r \cdot 2^d = 2^d$, což opět odporuje volbě čísla i. Vychází tedy nutně $r = 0$, takže $n = ki$, a protože $i < p$ dělí číslo n, musí být $i = 1$ (jako p jsme označili nejmenší prvočinitel čísla n). To ale znamená, že je $2 = -1 \pmod p$, neboli $p = 3$.

Předpokládejme teď, že n je tvaru $n = 3^k m$, kde $k \geqq 1$ a čísla 3 a m jsou nesoudělná. Podle předpokladu $n^2 = 3^{2k}m^2$ dělí

$$\begin{aligned} 2^n + 1 = (3-1)^n + 1 &= -\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i 3^i = \\ &= 3^{k+1}m - \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i 3^i. \end{aligned} \tag{1}$$

Přitom koeficienty $\binom{n}{i} 3^i = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!} 3^i$ jsou pro $i \geqq 2$ dělitelné aspoň 3^{k+2}. To plyne z toho, jak velká je mocnina čísla 3 v rozkladu čísla $i!$ na prvočinitele. Pro exponent α v rozkladu $i! = 3^\alpha d$ platí (viz též např. úlohu 34–A–I–2 v příslušné ročence MO)

$$\alpha = \left[\frac{i}{3}\right] + \left[\frac{i}{3^2}\right] + \ldots < i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{i}{2}$$

(ostrá nerovnost proto, že na levé straně nerovnosti je ve skutečnosti jen konečný počet nenulových sčítanců, zatímco na pravé straně je nekonečná geometrická řada!), takže celková mocnina 3 v součtu $\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i 3^i$ je aspoň $k - \frac{1}{2}i + 1 + i = k + \frac{1}{2}i + 1 \geqq k + 2$.

Z vyjádření (1) tudíž plyne, že $2^n + 1$ je dělitelné nejvýše 3^{k+1}, tedy nutně $2k \leqq k + 1$, tj. $k = 1$, a vidíme, že n je tvaru $n = 3m$, kde 3 a m jsou nesoudělná.

Označme q nejmenší prvočinitel čísla m, pak je $q \geqq 5$ a zároveň $2^n = -1 \pmod{q}$. Označme j nejmenší přirozené číslo takové, že $2^j = -1 \pmod{q}$. Úplně stejně jako v první části tohoto řešení nám vyjde, že $j < q - 1$ a že j dělí $n = 3m$. Protože q je nejmenší prvočinitel čísla m, musí j být dělitelem čísla 3, tj. $j \in \{1, 3\}$. Z kongruence $2^j = -1 \pmod{q}$ ale plyne, že je buď $q \mid 3$ nebo $q \mid 9$, neboli $q = 3$, což odporuje tomu, že $q \geqq 5$. Celkem jsme tedy dokázali, že $n = 3$ je pro $n \geqq 3$ jediná možnost, kdy n^2 dělí $2^n + 1$.

4. Z uvedené rovnice plyne, že hledaná funkce musí být prostá: je-li $f(y_1) = f(y_2)$, pak pro každé $x \in \mathbb{Q}^+$ vychází $y_1 = y_2$. Dosazením $y = 1$ dostaneme $f(xf(1)) = f(x)$, takže vzhledem k prostotě funkce f musí být $f(1) = 1$. A konečně pro $x = 1$ vychází vztah

$$f(f(y)) = \frac{1}{y}, \tag{1}$$

neboli

$$f\Big(\frac{1}{y}\Big) = f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)},$$

což po dosazení $x = u$, $y = f\left(\frac{1}{v}\right)$ do původní funkcionální rovnice dává rovnost

$$f(uv) = f(u)f(v) \tag{2}$$

pro všechna u, $v \in \mathsf{Q}^+$.

Obráceně je zřejmé, že každá funkce f, jež splňuje rovnosti (1), (2), vyhovuje dané funkcionální rovnici.

Podle (2) pro libovolné přirozené číslo $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ musí platit

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \dots f(p_k)^{\alpha_k}$$

a zároveň pro každé racionální číslo tvaru p/q je

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)}.$$

Stačí tedy funkci f definovat na prvočíslech tak, aby platilo (1), tj. aby funkce $f^2 = f \circ f$ zaměňovala čitatel za jmenovatel a obráceně, tedy aby pro $p \neq q$ platilo

$$f(p) = q, \quad \text{právě když} \quad f(q) = f(f(p)) = \frac{1}{p}.$$

Stačí proto rozdělit všechna prvočísla do dvou disjunktních podmnožin A, B a sestrojit vzájemně jednoznačné přiřazení těchto dvou množin.

