35. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategorie Z8

In: Milan Koman (editor); Leo Boček (editor); Vladimír Repáš (editor): 35. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 20–62.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404826

Kategorie Z8

ÚLOHY I. KOLA

Z8 - I - 1

Najděte všechny dvojice dvojciferných čísel, které mají tyto vlastnosti:

a) jejich součet je dělitelný číslem 23,

b) odečteme-li od většího čísla menší, dostaneme číslo dělitelné číslem 29.

Řešení. Větší z hledaných čísel označíme A, menší B. Protože to jsou dvojciferná čísla, musí pro jejich součet a rozdíl platit

$$21 \leqq A + B \leqq 197, \qquad 1 \leqq A - B \leqq 89. \tag{1}$$

Podle zadání úlohy je součet $A + B$ násobek čísla 23 a rozdíl $A - B$ násobek čísla 29. Tedy

$$21 \leqq A + B = 23k \leqq 197, \tag{2}$$
$$1 \leqq A - B = 29h \leqq 89. \tag{3}$$

Odtud dostaneme podmínky pro celá čísla k a h. Z nerovností (2) plyne

$$\frac{21}{23} \leqq k \leqq \frac{197}{23}$$

neboli

$$1 \leqq k \leqq 8. \tag{4}$$

Podobně z nerovností (3) plyne

$$\frac{1}{29} \leqq h \leqq \frac{89}{29}$$

neboli

$$1 \leqq h \leqq 3. \tag{5}$$

Pro k máme 8 možností, pro h máme 3 možnosti. Stačí tedy prozkoumat $8 . 3 = 24$ možných dvojic k a h.

Řešení si však ještě usnadníme. Sečtením a odečtením rovností ve vztazích (2) a (3) dostaneme

$$2A = 23k + 29h \tag{6}$$

$$2B = 23k - 29h. \tag{7}$$

Protože levé strany jsou sudá čísla, musí být i pravé strany sudá čísla. To může nastat jedině v případě, že čísla k a h jsou buď obě sudá, nebo obě lichá.

Protože $99 \geqq A$, plyne z rovnosti (6)

$$198 \geqq 23k + 29h \tag{8}$$

neboli

$$198 - 29h \geqq 23k.$$

Protože h je aspoň 1, plyne odtud

$$198 - 29 \geqq 23k,$$

takže $k \leqq 7$.

Protože $B \geqq 10$, plyne z rovnosti (7)

$$20 \leqq 23k - 29h \tag{9}$$

neboli

$$20 + 29h \leqq 23k.$$

Protože h je aspoň 1, plyne z poslední nerovnice

$$20 + 29 \leqq 23k,$$

takže $k \geqq 2$.

Z provedených dodatečných úvah vyplývá, že místo 24 případů pro dvojice čísel k a h stačí vyšetřit jen 9 případů:

a) $h = 1$ a $k = 3, 5, 7$
b) $h = 2$ a $k = 2, 4, 6$
c) $h = 3$ a $k = 3, 5, 7$

Tyto hodnoty dosadíme postupně do rovností (6) a (7). Dostaneme celkem pět řešení dané úlohy. Jsou to:

$A = 49, B = 20$ pro $h = 1$ a $k = 3$

$A = 72, B = 43$ pro $h = 1$ a $k = 5$

$A = 95, B = 66$ pro $h = 1$ a $k = 7$

$A = 75, B = 17$ pro $h = 2$ a $k = 4$

$A = 98, B = 40$ pro $h = 2$ a $k = 6$

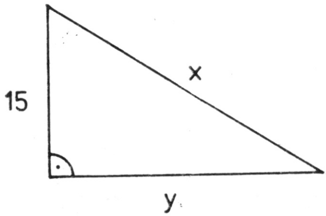
Žádné jiné řešení neexistuje.

Z8 - I - 2

Délky stran pravoúhlých trojúhelníků jsou vyjádřeny přirozenými čísly a jedna z odvěsen má délku 15. Zjistěte všechny pravoúhlé trojúhelníky s uvedenými vlastnostmi.

Řešení. Délky stran označíme podle obrázku 1. Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 = 15^2 + y^2. \tag{1}$$



Obr. 1

Odtud dostaneme

$$x^2 - y^2 = 15^2.$$

Rozdíl na levé straně rozložíme v součin

$$(x + y)(x - y) = 225.$$

Rozložíme i číslo 225 na součin dvou činitelů. Jsou pouze tyto možnosti:

$$225 = 1.225 = 3.75 = 5.45 = 9.25 \tag{2}$$

Protože čísla x, y jsou kladná, je $x + y > x - y$. Proto v rozkladech (2) musí být první činitel roven $x - y$ a druhý činitel musí být $x + y$. Dostaneme čtyři soustavy rovnic:

(S1) $x - y = 1$, $x + y = 225$

(S2) $x - y = 3$, $x + y = 75$

(S3) $x - y = 5$, $x + y = 45$

(S4) $x - y = 9$, $x + y = 25$

Řešením těchto soustav dostaneme délky neznámých stran čtyř možných pravoúhlých trojúhelníků daných vlastností.

Zadání úlohy proto vyhovují čtyři trojúhelníky s délkami stran:

T1:	15,	112,	113	T3:	15,	20,	25
T2:	15,	36,	39	T4:	15,	8,	17

Snadno sami ověříte, že ve všech čtyřech případech jsou pro délky stran splněny trojúhelníkové nerovnosti. Pomocí Pythagorovy věty se můžete také přesvědčit, že všechny čtyři trojúhelníky jsou pravoúhlé.

Poznámka. Všimněte si, že na konci řešení úlohy Z8-I-2 nemusíte ani trojúhelníkové nerovnosti ověřovat. Jestliže pro tři kladná čísla x, y, z platí

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

pak tato čísla splňují i trojúhelníkové nerovnosti a jsou to tedy délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Snadno to dokážeme. Protože z je zřejmě největší z čísel x, y, z, stačí dokázat nerovnost

$$z < x + y.$$

Ale to je jednoduché:

$$z^2 = x^2 + y^2 < x^2 + 2xy + y^2$$

Tedy

$$z^2 < (x + y)^2$$
$$z < x + y.$$

Z8 - I - 3

Zjistěte hodnotu výrazu

$$\frac{11(6^2 + 5^2)(6^4 + 5^4)(6^8 + 5^8)(6^{16} + 5^{16})}{6^{32} - 5^{32}}.$$

Řešení. Protože

$$6^{32} = 6^{2.16} = (6^{16})^2, \quad 5^{32} = 5^{2.16} = (5^{16})^2,$$

můžeme jmenovatele rozložit podle známého vzorce pro rozdíl druhých mocnin:

$$6^{32} - 5^{32} = (6^{16} + 5^{16})(6^{16} - 5^{16})$$

V rozkladu můžeme pokračovat. Postupně dostaneme součiny:

$$\begin{aligned} &(6^{16} + 5^{16})(6^{16} - 5^{16}) = \\ &= (6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^8 - 5^8) = \\ &= (6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^4 + 5^4)(6^4 - 5^4) = \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &= (6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^4 + 5^4)(6^2 + 5^2)(6 + 5)(6 - 5) \end{aligned}$$

