36. ročník matematické olympiády na středních školách

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář je jednou z forem péče o talentované žáky. Vznikl ve 24. ročníku MO proto, aby bylo možno věnovat individuální péči i těm žákům, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy a pracovat v tamních seminářích. Tyto úkoly však již plní i krajské korespondenční semináře, které postupně vznikly ve všech krajích. Navíc speciální školy se zaměřením na matematiku už dávno nejsou výsadou jen »hlavních měst« Prahy a Bratislavy, ale najdeme je teď v každém kraji. Neúčast žáků speciálních škol se tak v poslední době stala jistým anachronismem. Z toho plynula i poměrně malá korelace mezi umístěním v korespondenčním semináři a výsledky celostátního kola kategorie A. PÚV MO se proto rozhodl zaměřit korespondenční seminář výrazněji na přípravu reprezentantů pro mezinárodní matematickou olympiádu.

K účasti v korespondenčním semináři jsme tentokrát pozvali všechny špičkové řešitele kategorie A bez ohledu na jejich školní příslušnost spolu s těmi studenty, kteří nějak vynikli v krajských kolech kategorie B či C předchozího ročníku MO. Vybrali jsme tak téměř 50 studentů, z nichž se přihlásilo 37 řešitelů ze všech krajů republiky.

Kraj	Pha	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Bva	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	1	2	2	2	4	7	4	3	6	1	2	3

V průběhu 35. ročníku MO jim bylo postupně zasláno 5 sérií poměrně náročných úloh. Jednotlivé série tentokrát nebyly monotematické, naopak jsme se snažili pokrýt celou problematiku olympiádních úloh. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Všechna kola semináře absolvovalo 12 řešitelů, nejlepšími v celkovém hodnocení byli

1. *Ilja Martišovitš*, G J. Hronca, Bratislava,
2. *Vladan Majerech*, G Pardubice,
3. *Marian Lukáč*, G Bánovce n. Bebravou,
4. *Zdeněk Tryner*, G J. Fučíka, Plzeň,
5. *Stanislav Krajči*, G Košice, Šmeralova,
6. *Petr Čížek*, G W. Piecka, Praha,
7. *Ondrej Šuch*, G Žilina, Veľká Okružná.

O náročnosti zadaných úloh svědčí i to, že pouze prvních pět řešitelů dosáhlo aspoň 50 % možných bodů.

Korespondenční seminář byl řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. Karlem Horákem, který se staral o výběr a přípravu úloh a prováděl i redakci komentářů. Opravu pak zajišťovalo několik pracovníků MÚ ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK Praha (všichni jsou bývalí olympionici). Uvádíme znění všech zadaných úloh.

1.1 Na povrchu jednotkové koule leží kružnice $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ poloměru r ($n \geqq 3$). Kružnice γ_0 se dotýká všech kružnic $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ a rovněž dvojice kružnic γ_1 a γ_2, γ_2 a $\gamma_3, \ldots, \gamma_n$ a γ_1 se dotýkají. Pro jaká n je to možné? Spočtěte příslušný poloměr r.

1.2 Je dán konvexní čtyřúhelník a čtyři kruhy se středy v jeho vrcholech takové, že ho celý pokrývají. Dokažte, že z daných kruhů můžeme vybrat tři tak, že pokrývají trojúhelník určený jejich středy.

1.3 Některé stěny bílého konvexního mnohostěnu jsou obarveny černě, přičemž žádné dvě černé stěny nemají společnou hranu. Dokažte, že mnohostěnu nelze vepsat kulovou plochu, je-li splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

a) černých stěn je více než polovina;

b) obsah černých stěn tvoří více než polovinu povrchu mnohostěnu.

1.4 Je možné rozložit rovnostranný trojúhelník na milión konvexních mnohoúhelníků tak, aby jich libovolná přímka protínala nejvýše čtyřicet? (Říkáme, že přímka protíná mnohoúhelník, jestliže s ním má společný aspoň jeden bod.)

