34. ročník matematické olympiády

26. ročník mezinárodní matematické olympiády

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Milan Koman (editor); Karol Križalkovič (editor): 34. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1984/85. 26. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987. pp. 157–178.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404802

26. ročník mezinárodní matematické olympiády

Průběh a výsledky

Dvacátá šestá mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 29. června – 11. července 1985 ve Finsku za rekordní účasti 209 soutěžících žáků z 38 zemí. V mezinárodní porotě, jíž předsedal prof. *Ilpo Laine* z helsinské univerzity, byly zastoupeny tyto státy: Alžírsko, Austrálie, Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Čína, Finsko, Francie, Island, Itálie, Izrael, Jugoslávie, Kanada, Kolumbie, Kuba, Kuvajt, Kypr, Maďarsko, Maroko, Mongolsko, NDR, Nizozemí, Norsko, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Španělsko, Švédsko, Tunis, Turecko, USA, Velká Británie a Vietnam. S francouzskou delegací přicestoval na MMO navíc jeden íránský žák, který tč. studuje ve Francii. Na 26. MMO byla dále přítomna pozorovatelka z Indie.

Přípravné práce, tj. výběr úloh, jejich formulace a překlad do jazyků soutěžících, prováděla mezinárodní porota ve dnech 30. června - 3. července; sídlila přitom v nevelkém finském městě Heinola, asi 100 km severně od Helsinek. Z materiálů zpracovaných finskými organizátory na základě návrhů došlých z jednotlivých zemí vybrala porota pro soutěž těchto šest úloh:

1. Je dán konvexní tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a kružnice k, jejíž střed leží na straně AB a která se dotýká ostatních tří stran BC, CD, DA čtyřúhelníku. Dokažte, že pak platí

$$|AD| + |BC| = |AB|.$$

2. Nechť n, k jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla, $0 < k < n$, a nechť $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Každý prvek j množiny M obarvíme jednou ze dvou barev (modrá a bílá), a to tak, že

(1) číslo j má vždy touž barvu jako číslo $n - j$;

(2) každé číslo $j \in \mathsf{M}$, $j \neq k$, má touž barvu jako číslo $|k - j|$.

Dokažte, že pak všechny prvky množiny M mají touž barvu.

3. Je-li $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $n \geqq 0$, mnohočlen s celočíselnými koeficienty, označme $w(P)$ počet těch jeho koeficientů a_j, které nejsou dělitelné dvěma. Nechť $Q_j(x) = (1 + x)^j$ pro $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokažte: jsou-li $i_1, i_2, \ldots, i_n$ celá čísla splňující $0 \leqq i_1 < < i_2 < \ldots < i_n$, pak platí

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geqq w(Q_{i_1}).$$

4. Množina M má právě 1 985 prvků. Jsou to vesměs celá kladná čísla, jejichž prvočinitelé nejsou větší než 26.

Dokažte, že v M lze nalézt čtyři navzájem různá čísla, jejichž součin je čtvrtou mocninou celého čísla.

5. Je dán trojúhelník ABC a kružnice k se středem O, kružnice k prochází body A, C a protíná úsečky AB, BC

v dalších dvou bodech K, resp. N, $K \neq N$. Přitom kružnice k_1, resp. k_2, opsané trojúhelníku ABC, resp. BKN, mají právě dva společné body B a M.

Dokažte, že úhel OMB je pravý.

6. Ke každému reálnému číslu x_1 sestrojíme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že položíme

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Dokažte, že existuje právě jedna hodnota x_1 taková, že pro každé $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

Tyto úlohy pocházely z návrhů předložených Velkou Británií, Austrálií, Nizozemím, Mongolskem, SSSR a Švédskem.

Ačkoliv se již na několika minulých MMO poukazovalo na nutnost rozšířit okruh témat, jež se objevují v soutěžních úlohách MMO, byl i tentokráte výběr omezen na převážně klasická témata: planimetrii, kombinatoriku, elementární číselnou teorii. Snad jen šestá úloha byla poněkud netradiční.

Jak později také potvrdily výsledky soutěže, byly vybrané úlohy vcelku vhodné pro MMO. Porota však poněkud podcenila obtížnost třetí úlohy, jejíž řešení vyžadovalo netriviální obměnu provedení matematické indukce. Právě tato nejtěžší úloha způsobila, že výsledné bodové hodnocení bylo o poznání nižší nežli např. v loňském roce.

Jako obvykle, byla každá úloha ohodnocena sedmi body, takže každý soutěžící mohl získat v soutěži nejvýše 42 bodů. Podrobná kritéria pro hodnocení řešení porota tentokráte nepřipravovala a přenechala tuto nelehkou úlohu finským koordinátorům, kteří se jí zhostili velmi dobře.

Ještě dříve nežli porota dokončila přípravu soutěžních úloh, přicestovali do Finska soutěžící žáci. Byli ubytováni v rekreačním středisku Joutsenlampi v motelu Rantasipi, uprostřed překrásné finské přírody. Vlastní soutěž se pak konala v nedalekém městečku Joutsa. Slavnostní zahájení 26. MMO proběhlo ve středu 3. července dopoledne v místní škole za účasti mezinárodní poroty, která sem proto přijela z Heinoly.