Přepíšeme-li v daném výrazu jmenovatele v tomto tvaru, můžeme bez výpočtů mocnin krátit. Snadno krácením vypočtete:

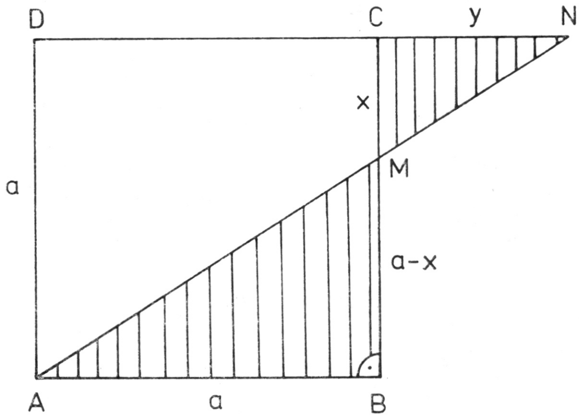
$$\frac{11.(6^2 + 5^2)(6^4 + 5^4)(6^8 + 5^8)(6^{16} + 5^{16})}{(6^{16} + 5^{16})(6^8 + 5^8)(6^4 + 5^4)(6^2 + 5^2)(6 + 5)(6 - 5)} = 1$$

Z8 - I - 4

Je dán čtverec $ABCD$ se stranou délky a. Vrcholem A vedeme libovolnou přímku, která protíná stranu BC ve vnitřním bodě M a prodloužení strany DC v bodě N. Dokažte, že

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{a}.$$

Řešení. Načrtneme si obrázek 2.



Obr. 2

Pro zjednodušení zápisu označíme $|CM| = x$, $|CN| = y$. Trojúhelníky ABM a NCM jsou podobné, neboť pro jejich vnitřní úhly platí:

$$\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle NCM \quad \text{(pravé úhly)}$$

$$\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle NMC \quad \text{(vrcholové úhly)}$$

$$\sphericalangle BAM \cong \sphericalangle CNM \quad \text{(střídavé úhly)}$$

(Pro odůvodnění podobnosti trojúhelníků ABM a NCM samozřejmě stačí uvést jen dvě z uvedených shodností úhlů.) Z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle ABM \sim \triangle NCM$$

plyne rovnost poměrů odpovídajících si dvojic stran:

$$x : y = (a - x) : a$$

Odtud vypočteme nejdříve $y = |CN|$ a pak $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{|CN|}$:

$$y = |CN| = \frac{a\,.\,x}{a - x}; \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{|CN|} = \frac{a - x}{a\,.\,x}$$

Dosadíme do levé strany rovnosti, kterou máme dokázat a upravíme ji.

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{a - x}{a\,.\,x} =$$
$$= \frac{a - (a - x)}{ax} = \frac{x}{ax}$$

Po krácení číslem $x > 0$ dostaneme opravdu $\dfrac{1}{a}$.

Z8 - I - 5

Ve třech nádobách je celkem 18 l vody. Polovinu vody z první nádoby přelili do druhé, pak jednu třetinu vody z druhé do třetí, a nakonec jednu čtvrtinu vody z třetí do první nádoby. Potom zůstalo ve všech nádobách stejné množství vody. Jaké množství vody bylo původně v každé nádobě?

1. řešení - pomocí rovnic. Množství vody v nádobách na začátku i po postupném přelévání zapíšeme do tabulky.

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
Na začátku	x	y	z
Po 1. přelití	$\frac{1}{2}x$	$y + \frac{1}{2}x$	z
Po 2. přelití	$\frac{1}{2}x$	$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x$	$z + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x$
Po 3. přelití	$\frac{13}{24}x + \frac{1}{12}y + \frac{1}{4}z$	$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x$	$\frac{3}{4}z + \frac{1}{4}y + \frac{1}{8}x$

Údaje v tabulce můžete překontrolovat, v každém řádku je součet $x + y + z$ a ten je samozřejmě roven číslu 18; tedy

$$x + y + z = 18.$$

Po posledním přelití je ve všech nádobách stejné množství vody, tj. 6 litrů. Tím dostaneme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{13}{24}x + \frac{1}{12}y + \frac{1}{4}z &= 6 \\
\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \phantom{+ \frac{1}{4}z} &= 6 \\
\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z &= 6 \\
\hline
x + y + z &= 18
\end{aligned}
$$

Dostáváme soustavu čtyř rovnic, ale jen pro tři neznámé. Ve skutečnosti však stačí pouze tři z nich, protože poslední rovnice je součtem předešlých tří. Jednu z rovnic můžeme vynechat, nejvhodnější je vynechat první rovnici. Budeme řešit soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \phantom{+ \frac{3}{4}z} &= 6 \\
\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z &= 6 \\
x + y + z &= 18
\end{aligned}
$$

Z prvních dvou rovnic odstraníme zlomky:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 18 \\
x + 2y + 6z &= 48 \\
x + y + z &= 18
\end{aligned}
$$

První rovnici odečteme od zbylých dvou rovnic. Dostaneme:

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\quad &= 18 \\ 6z &= 30 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}$$

Odtud již snadno postupně vypočítáme neznámé

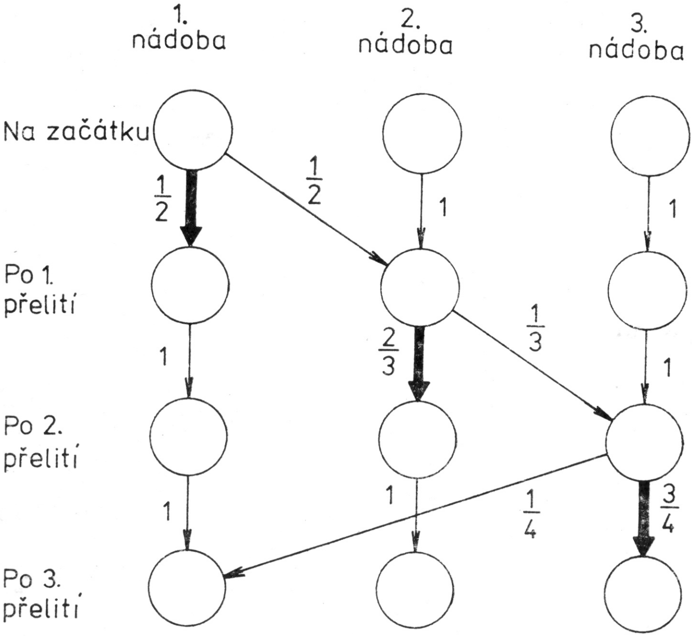
$$z = 5, \quad y = 5, \quad x = 8.$$

Protože řešíme slovní úlohu, je třeba provést ještě zkoušku:

	1. nádoba	2. nádoba	3. nádoba
Na začátku	8	5	5
Po 1. přelití	4	9	5
Po 2. přelití	4	6	8
Po 3. přelití	6	6	6

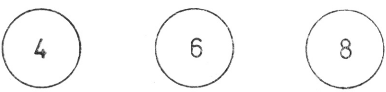
Původně bylo v 1. nádobě 8 litrů a ve zbylých dvou po 5 litrech.