1.5 Označme $s(n)$ ciferný součet přirozeného čísla n. Pro jaká přirozená čísla k existuje kladné číslo c_k takové, že pro všechna přirozená N platí

$$\frac{s(kN)}{s(N)} \geqq c_k\,?$$

Pro dané k najděte největší takové c_k $\left(\text{např. pro } k = 8 \text{ je } c_k = \frac{1}{8}\right)$.

1.6 Body P, Q se pohybují po dvou různoběžných přímkách stejnou konstantní rychlostí. Dokažte, že v rovině různoběžek existuje bod A, od něhož mají body P, Q vždy stejnou vzdálenost.

1.7 Dokažte, že čísla $1, 2, \ldots, n$ nelze rozdělit na dvě skupiny tak, aby se součin čísel v jedné skupině rovnal součinu čísel ve druhé skupině.

2.1 V jedné zemi, kde vládne prezident Miraflores, mají být nové prezidentské volby. V zemi je právě 20 miliónů voličů; z nichž pouze 1 procento (pravidelná armáda) podporuje Mirafloresе. Miraflores přirozeně chce být opět zvolen, ale chce také, aby volby proběhly »demokraticky«, tj. všichni voliči jsou rozděleni do několika stejně velkých skupin, každá ze skupin je znovu rozdělena na stejně velké skupiny, atd.; v těch posledních, nejmenších skupinách si její členové zvolí zástupce, pak si zvolení zástupci zvolí svého zástupce ve větší skupině, atd. Nakonec zvolení zástupci prvních (největších) skupin zvolí nového prezidenta. Miraflores sám dělí voliče do skupin a instruuje své zastánce, jak mají hlasovat. Může zorganizovat »demokratické volby« tak, aby byl opět zvolen prezidentem? (Při rovnosti hlasů vítězí opozice.)

2.2 Dva hráči hrají následující hru: Z hromádky 25 zápalek každý postupně odebere jednu, dvě nebo tři zápalky. Vyhrává ten, který bude mít nakonec (když hromádku rozeberou) sudý počet zápalek. Kdo vyhraje při správné hře — začínající hráč, nebo jeho soupeř? Jak má hrát, aby vyhrál? Jak se změní odpověď, jestliže vítězem bude ten, který získá lichý počet zápalek?

2.3 Je dána úsečka AB. Najděte množinu bodů C v rovině takových, že v trojúhelníku ABC je délka těžnice z vrcholu A rovna výšce z vrcholu B.

2.4 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ jsou zapsána nezáporná čísla tak, že součet čísel v každém řádku a v každém sloupci je 1. Dokažte, že můžeme v tabulce najít n kladných čísel, z nichž žádná dvě nejsou v témže sloupci, ani v témže řádku.

2.5 Dno obdélníkové krabičky je pokryto destičkami rozměrů 2×2 a 1×4. Po vysypání destiček se jedna destička 2×2 ztratila. Místo ní se podařilo opatřit destičku 1×4. Je možno pokrýt opět celé dno krabičky?
Řešte analogickou úlohu pro destičky tvaru  a destičky 1×3.

2.6 Dokažte, že v tabulce

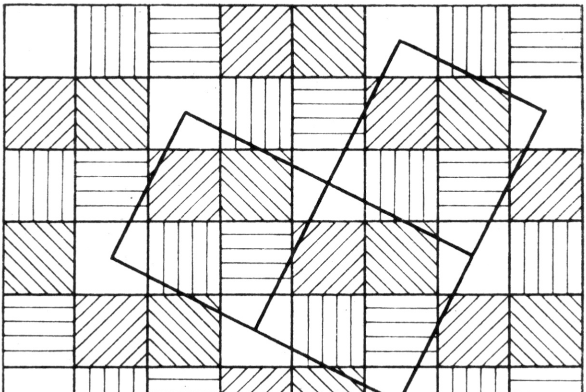
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

(kde každé číslo je rovno součtu tří čísel v řádku nad ním) je v každém řádku počínaje třetím aspoň jedno sudé číslo. Obsahuje každý řádek číslo dělitelné třemi?