Další dva dny, 4. a 5. července, byly soutěžní: každé dopoledne řešili žáci po třech úlohách. V pátek 5. července přesídlila také porota do Joutsenlampi, kde se pak vykonaly veškeré práce spojené s opravou a koordinací hodnocení žákovských řešení. Díky dobré přípravě kolektivu finských koordinátorů proběhla koordinace velmi hladce a rychle, takže porota mohla na svém zasedání v neděli 7. července bez dlouhých debat schválit konečné výsledky.

Zároveň zde bylo rozhodnuto udělit 14 prvních cen (za řešení ohodnocená 34—42 body), 35 druhých cen (za 22—32 bodů) a 52 třetích cen (za 15—21 bodů). Celkem tak získalo některou z cen 101 žáků, tedy necelých 50 % z celkového počtu 209 soutěžících. Tyto počty cen odpovídají tradičním podmínkám MMO.

Po prozkoumání návrhů předložených koordinátory bylo na dalším zasedání poroty rozhodnuto, že na 26. MMO nebudou uděleny žádné zvláštní ceny za originální řešení jednotlivých úloh.

Přehledné údaje o počtech cen a součtech bodů získaných jednotlivými delegacemi jsou uvedeny v připojené tabulce.

Vedle části matematické obsahoval program MMO jako obvykle také část kulturně-poznávací. Pro účastníky MMO bylo uspořádáno několik výletů: do města Jyväskylä (pouze pro žáky), do Lahti (s návštěvou sportovního stadionu a pivovaru), k jezerům v okolí Joutsy (s ukázkou rybolovu), na typický finský statek (s ukázkou folklóru), prohlídka města Helsinki a projížďka lodí podél pobřeží s nezapomenutelnými pohledy na Helsinky z moře.

Závěr 26. MMO probíhal v Helsinkách, kam se všichni účastníci přemístili 9. července. Ceny byly žákům rozděleny na slavnostním zakončení 26. MMO ve středu 10. července odpoledne v aule helsinské univerzity za přítomnosti finské ministryně školství paní Kaariny Suomio. Ocenění žáci dostali diplomy a medaile, ostatní jen diplomy účastníků. Šesti nejlepším věnovala firma Nokia osobní počítače.

Na slavnostním zakončení vystoupil také vedoucí polské delegace prof. A. Mąkowski, který pozval všechny zúčastněné na 27. MMO, která se má konat v červenci 1986 ve Varšavě.

MMO byla pak ukončena večeří na rozloučenou spojenou s improvizovaným kulturním programem. Ve čtvrtek 11. července již začaly zahraniční delegace opouštět Helsinki.

Československá účast na 26. MMO

Do soutěže na 26. MMO vyslalo Československo šest žáků gymnázií vybraných na základě výsledků dosažených v domácí MO a na přípravných soustředěních, seminářích a podobných pomocných akcích. Jména šesti soutěžících spolu s bodovým hodnocením jejich řešení soutěžních úloh MMO jsou uvedena v připojené tabulce.

Po nevýrazném úspěchu československého družstva na 25. MMO byly výsledky našich žáků na 26. MMO očekávány s nadějemi, které se však tak docela nesplnily. Ani zisk tří druhých cen a jedné třetí - což je lepší než na 25. MMO - nemůže zakrýt skutečnost, že bylo v silách našich žáků podat celkově lepší výkony. Relativní pořadí soutěžících na MMO lze považovat za poměrně signifikantní ukazatel, ať jsou soutěžní úlohy obtížné nebo snažší: mezi 209 účastníky 26. MMO se naši žáci umístili na 38.—39., 44—46., 47.—49., 75.—83., 119.—128., a 156.—159. pořadí.

Pokud se týče jednotlivých úloh, nejsou jasné příčiny některých neúspěchů při řešení první úlohy, která svou náročností rozhodně nepřesáhla běžnou středoškolskou úroveň. Také pátá úloha, k jejímuž řešení vedlo několik různých cest, mohla dopadnout lépe.

Pátráme-li pro příčinách neúspěchů, objevuje se znovu význam psychického faktoru. Našim reprezentantům na MMO nechybějí, jak se zdá, ani tak konkrétní znalosti z matematiky, jako spíše pohotovost při jejich uplatňování. Všichni jistě ovládají elementy trigonometrie (první úloha), všichni jistě znají Dirichletův princip (čtvrtá úloha). Je však třeba se přizpůsobit tomu, že úlohy na MMO nejsou prostá cvičení v aplikaci známých pouček, ale vyžadují vedle teoretických znalostí také vytrvalost a trochu zručnosti.

Případ šesté a do značné míry i třetí úlohy ilustruje tendence MMO k zařazování atypických úloh s elementy matematické analýzy.

Účast Československa na 26. MMO se ovšem neredukovala jen na soutěžící žáky. Československo přispělo už k přípravám MMO zasláním návrhu čtyř úloh pro soutěž. Jednu z nich zařadili finští organizátoři do výběru 18 úloh předkládaných mezinárodní porotě, a to jako alternativu k úloze navrhované Mongolskem: při definitivním rozhodování pak byla přijata mongolská úloha (čtvrtá soutěžní).