2. řešení - úsudkem. Způsob přelévání a konečný stav znázorňuje šipkový diagram (str. 31). Úlohu budeme řešit od konce. Šipkový diagram si doplňte sami.



Po třetím přelití je ve všech nádobách po 6 litrech vody. Přitom ve 3. nádobě je těchto 6 litrů rovno $\frac{3}{4}$ stavu před přelitím.

To znamená, že při třetím přelití přibyly v 1. nádobě 2 litry a ve 3. nádobě naopak 2 litry ubyly. Stav v nádobách byl tedy před 3. přelitím:



Při druhém přelití zůstaly v 2. nádobě $\frac{2}{3}$ stavu. Proto při tomto přelévání ubyly v 2. nádobě 3 litry, o které se zvětšil stav ve 3. nádobě. Před druhým přeléváním byl tedy stav:

4 9 5

Konečně při prvním přelévání ubyla z 1. nádoby $\frac{1}{2}$ stavu a $\frac{1}{2}$ tam zůstala, což jsou 4 litry. Proto musel být na začátku stav:

8 5 5

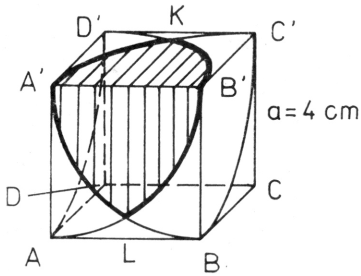
Zkouška a odpověď je stejná jako při 1. řešení.

Poznámka. Stojí za povšimnutí, že řešení úsudkem je v tomto případě kratší a numericky jednodušší.

Z8 - I - 6

Krychle $ABCDA'B'C'D'$ má hranu délky $a = 4$ cm. Zjistěte, jakou část povrchu krychle zaujímají body, které mají od vrcholu A' i od vrcholu B' vzdálenost nejvýše rovnou délce hrany krychle. Znázorněte tuto část povrchu na síti krychle.

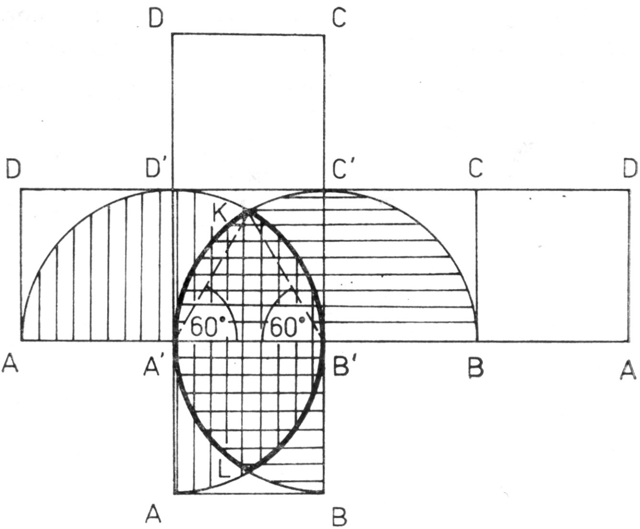
Řešení. Načrtneme si obrázek 3. Nejprve určíme množinu všech bodů povrchu krychle, které mají od vrcholu A' vzdálenost v rovnou nejvýše délce hrany krychle, tj. $v \leqq a = 4$ cm.



Obr. 3

Tyto body vyplní tři čtvrtkruhy se středy ve vrcholu A', s poloměrem $a = 4$ cm, které leží ve třech stěnách se společným vrcholem A'. Znázorníme je v síti krychle, obr. 4. Podobně najdeme na povrchu krychle množinu bodů, které mají od vrcholu B' vzdálenost $v \leqq a$. Budou to opět tři čtvrtkruhy. Oběma podmínkám vyhovuje tedy útvar, který je průnikem obou množin, v síti je znázorněn jako průnik dvou kruhů. Tento útvar se skládá ze dvou shodných částí $A'B'K$ a $A'B'L$. Stačí tedy vypočítat obsah jedné části např. $A'B'K$.

Trojúhelník $A'B'K$ (obr. 4) je rovnostranný a úhly při vrcholech A', B' mají velikost 60°. Křivočarý útvar $A'B'K$ je tedy roven sjednocení dvou kruhových výsečí o poloměru $a = 4$ cm a středovém úhlu 60°. Protože $60° = \frac{1}{6} \cdot 360°$, je



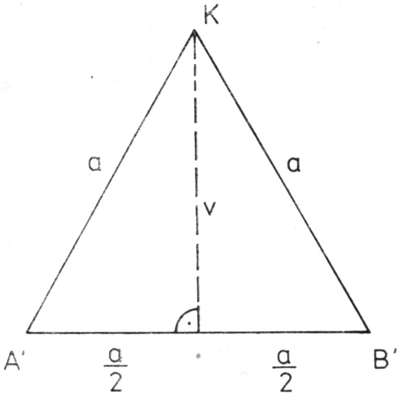
Obr. 4

obsah každé této výseče roven $\frac{1}{6}$ obsahu kruhu o poloměru $a = 4$ cm. Každá z těchto výsečí má obsah

$$S_V = \frac{1}{6}\pi a^2 \doteq 8{,}37 \text{ cm}^2.$$

Obsah křivočarého útvaru $A'B'K$ dostaneme jako dvojnásobek obsahu S_V zmenšený o obsah S_T rovnostranného trojúhelníku $A'B'K$. Výšku trojúhelníku $A'B'K$ (obr. 5) vypočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Obr. 5

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$$

$$v = a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \doteq 3{,}46 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku $A'B'K$ je tedy

$$S_T = \frac{1}{2}a \,.\, v = \frac{1}{2}a \,.\, a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \doteq 6{,}93 \text{ cm}^2.$$

Obsah křivočarého útvaru $A'B'K$ je

$$S_K = 2 \,.\, S_V - S_T$$

$$S_K = \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

$$S_K = \frac{a^2}{12} . 7{,}36 \doteq 9{,}81 \text{ cm}^2.$$

Obsah celého křivočarého útvaru $A'LB'K$ je roven $2S_K$, tzn.

$$2S_K = \frac{a^2}{6} . 7{,}36 \doteq 19{,}62 \text{ cm}^2.$$

My máme vypočítat, jakou část povrchu krychle zaujímá křivočarý útvar $A'LB'K$. Povrch krychle je

$$S = 6a^2 = 96 \text{ cm}^2.$$

Hledaná část je tedy

$$c = \frac{2\,S_K}{S} = \frac{\frac{a^2}{6} . 7{,}36}{6a^2} = \frac{7{,}36}{36} \doteq 0{,}20.$$

Křivočarý útvar $A'LB'K$ zaujímá přibližně 20 % povrchu krychle.