2.7 Nechť tři kružnice stejného poloměru procházejí jedním bodem. Pak tři další průsečíky jednotlivých kružnic leží na kružnici téhož poloměru. Dokažte.

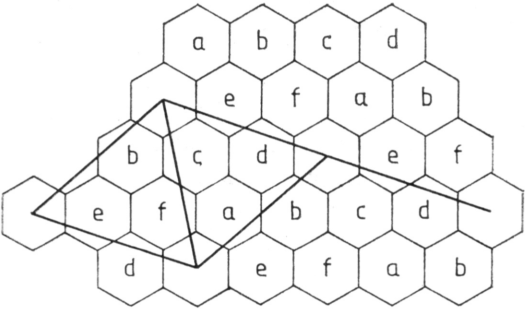
3.1 Na obr. 36 je rovina pokryta čtverci pěti barev. Středy čtverců téže barvy leží ve vrcholech čtvercové sítě, přičemž příslušné čtvercové sítě dostaneme vzájemným posunutím. S jakým počtem barev lze takového pokrytí dosáhnout?

Na obr. 37 je rovina pokryta pravidelnými šestiúhelníky



Obr. 36

sedmi barev tak, že středy šestiúhelníků stejné barvy leží ve vrcholech pravidelné trojúhelníkové sítě. Přitom jednotlivé sítě dostaneme vzájemným posunutím. S jakým počtem barev lze takového pokrytí dosáhnout?



Obr. 37

3.2 Jsou-li $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nenulová celá čísla a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ navzájem různá přirozená čísla, která nejsou dělitelná druhou mocninou žádného celého čísla různého od 1, pak

$$b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots + b_n\sqrt{a_n} \neq 0.$$

Dokažte.

3.3 Je dána kružnice k a přímka p. Označme A patu kolmice spuštěné ze středu kružnice k na přímku p. Zvolme na přímce p dva různé body B, C tak, že $|AB| = |AC|$, a veďme body B a C přímky, které protnou kružnici k v bodech P, Q a M, N. Předpokládejme, že přímky PM a QN

protnou přímku p v bodech R, S, pak je $|AR| = |AS|$. Dokažte.

3.4 Nechť pro každé dva body A, B konečné množiny M bodů v rovině existuje bod $C \in \mathsf{M}$ takový, že trojúhelník ABC je rovnostranný. Kolik bodů může obsahovat množina M?

3.5 Zjistěte, kolik řešení má soustava rovnic

$$x^2 + y^2 + xy = a$$

$$x^2 - y^2 = b$$

pro reálná čísla a, b.

3.6 Na nekonečném listu čtverečkovaného papíru je n čtverečků obarveno černě. Dokažte, že existuje konečný počet čtverců, pro něž současně platí:

a) vybrané čtverce obsahují všechny černé čtverečky,

b) v libovolném z vybraných čtverců zaujímají černé čtverečky alespoň $\frac{1}{5}$ a ne více než $\frac{3}{5}$ obsahu celého čtverce.

3.7 Rovinný útvar, jehož žádné dva body nemají vzdálenost 0,001, je částí jednotkového čtverce. Dokažte, že obsah tohoto útvaru je nejvýše 0,34. Pokuste se najít přesnější odhad a dokázat analogické tvrzení v prostoru.

4.1 Na 44 stromech zasázených na hranici kruhu sedí 44 ptáčků zpěváčků (na každém stromě jeden). Čas od času dva z nich současně přeletí na sousední stromy v opačných směrech (jeden ve směru a druhý proti směru hodinových ručiček). Dokažte, že nikdy nebudou všichni ptáci na stejném stromě. A je-li stromů i ptáčků n?