Jedna z možných konstrukcí je takováto: Označme $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost všech prvočísel a položme

$$f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1} & \text{pro } j \text{ liché,} \\ \dfrac{1}{p_{j-1}} & \text{pro } j \text{ sudé.} \end{cases}$$

Díky multiplikativitě (2) snadno rozšíříme definici funkce f na celou množinu Q^+.

5 (podle P. Hliněného, 4. ročník GMK, Bílovec). Jestliže pro nějaké $k \geqq 0$ platí

$$45 \leqq n_{2k} \leqq 1\,990,$$

pak vyhrává hráč A, protože může rovnou zvolit $n_{2k+1} = 1\,990$ (je $1\,990 < 45^2 = 2\,025 \leqq n_{2k}^2$).

Předpokládejme, že pro nějaké $k \geqq 0$ je $n_{2k} > 1\,990$. Pak pro vhodné $i \geqq 1$ můžeme psát

$$47^{i-1} \cdot 53 < n_{2k} \leqq 47^i \cdot 53$$

a A vyhraje tak, že zvolí $n_{2k+1} = 47^i \cdot 53$, protože hráči B pak nezbývá nic jiného než zvolit $n_{2k+2} = 47^i$ nebo $n_{2k+2} = 47^j \cdot 53$ pro $j < i$. V každém případě bude $47 \leqq n_{2k+2} \leqq 53 \cdot 47^{i-1} < n_{2k}$, takže v případě, že A pokračuje obdobně i v dalších krocích, po konečném počtu kroků bude muset B zvolit číslo $n_{2l} < \ldots < n_{2k+2} < n_{2k}$, pro něž $47 \leqq n_{2l} \leqq 1\,990$. Proto i v tomto případě má A vyhrávající strategii.

Je-li $11 \leqq n_{2k} < 45$ pro nějaké $k \geqq 0$, pak A zvolí $n_{2k+1} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ (což může: je $n_{2k+1} < 121 \leqq n_{2k}^2$). Hráč B musí volit z čísel $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 6$, takže $15 \leqq n_{2k+2} \leqq 35$, A pak zvolí $n_{2k+3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 < 225 \leqq n_{2k+2}^2$. Nyní B musí volit n_{2k+4} z čísel $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 7$, $2 \cdot 5 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, pro něž vesměs platí $30 \leqq n_{2k+4} \leqq 70$, takže A pak může zvolit $n_{2k+5} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840 < 900 \leqq n_{2k+4}^2$. Po tomto tahu má B nejmenší možnou volbu $n_{2k+6} = 3 \cdot 5 \cdot 7 > 105$, takže podle předchozích úvah má vyhrávající strategii A.

Je-li $8 \leqq n_0 < 11$, má hráč A rovněž vyhrávající strategii — stačí, když zvolí $n_1 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 < 8^2 \leqq n_0^2$, protože B pak má na vybranou z čísel $4 \cdot 3$, $4 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, pro něž je vesměs $n_2 \geqq 12$. A pro takové n_2 už známe vyhrávající strategii hráče A.

Jestliže pro nějaké $k \geqq 0$ je $n_{2k} \leqq 5$, pak A musí zvolit číslo mezi 5 a 25. Nesmí volit mocninu prvočísla — to by vyhrál B. Má tedy následující možnosti (1. řádek tabulky)

(A) n_{2k+1}	6	10	12	14	15	18	20	21	22	24
(B) n_{2k+2}	2	2	3	2	3	2	4	3	2	3

Na každou z nich odpoví hráč B volbou čísla $n_{2k+2} \leqq 4$, takže teď už A může volit čísla jen z levé poloviny tabulky, jež jsou nejvýše rovna 16; pro ně ale pak bude $n_{2k+4} \leqq 3$, takže A může podle tabulky zvolit jen $n_{2k+5} = 6$, na což odpoví B $n_{2k+6} = 2$ a zřejmě vyhraje. V tomto případě má tedy vyhrávající strategii hráč B.