Poznámka. Všimněte si, že do vzorců pro S_V, S_K, S jsme za a nemuseli dosazovat. Proto bývá výhodné provádět výpočty obecně a dosazovat až do konečného vzorce.

ÚLOHY K DALŠÍMU PROCVIČOVÁNÍ

Účastníkům matematické olympiády z 8. ročníků byly doporučeny řešit další obdobné úlohy. Tyto úlohy řešili soutěžící - na rozdíl od soutěžních úloh - často s pomocí svých učitelů matematiky. Uvedeme znění těchto úloh:

1. Dvě přirozená čísla jsme sečetli, odečetli, vynásobili a vydělili. Získali jsme čtyři nová celá čísla. Když jsme je sečetli, dostali jsme výsledek 243. Najděte všechny dvojice přirozených čísel, které mají tuto vlastnost.

Návod. Hledaná čísla označíme x, y $(x > y)$ a zapíšeme

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Na levé straně sečtěte a pak vytkněte $\frac{x}{y}$.

Výsledek. Dvě dvojice 24, 8 a 54, 2.

2. Strany pravoúhlého trojúhelníku jsou vyjádřeny v centimetrech jako celá čísla. Jedna odvěsna má délku 5 cm. Vypočtěte délky zbylých dvou stran. Najděte všechny možnosti.

Výsledek. Jediný trojúhelník o stranách 5 cm, 12 cm, 13 cm.

3. Zjistěte hodnoty výrazů:

$$V = 70(71^9 + 71^8 + \ldots + 71^2 + 72) + 1$$

$$H = \frac{11(18^2 + 7^2)(18^4 + 7^4)(18^8 + 7^8)(18^{16} + 7^{16})(18^{32} + 7^{32})}{18^{64} - 7^{64}}$$

Návod. V prvém případě napište $70 = (71 - 1)$ a použijte vzorec

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1).$$

Vzorec dokažte.

Výsledky. 71^{10}, $\frac{1}{25}$.

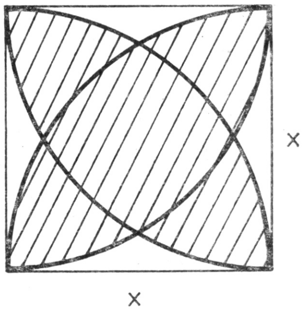
4. Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je zvolen bod P. Body D, E, F jsou paty kolmic z bodu P vedených postupně ke stranám BC, CA, AB. Dokažte, že

$$\frac{|PD| + |PE| + |PF|}{|BD| + |CE| + |AF|} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Návod. Ukažte, že hodnota činitele, a tedy ani hodnota jmenovatele, nezávisí na poloze bodu P. Přitom bod P může být nejen uvnitř trojúhelníku ABC, ale i na libovolné jeho straně. Pohybujte s bodem P po rovnoběžce s některou stranou trojúhelníku ABC.

5. Krychle má délku hrany x. Na každé stěně je vyšrafován obrazec znázorněný na obrázku 6.
Vypočtěte, jak velká část povrchu krychle je vyšrafována.
Návod. Vypočtěte obsahy nevyšrafovaných částí čtverce.

Výsledek. V jedné stěně a stejně na celé krychli je vyšrafováno 0,826 = 82,6 % povrchu.



Obr. 6

6. Otec se rozhodl rozdělit svůj majetek svým synům takto: Nejstarší dostal 1 000 Kčs a jednu desetinu zbytku, druhý dostal 2 000 Kčs a jednu desetinu nového zbytku. Třetí syn dostal 3 000 Kčs a opět desetinu zbytku. Tak postupovalo dělení i mezi ostatní syny. Ukázalo se, že všichni synové dostali stejný díl. Vypočtěte celkovou hodnotu otcova majetku, kolik korun dostal každý syn a kolik jich bylo.

Výsledek. 81 000 Kčs, 9 000 Kčs pro každého z devíti synů.

ÚLOHY II. KOLA

Z8 - II - 1

Jestliže napíšeme čtyři za sebou jdoucí nenulové číslice ve vzestupném pořadí za sebou, dostaneme čtyřciferné číslo.

a) Dokažte, že je možné zaměnit pořadí posledních tří číslic tak, že vznikne čtyřciferné číslo dělitelné číslem 11.

b) Kolik čtyřciferných čísel dělitelných jedenácti je možno tímto způsobem vytvořit ze všech čtveřic po sobě jdoucích číslic? (7 bodů)

Řešení. Nejmenší číslo, které můžeme napsat, je $a = 1\,234$. Záměnou pořadí posledních tří číslic dostaneme z čísla a pět dalších čísel:

$$1\,234 \quad \underline{1\,243} \quad 1\,324 \quad \underline{1\,342} \quad 1\,423 \quad 1\,432 \qquad (1)$$

Z nich jsou dělitelná číslem 11 jen dvě podtržená čísla 1 243 a 1 342, neboť

$$\begin{array}{ll} 1\,234 = 11 \,.\, 112 + 2 & \underline{1\,342} = 11 \,.\, 122 \\ \underline{1\,243} = 11 \,.\, 113 & 1\,423 = 11 \,.\, 129 + 4 \\ 1\,324 = 11 \,.\, 120 + 4 & 1\,432 = 11 \,.\, 130 + 2. \end{array}$$

Přičteme-li k číslům (1) postupně pětkrát za sebou číslo 1 111, dostaneme všechna možná výchozí čísla i čísla, která z nich vzniknou záměnou pořadí posledních tří číslic. Protože přičítáme násobek čísla 11 ($1\,111 = 11 \,.\, 101$), vzniknou z čísel, která jsou násobky 11, zase násobky čísla 11 a z čísel, která nejsou násobky čísla 11, zase čísla, která nejsou násobky 11. (Můžete se o tom přesvědčit, když tato čísla vypíšete.) Tak dostaneme celkem 12 násobků čísla 11:

1 243	1 342
2 354	2 453
3 465	3 564
4 576	4 675
5 687	5 786
6 798	6 897

Poznámka. Pravděpodobně znáte znaky dělitelnosti přirozených čísel čísly 2, 3, 4, 5, 6, 9. Také pro dělitelnost číslem 11 lze uvést znak dělitelnosti. Ukážeme si to na dvou příkladech:

$$a = 724\,563 \qquad b = 96\,844$$

Najdeme ciferné součty číslic, které stojí jednak na lichém místě, jednak na sudém místě od konce. Je-li jejich rozdíl násobkem čísla 11, je i dané číslo násobek 11. V opačném případě není dané číslo násobkem čísla 11.

$$a = 724\,563 \qquad \begin{array}{r} 2 + 5 + 3 = 10 \\ 7 + 4 + 6 = 17 \\ \hline 17 - 10 = 7 \end{array}$$

Číslo 7 ani číslo a nejsou násobky čísla 11.

$$b = 96\,844 \qquad \begin{array}{r} 9 + 8 + 4 = 21 \\ 6 + 4 \phantom{{}+ 4} = 10 \\ \hline 21 - 10 = 11 \end{array}$$

Číslo 11 a tedy i číslo b jsou násobky čísla 11.