4.2 Jsou dány tři shodné kružnice k_1, k_2, k_3, které se vzájemně dotýkají, a kružnice k, která je jim opsána. Vedeme-li bodem $M \in k$ tečny ke kružnicím k_1, k_2, k_3, pak je vzdálenost bodu M od jednoho z bodů dotyku rovna součtu vzdáleností od druhých dvou. Dokažte.

4.3 a) Rovinnému úhlu jsou vepsány dvě kružnice, které mají společnou ještě další tečnu T_1T_2 (s body dotyku T_1, T_2), která protíná ramena úhlu v bodech A_1, A_2. Dokažte, že $|A_1T_1| = |A_2T_2|$.

b) Úhlu jsou vepsány dvě kružnice, které se dotýkají jeho ramen v bodech K_1, K_2, resp. L_1, L_2. Dokažte, že přímka K_1L_2 vytíná na obou kružnicích shodné tětivy.

4.4 Jestliže n-prvková množina E má m různých vlastních podmnožin takových, že libovolné dva prvky E jsou právě v jedné z uvedených podmnožin, pak $m \geqq n$. Dokažte. V jakých případech může být $m = n$?

4.5 Jestliže

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

tak

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Dokažte.

4.6 a) Z 19 kuliček jsou 2 radioaktivní. Jedním měřením lze zjistit, obsahuje-li zvolený soubor kuliček nějakou radioaktivní či nikoli (ale nelze zjistit počet radioaktivních kuliček). Dokažte, že osmi měřeními lze určit obě radioaktivní kuličky.

b) Z 11 kuliček jsou 2 radioaktivní. Dokažte, že při méně než 7 měřeních nelze zaručit jejich nalezení.

4.7 Ve všech polích tabulky 100×100 jsou napsány plusy. Je dovoleno změnit současně všechna znaménka jednoho sloupce nebo řádku. Je možné po několika takových operacích dostat tabulku s 1 970 minusy?

5.1 Na nekonečném listu čtverečkovaného papíru je n čtverečků obarveno černě. Dokažte, že existuje konečný počet disjunktních čtverců s vrcholy v uzlech sítě, pro něž současně platí:

a) vybrané čtverce obsahují všechny černé čtverečky,

b) v libovolném z vybraných čtverců zaujímají černé čtverečky alespoň $\frac{1}{5}$ a ne více než $\frac{4}{5}$ obsahu celého čtverce.

5.2 Pro $m > 1$ přirozené řešte v oboru celých nezáporných čísel rovnici

$$x^2 - mxy + y^2 = 1.$$

5.3 Na kartičkách jsou zapsána čísla 11 111, 11 112, ..., 99 999. Ať seřadíme jednotlivé kartičky jakkoli, 444 445-ciferné číslo, které tak dostaneme, nebude nikdy mocninou dvojky. Dokažte.

5.4 V trojúhelníku ABC označme V střed kružnice vepsané a M střed strany BC. Označíme-li E průsečík výšky AH trojúhelníku ABC s přímkou MV, má úsečka AE délku poloměru kružnice vepsané. Dokažte.

5.5 V rovině jsou dány tři přímky procházející jedním bodem a další bod A na jedné z nich. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy úhlů jsou dané přímky.

5.6 Dva mudrci hrají následující hru s čísly 0, 1, 2, ..., 1 024. První mudrc vyškrtne 512 čísel, druhý dalších 256 čísel, pak zas první vyškrtne dalších 128 a druhý 64 čísel, atd. Pátým tahem vyškrtne druhý jedno číslo, takže zbudou právě dvě čísla, a druhý zaplatí prvnímu jejich rozdíl. Jak má hrát první hráč, aby dostal co nejvíc? A jak druhý, aby platil co nejméně? Kolik mu zaplatí, budou-li oba hrát co nejlépe?

5.7 V rovině jsou dány body P, Q ležící v téže polorovině určené přímkou p. Na přímce p najděte bod M, pro který je vzdálenost pat výšek trojúhelníku PQM ke stranám PM a QM nejmenší.