Pro $n_0 = 6, 7$ nemá žádný z obou hráčů vyhrávající strategii. Hráč A, aby vyhrál, nesmí volit ani mocninu prvočísla, ani číslo, jež ve svém rozkladu na prvočinitele obsahuje jen dvě prvočísla, z nichž jedno je nejvýše 5. To jsme viděli v předchozím případu! Hráč A tedy musí volit jedno z čísel $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ nebo $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, jež obsahují aspoň tři prvočinitele, B pak musí volit $n_2 = 6$, jinak podle předchozích úvah umožní výhru hráči A (musí volit nejvýše 7). Hráč A pak musí pokračovat opět jedním z čísel 30, 42 a hra při správné hře obou hráčů skončí nerozhodně.

Ukázali jsme, že pro $n_0 \leqq 5$ má vyhrávající strategii hráč B, pro $n_0 = 6, 7$ nemá žádný z hráčů vyhrávající strategii a pro $n_0 \geqq 8$ existuje vyhrávající strategie pro hráče A.

6 (podle Š. Kasala, 3. ročník GWP, Praha). Budeme hledat 1 990 vektorů v (komplexní) rovině, jež mají směry všech různých 1 990. odmocnin z jednotky, mají v nějakém pořadí velikosti 1^2, 2^2, ..., $1\,990^2$ a dávají nulový součet.

Vektory délek $(2k)^2$ a $(2k-1)^2$ $(1 \leqq k \leqq 995)$ budeme přitom umisťovat tak, aby měly opačný směr a vektor velikosti $(2k)^2$ měl směr některé 995. odmocniny z jednotky. Součtem takto umístěné dvojice vektorů pak bude vektor délky $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1$ a směru příslušné 995. odmocniny z jednotky. Jinými slovy, potřebujeme rozmístit 995 vektorů $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{994}$, jejichž délky tvoří aritmetickou posloupnost $(4k-1)_{k=1}^{995}$, mají směry všech různých 995. odmocnin z jednotky a jejich součtem je nulový vektor. Bez újmy na obecnosti můžeme ovšem předpokládat, že jejich délky tvoří aritmetickou posloupnost 0, 1, ..., 994.

Označme $p_0 = 1, p_1, \ldots, p_4$ komplexní jednotky odpovídající vrcholům pravidelného pětiúhelníku (5. odmocniny z jednotky) a $d_0 = 1, d_1, \ldots, d_{198}$ komplexní jednotky odpovídající vrcholům pravidelného 199úhelníku. Je tedy

$$\sum_{i=0}^{198} d_i = \sum_{j=0}^{4} p_j = 0.$$

Odtud plyne, že pro každé i, $0 \leqq i \leqq 198$, je také

$$\sum_{j=0}^{4} (5i + j) d_i p_j = 5 i d_i \sum_{j=0}^{4} p_j + d_i \sum_{j=0}^{4} j p_j = d_i \sum_{j=0}^{4} j p_j,$$

takže

$$\sum_{i=0}^{198} \sum_{j=0}^{4} (5i+j) d_i p_j = \sum_{i=0}^{198} d_i \sum_{j=0}^{4} j p_j = \sum_{j=0}^{4} j p_j \sum_{i=0}^{198} d_i = 0. \quad (1)$$

Stačí tedy vzít vektory $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{994}$, jimž budou při umístění do počátku odpovídat koncové body

$$v_{5i+j} = (5i + j)p_i d_j .$$

Podle (1) pak bude $\sum\limits_{k=0}^{994} \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$. Z nich pak snadno sestrojíme 1 990 vektorů $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{1\,989}$, jež budou tvořit strany hledaného 1 990úhelníku.

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že stačí volit

$$\begin{gathered} u_{10i+2j+1} = -(10i + 2j + 1)^2 p_i d_j , \\ u_{10i+2j+2} = (10i + 2j + 2)^2 p_i d_j , \\ (0 \leqq i \leqq 198,\ 0 \leqq j \leqq 4). \end{gathered}$$

Odpovídající vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{1\,990}$ pak umístíme tak, aby počátek $\boldsymbol{u}_{i+1}$ splýval s koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{u}_i$.

Poznámka. Jiná možnost, jak z kvadratické posloupnosti n^2 sestrojit aritmetickou posloupnost, je vzít dvojice $(996 + k)^2$ a $(995 - k)^2$. Výsledný vektor pak bude mít velikost $(996 + k)^2 - (995 - k)^2 = 1\,991 + 2 \cdot 1\,991k$ $(0 \leqq k \leqq 994)$.