Ověříme znak dělitelnosti číslem 11 pro případ čísla $b = 96\,844$:

$$96\,844 = 9.10\,000 + 6.1\,000 + 8.100 + 4.10 + 4 =$$

$$= 9.(9\,999 + 1) + 6.(1\,001 - 1) + 8.(99 + 1) +$$

$$+ 4.(11 - 1) + 4 =$$

$$= (9.\underline{9\,999} + 6.\underline{1\,001} + 8.\underline{99} + 4.\underline{11}) +$$

$$+ (9 + 8 + 4) - (6 + 4)$$

Součet čísel v první závorce (předposlední řádek na str. 41) je násobek čísla 11, protože podtržená čísla jsou násobky čísla 11. Druhá a třetí závorka se rovná zmíněným ciferným součtům. Dané číslo je dělitelné číslem 11, je-li dělitelný číslem 11 i rozdíl zmíněných ciferných součtů.

Ověřte si sami podobným postupem, že číslo $a = 724\,563$ není násobkem čísla 11.

Z8 - II - 2

Podle dohody mezi žáky třídy, kteří se zúčastnili sběru, se peníze za sběr rozdělily takto: První žák dostal 2 Kčs a jednu třicetinu zbytku, druhý dostal 4 Kčs a jednu třicetinu nového zbytku, třetí dostal 6 Kčs a jednu třicetinu dalšího zbytku atd. Všichni obdrželi stejnou částku. Kolik žáků se sběru zúčastnilo a kolik korun za sběr obdrželi dohromady?

(5 bodů)

Řešení. Označíme x celkový počet obdržených korun. První dva žáci dostali:

$$1.\ \text{žák} \ldots\ldots\ldots\ldots 2 + \frac{x-2}{30}$$

$$2.\ \text{žák} \ldots\ldots\ldots\ldots 4 + \left[x - \left(2 + \frac{x-2}{30}\right) - 4\right] : 30$$

Ale oba dostali stejně. Porovnáním obou částek dostaneme rovnici:

$$2 + \frac{x-2}{30} = 4 + \left[x - \left(2 + \frac{x-2}{30}\right) - 4\right] : 30$$

Rovnici řešíme obvyklým způsobem. Nejdříve násobíme obě strany číslem 30:

$$60 + (x - 2) = 120 + \left[x - \left(2 + \frac{x-2}{30}\right) - 4\right]$$

Sečtením dostaneme

$$\frac{x-2}{30} = 56$$

a odtud snadno vypočteme $x = 1\,682$. Celkově dostali žáci za sběr 1 682 Kčs.

První žák dostal

$$2 + \frac{1\,682 - 2}{30} = 58$$

korun. Protože všichni žáci dostali stejně, můžeme vypočítat, kolik žáků bylo celkem:

$$1\,682 : 58 = 29$$

Musíme ovšem udělat zkoušku. Přinejmenším už proto, že jsme při řešení vůbec nevyužili podmínky pro způsob odměny ostatních žáků počínaje od třetího žáka.

Zkouška. Víme, že první dva žáci dostali po 58 Kčs. Další dostali:

3. žák .... $6 + \dfrac{1\,682 - 2.58 - 6}{30} = 58$

$$4.\ \text{žák} \ldots\ldots\ldots\ldots 8 + \frac{1\,682 - 3.58 - 8}{30} = 58$$

Tak bychom mohli postupovat dále. Výpočet však můžeme provést obecně:

$$n\text{-tý žák} \ldots\ldots\ldots\ldots 2n + \frac{1\,682 - (n - 1).58 - 2n}{30}$$

Tento výraz postupně upravíme na tvar

$$2n + \frac{1\,740 - 60n}{30} = 58.$$

Podle podmínek úlohy musí být jedna třicetina ze zbytku nezáporné číslo, tedy

$$1\,740 - 60n \geqq 0.$$

Odtud plyne $n \leqq 29$. Poslední žák je tedy skutečně devětadvacátý.

Poznámka. Provedení zkoušky se od žáků v soutěži nepožadovalo.

Z8 - II - 3

Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC k jeho základně AB je $v = 8$ cm. Vypočtěte délku ramene AC a délku základny AB, jestliže jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

(6 bodů)

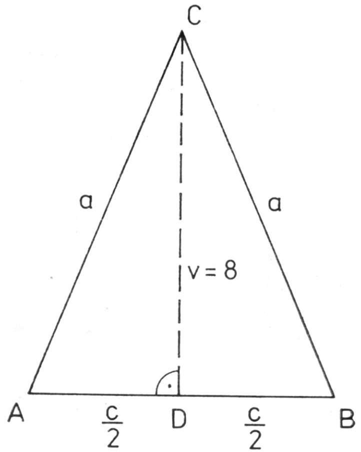
Řešení. Načrtneme si obrázek 7. Výška CD rovnoramenného trojúhelníku ABC půlí základnu AB, takže $|AD| = |DB| = \frac{c}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty dostaneme z pravoúhlého trojúhelníku ADC

$$64 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

neboli

$$64 = \left(a - \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right).$$

Na pravé straně je součin dvou různých činitelů, neboť $c \neq 0$. Proto rozložíme i číslo 64 na součin dvou různých činitelů. Jsou 3 možnosti:



Obr. 7

$$64 = 1.64 = 2.32 = 4.16$$

Odtud dostaneme 3 soustavy rovnic:

$$a - \frac{c}{2} = 1 \qquad a - \frac{c}{2} = 2 \qquad a - \frac{c}{2} = 4$$

$$a + \frac{c}{2} = 64 \qquad a + \frac{c}{2} = 32 \qquad a + \frac{c}{2} = 16$$

Snadno vypočteme kořeny těchto soustav:

$$a = 32{,}5 \qquad a = 17 \qquad a = 10$$

$$c = 63 \qquad c = 30 \qquad c = 12$$

Protože délky stran mají být vyjádřeny celými čísly, vyhovují úloze jen dvě z těchto řešení.

V obou případech jsou trojúhelníkové nerovnosti pro strany a a c splněny. Ověřte to sami.

Z8 - II - 4

Napište rozdíl $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ jako součin dvou výrazů, z nichž jeden je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. (5 bodů)

Řešení. Neznámý výraz označíme V. Platí tedy

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) . V = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}.$$

Zlomky uvedeme na společné jmenovatele

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} . V = \frac{a^2 - b^2}{ab} .$$

Rovnost vynásobíme součinem ab a pak vypočteme V.

$$V = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Výsledek je tedy

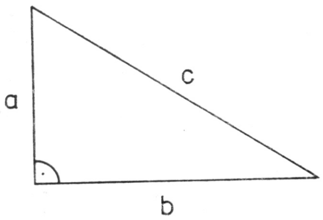
$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) . \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} .$$

ÚLOHY III. (KRAJSKÉHO) KOLA V ČSR

Z8 - III - 1

Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníku s obsahem $S = 312$ cm^2, jestliže součet celočíselných délek obou jeho odvěsen je 50 cm. (5 bodů)

1. řešení (pomocí dělitelnosti). Načrtneme si obrázek 8 a označíme délky stran. Obsah trojúhelníku vypočteme



Obr. 8

$$S = \frac{1}{2} ab = 312 \text{ cm}^2.$$

Můžeme sestavit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} ab &= 624 \\ a + b &= \ \ 50 \end{aligned} \qquad (1)$$

Protože a, b jsou celá čísla, rozložíme číslo 624 na součin takových dvou činitelů, jejichž součet je roven 50. Nejdříve rozložíme číslo 624 na součin prvočísel

$$624 = 2^4 . 3 . 13 .$$

Nyní snadno rozložíme číslo 624 na součin dvou přirozených činitelů. Nemusíme však vypisovat všechny možnosti, stačí jen ty, kde menší z obou činitelů je menší než 50 (neboť $a + b = 50$). Je celkem 10 možností:

$$\begin{aligned} 624 &= 1 . 624 & \qquad 624 &= \ \ 8 . 78 \\ & \ \ \ \ 2 . 312 & & \ \ \ \ 12 . 52 \\ & \ \ \ \ 3 . 208 & & \ \ \ \ 13 . 48 \\ & \ \ \ \ 4 . 156 & & \ \ \ \ 16 . 39 \\ & \ \ \ \ 6 . 104 & & \ \ \ \ 24 . 26 \end{aligned}$$

Podle podmínky úlohy musí být součet činitelů roven 50. Tomu vyhovuje jen rozklad

$$624 = 24 . 26 .$$

Odvěsny hledaného trojúhelníku mají tedy délky 24 cm a 26 cm. Podle Pythagorovy věty vypočteme délku přepony

$$c = \sqrt{24^2 + 26^2} = \sqrt{1\,252} \doteq 35{,}4.$$

Přepona má tedy přibližně délku 35,4 cm.

2. řešení (užitím algebry). Soustavu rovnic (1) můžeme řešit algebraicky. První rovnici násobíme číslem 4 a druhou rovnici umocníme na druhou:

$$4ab = 2\,496$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2\,500$$

Odečteme-li od druhé rovnice první rovnici, dostaneme

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4$$

neboli

$$(a - b)^2 = 4.$$

Můžeme předpokládat, že $a > b$, takže

$$a - b = 2.$$

Odtud a z druhé rovnice soustavy (1) snadno vypočteme

$$a = 26,\ b = 24.$$

3. řešení (experimentální). Soustavu (1) řešíme experimentálně tak, že číslo 50 rozložíme všemi možnými způsoby na součet dvou přirozených čísel, a pak ověříme, zda je splněna rovnost $\frac{1}{2}a \,.\, b = 312$. Vlastní řešení přenecháme čtenářům.

Z8 - III - 2

Pro které reálné číslo a je hodnota výrazu $V = (a + 2)^2 + (1 - a)^2$ nejmenší? Určete tuto hodnotu. (4 body)

Řešení. Výraz V snadno upravíme na tvar

$$V = 2a^2 + 2a + 5.$$

Zde použijeme v matematice často používané úpravy. Vytkneme koeficient při kvadratickém členu z prvních dvou členů:

$$V = 2(a^2 + a) + 5$$

Pak výraz v závorce doplníme na druhou mocninu dvojčlenu:

$$V = 2\left(a^2 + 2.a.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 5 =$$

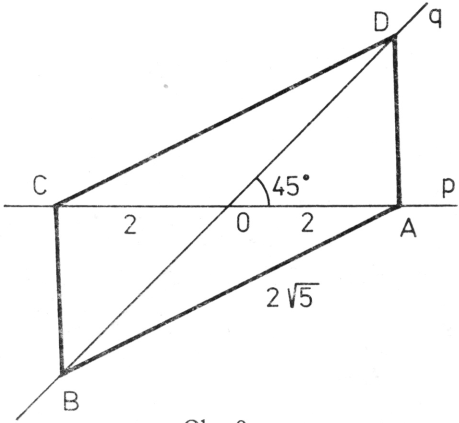
$$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 5 = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

Tento výraz bude zřejmě nejmenší pro $a = -\frac{1}{2}$ a jeho hodnota se bude rovnat $\frac{9}{2}$.

Z8 - III - 3

V kosodélníku má jedna strana délku $2.\sqrt{5}$ cm. Jeho úhlopříčky, z nichž jedna má délku 4 cm, svírají úhel 45°. Jak je dlouhá zbývající úhlopříčka? Sestrojte kosodélník a určete jeho obsah. Kolik má úloha řešení? (6 bodů)

Řešení. a) Konstrukce kosodélníku. Načrtneme a popíšeme si obrázek 9.



Obr. 9

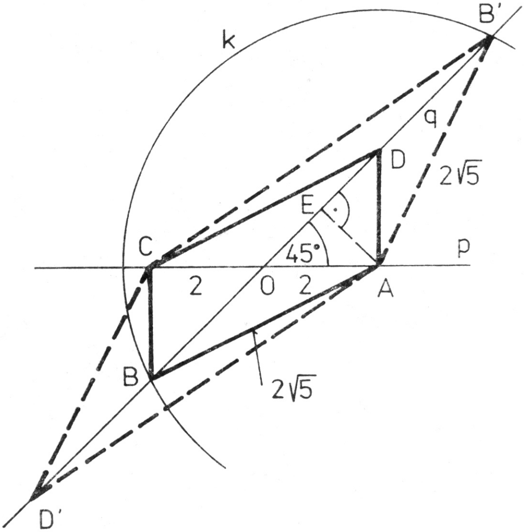
Z něho snadno nahlédneme konstrukci; např. (obr. 10).

1. AC: $|AC| = 4$ cm
2. O: střed AC
3. q: přímka jdoucí bodem O a svírající s AC úhel 45°
4. k: kružnice k (A; $2\sqrt{5}$ cm)*)
5. B: $B \in k \cap q$ (2 možnosti)
6. D: úsečku BO přeneseme na polopřímku opačnou k polopřímce OB
7. Kosodélník $ABCD$

---

*) Protože je $2\sqrt{5} = \sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$, sestrojíme poloměr kružnice k jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek 4 cm a 2 cm.

Úloha má 2 řešení, na obr. 10 jsou to kosodélníky $ABCD$, $AB'CD'$.



Obr. 10

b) Výpočet délek úhlopříček BD a $B'D'$. Z bodu A vedeme kolmici k přímce BD, její patu označíme E. Trojúhelník AEO je pravoúhlý s jedním ostrým úhlem 45°. Proto je i jeho druhý úhel roven 45° a trojúhelník AEO je rovnoramenný. Snadno vypočteme délky jeho odvěsen $|OE| = |AE| = \sqrt{2}$.

Bod E je střed základny BB' rovnoramenného trojúhelníku ABB'. Proto je $|BE| = |B'E|$. Délku BE vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ABE podle Pythagorovy věty

$$|BE| = \sqrt{|AB|^2 - |AE|^2}$$

$$|BE| = \sqrt{20 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Nyní vypočteme poloviny délek úhlopříček BD a $B'D'$.

$$\frac{1}{2}|BD| = |BO| = |BE| - |OE| = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}|B'D'| = |B'O| = |B'E| + |OE| = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Celé úhlopříčky mají tedy délky

$$|BD| = 4\sqrt{2}, \qquad |B'D'| = 8\sqrt{2}.$$

c) Výpočet obsahů kosodélníků $ABCD$ a $AB'CD'$. Obsah S kosodélníku $ABCD$ je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABD.

$$S = 2 . \frac{1}{2}|BD| . |AE| = |BD| . |AE|$$

$$S = 4\sqrt{2} . \sqrt{2} = 8$$

$$S = 8 \text{ cm}^2$$

Podobně vypočteme obsah S' kosodélníku $AB'CD'$.

$$S' = 16 \text{ cm}^2$$

Z8 - I - 4

Adam, Bořek a Cyril měli poštovní známky, ale o různém počtu kusů. Když dal Adam Cyrilovi sedminu ze svého počtu, měli Adam a Cyril stejný počet známek. Když pak ještě Bořek dostal od obou (Adama a Cyrila) po třiceti známkách, měli všichni stejný počet známek. Kolik kusů známek měl původně každý z chlapců, jestliže na začátku měli Bořek s Cyrilem dohromady o 110 kusů známek více než měl Adam?

(5 bodů)

Řešení. Počty známek, které měli na začátku Bořek a Cyril, označíme postupně b, c. Další podmínky zapíšeme do tabulky.

	Adam	Bořek	Cyril
Na začátku	$b + c - 110$	b	c
Po 1. předání	$\frac{6}{7}(b + c - 110)$	b	$c + \frac{1}{7}(b + c - 110) = \frac{1}{7}(b + 8c - 110)$
Po 2. předání	$\frac{6}{7}(b + c - 110) - 30 = \frac{6}{7}(b + c - 145)$	$b + 60$	$\frac{1}{7}(b + 8c - 110) - 30 = \frac{1}{7}(b + 8c - 320)$

Zapíšeme rovnicemi stavy známek po 1. a po 2. předání:

$$\frac{6}{7}(b + c - 110) = \frac{1}{7}(b + 8c - 110)$$
$$\frac{6}{7}(b + c - 145) = b + 60$$

Po odstranění zlomků a jednoduché úpravě dostaneme:

$$5b - 2c = 550$$
$$-b + 6c = 1\,290$$

Řešením této soustavy zjistíme, že na začátku měli Bořek a Cyril tyto počty známek:

$$b = 210, \; c = 250$$

Z 1. řádku tabulky vypočteme, že Adam měl na začátku 350 známek.

Zkouškou ověřte sami, že nalezené řešení vyhovuje všem daným podmínkám.

ÚLOHY III. (KRAJSKÉHO) KOLA V SSR

Z8 - III - 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo väčšie ako 100 000, ktoré sa dá zapísať pomocou číslic 6, 8 a ktoré je násobkom čísla 72.

Řešení. Hledané číslo bude aspoň šesticiferné. Protože má být násobkem čísla $72 = 9.8$, musí být i násobkem čísel 9 a 8. Aby bylo násobkem čísla 9, musí být jeho ciferný součet také násobkem čísla 9.

Vypočteme ciferné součty všech šesticiferných čísel zapsaných pomocí číslic 6 a 8.

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$$
$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 = 38$$
$$6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 8 = 40$$
$$\cdots\cdots$$
$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$$

Jedině 36 je násobek čísla 9. Ale číslo 666 666 není násobkem čísla 8.

Hledané číslo bude tedy aspoň sedmiciferné. Vypočteme opět ciferné součty všech čísel sestavených z číslic 6 a 8.

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 42$$
$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 = 44$$
$$\cdots\cdots$$
$$6 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 54$$
$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56$$

Mezi nimi je jediný násobek čísla 9, tj. číslo 54. Nejmenší číslo sestavené z jedné šestky a šesti osmiček je číslo 6 888 888. Snadno zjistíme, že je také násobkem čísla 8, a tedy i 72.

Poznámka. Chceme-li vyzkoušet, zda číslo 6 888 888 je násobkem čísla 8, nemusíme je celé dělit. Stačí použít znaku dělitelnosti číslem 8:

Přirozené číslo je násobkem čísla 8, právě když číslo určené posledním trojčíslím je násobkem čísla 8.

Důkaz plyne ihned z rozkladu tvaru

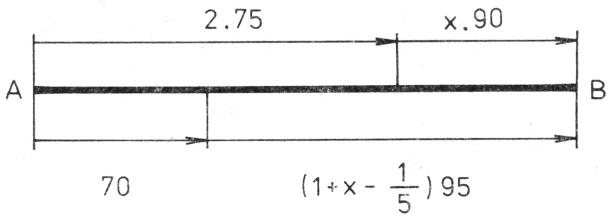
$$6\,888\,888 = 6\,888 . 1\,000 + 888 = 6\,888 . 125 . 8 + 888.$$

Podrobnosti důkazu přenecháváme čtenářům.

Z8 - III - 2

Z miesta A do miesta B išli dve autá. Prvé auto išlo 2 hodiny rýchlosťou 75 km/h a potom zrýchlilo na 90 km/h. Druhé auto išlo jednu hodinu rýchlosťou 70 km/h a potom zvýšilo rýchlosť na 95 km/h. Do miesta B dorazilo druhé auto o 12 minút skôr než prvé. Aká je vzdialenosť medzi miestami A a B?

Řešení. Načrtneme si obrázek 11. Dobu jízdy prvního auta zvýšenou rychlostí 90 km/h označíme x.



Obr. 11

První auto ujelo dráhu dlouhou

$$2 . 75 + x . 90 = 150 + 90x. \tag{1}$$

Druhé auto přijelo o 12 minut, tj. o $\frac{1}{5}$ hodiny do B dříve než první auto. Ujelo celkovou dráhu

$$70 + \left(1 + x - \frac{1}{5}\right)95 = 146 + 95x. \qquad (2)$$

Obě auta ujela stejnou vzdálenost. Dostáváme rovnici

$$150 + 90x = 146 + 95x.$$

Její kořen je $x = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Vzdálenost mezi A, B vypočítáme dosazením $x = 0{,}8$ do výrazu (1) nebo (2). Vyjde $|AB| = 222$ km.

Zkoušku si udělejte sami.

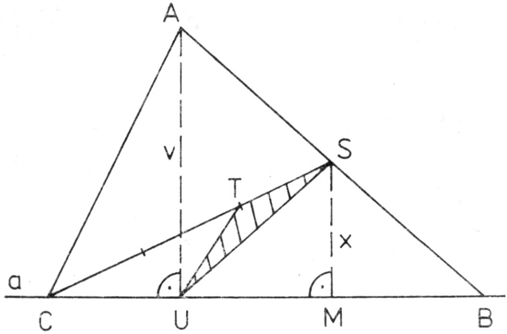
Z8 - III - 3

V rovine je daný trojuholník STU. Zostrojte trojúholník ABC tak, aby platilo: S je stred strany AB, T je ťažisko trojuholníka ABC a U je päta výšky vedenej vrcholem A.

Řešení. Načrtneme si obrázek 12. Těžiště T dělí těžnici CS v poměru 2 : 1, proto je $CT = 2TS$. Výška trojúhelníku z vrcholu A se rovná dvojnásobku vzdálenosti bodu S od přímky CB, tj. $v = 2x$. To nám stačí k sestrojení trojúhelníku ABC.

Popis konstrukce

1. $\triangle\ STU$
2. C: C leží na polopřímce opačné k TS; $CT = 2TS$
3. a: $a = \leftrightarrow CU$



Obr. 12

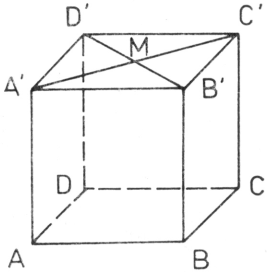
4. x: x je vzdálenost S od přímky a
5. A: A leží v polorovině aS na kolmici vedené bodem U k přímce a ve vzdálenosti $v = 2x$
6. B: $B \in a \cap \leftrightarrow AS$
7. $\triangle\ ABC$

Zkouška. Bod S je středem strany AB, neboť úsečka SM je střední příčkou trojúhelníku ABU ($SM \parallel AU$ a $|SM| = \frac{1}{2}|AU|$). Z konstrukce plyne, že T je těžiště a U pata výšky z vrcholu A.

Z8 - III - 4

Daná je kocka $ABCDA'B'C'D'$ s hranou dĺžky 1 m. V strede M steny $A'B'C'D'$ je mravec, ktorý dokáže prejsť 1 m za 1 minútu. Označme P všetky miesta na povrchu kocky, ku ktorým dokáže mravec prísť za 1 minútu alebo kratší čas. Všetky tieto miesta tvoria časť povrchu kocky, ktorej obsah máte vypočítať.

Řešení. Načrtneme si obrázek krychle (obr. 13) a rozvineme část povrchu, po kterém se může pohybovat mravenec (obr. 14 na str. 61).

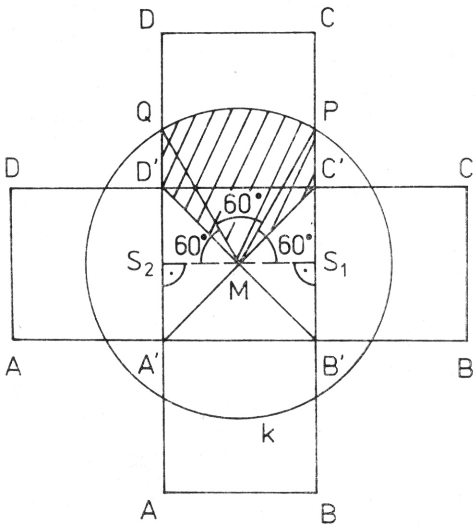


Obr. 13

Místa, kam může dorazit mravenec, jsou na síti (obr. 14) znázorněna jako průnik kruhu $k = (M; r = 1)$ a sítě. Obsah tohoto útvaru je roven čtyřnásobku obsahu útvaru $MC'PQD'$.

Nyní vypočteme obsah obrazce $MC'PQD'$. Všechny výpočty provádíme v metrech a čtverečných metrech. Obsah obrazce $MC'PQD'$ vypočteme jako součet obsahů dvou shodných trojúhelníků $MC'P$ a $MD'Q$ a kruhové výseče MPQ. Ze zadání a konstrukce plyne, že

$$|MP| = 1, \quad |MS_1| = \frac{1}{2}.$$



Obr. 14

Proto je pravoúhlý trojúhelník MS_1P roven polovině rovnostranného trojúhelníku, takže úhel S_1MP má velikost 60°. Podobně mají velikost 60° i úhly S_2MQ a PMQ.

Můžeme vypočítat délky stran PC' a QD'.

$$|PC'| = |PS_1| - |C'S_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Součet obsahů trojúhelníků $MC'P$ a MQD' je tedy roven

$$2 \cdot \frac{1}{2} |PC'| \cdot |MS_1| = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Obsah kruhové výseče MPQ je roven jedné šestině kruhu o poloměru $r = 1$, tj. $\frac{1}{6}\pi$. Obsah obrazce $MC'PQD'$ je roven

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{1}{6}\pi.$$

Obsah útvaru, který může dosáhnout mravenec, je roven čtyřnásobku, tedy

$$S = \sqrt{3} - 1 + \frac{2\pi}{3} \doteq 2{,}83.$$

Hledaný obsah je roven přibližně 2,8 m^2.

Poznámka. Je možné kontrolovat výsledek odhadem. Obsah hledaného útvaru je přibližně obsah kruhu o poloměru $r = 1$ m zmenšený o obsah čtyř pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s odvěsnami délky $|PC'| = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. Tedy obsah S je odhadem

$$\pi 1^2 - 2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\right]^2 \doteq 2{,}87.$$

Odhad vychází o něco větší, což je pochopitelné. (Proč?) Řádově však odhad souhlasí s výsledkem.