Také na práci mezinárodní poroty v průběhu MMO mělo Československo aktivní podíl: předložilo několik iniciativních návrhů, například reformulace textu šesté úlohy, uspořádání soutěžních úloh atd., jež byly porotou přijaty.

Celkové výsledky 26. MMO

Země	Počet účastníků	Cena I.	II.	III.	Součet bodů
Alžírsko - DZ	6	0	0	0	36
Austrálie - AU	6	1	1	2	117
Belgie - BE	6	1	0	1	60
Brazílie - BR	6	0	0	2	83
Bulharsko - BG	6	2	3	0	165
Československo - CS	6	0	3	1	105
Čína - CN	2	0	0	1	27
Finsko - FI	6	0	0	0	25
Francie - FR	6	0	2	3	125
Irán - IR	1	0	1	0	28
Island - IS	2	0	0	0	13
Itálie - IT	5	0	0	0	20
Izrael - IL	6	0	1	0	81
Jugoslávie - YU	6	0	0	2	68
Kanada - CA	6	0	1	4	105
Kolumbie - CO	6	0	0	2	54
Kuba - CU	6	0	0	2	74
Kuvajt - KW	5	0	0	0	7
Kypr - CY	6	0	0	1	27
Maďarsko - HU	6	2	2	2	168
Maroko - MA	6	0	0	2	60
Mongolsko - MN	6	0	1	0	62
NDR - DD	6	0	3	3	136
Nizozemí - NL	6	0	0	1	72
Norsko - NO	6	0	0	0	34
NSR - DE	6	1	1	4	139
Polsko - PL	6	0	1	4	101
Rakousko - AT	6	0	0	3	77
Rumunsko - RO	6	3	3	0	201
Řecko - GR	6	0	1	1	69
SSSR - SU	6	1	2	2	140
Španělsko - SP	4	0	0	0	25
Švédsko - SE	6	0	0	1	65
Tunis - TN	4	0	0	2	46
Turecko - TR	6	0	0	2	54

Země	Počet účastníků	Cena I.	Cena II.	Cena III.	Součet bodů
USA - US	6	2	4	0	180
Velká Británie - GB	6	0	2	3	121
Vietnam - VN	6	1	3	1	144
Celkem	209	14	35	52	3114

Výsledky čs. žáků na 26. MMO

Jméno a škola	Počet bodů za úlohu						Celkem	Cena
	1	2	3	4	5	6		
Radek ADAMEC 3. r., G Kroměříž	0	7	0	0	0	0	7	—
Petr HÁJEK 3. r., GWP Praha	0	0	0	0	6	5	11	—
Adam OBDRŽÁLEK 3. r., GWP Praha	1	7	1	7	0	6	22	II.
Marcel POLAKOVIČ 2. r., GAM Bratislava	7	7	0	4	0	7	25	II.
Jarmila RANOŠOVÁ 4. r., GMK Bílovec	7	3	0	3	7	3	23	II.
Ján ŠEFČÍK 4. r., GAM Bratislava	7	7	0	1	1	1	17	III.
Součty:	22	31	1	15	14	22	105	

Řešení úloh 26. MMO

1. Označme S střed kružnice k, r její poloměr a E, F, G po řadě body, v nichž se k dotýká stran BC, CD, DA. Platí

$$|EC| = |FC|, |FD| = |GD|,$$

$$SE \perp BC, SF \perp CD, SG \perp AD,$$

takže

$$|\sphericalangle CSE| = |\sphericalangle CSF|, |\sphericalangle DSG| = |\sphericalangle DSF|.$$

Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, platí

$$|\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle BAD| = \pi = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC|.$$

Označíme-li α velikost úhlu CSE a β velikost úhlu DSG, bude $|\sphericalangle BAD| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$. Pro délky stran pravoúhlých trojúhelníků ASG, DSG, BSE, CSE dostaneme pak tato vyjádření:

$$|AS| = \frac{r}{\sin 2\alpha}, \qquad |BS| = \frac{r}{\sin 2\beta},$$

$$|AG| = r \operatorname{cotg} 2\alpha, \qquad |BE| = r \operatorname{cotg} 2\beta,$$

$$|CE| = r \operatorname{tg}\alpha, \qquad |DG| = r \operatorname{tg}\beta.$$

Z rovnosti

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

vyplývá rovnost

$$|AS| = |AG| + |CE|;$$

obdobně odvodíme i rovnost

$$|BS| = |BE| + |DG|$$

a sečtením obou těchto rovností pak dostaneme dokazovanou rovnost

$$|AB| = |AD| + |BC|.$$

2. Skutečnost, že čísla i, j mají touž barvu, budeme značit $i \sim j$; relace $\sim$ je ekvivalence na množině $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, pro kterou platí

(1) $\quad j \sim n - j \qquad$ pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1;$

(2) $\quad j \sim |k - j| \qquad$ pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1, j \neq k.$

Relaci $\sim$ rozšíříme na množinu Z všech celých čísel, a to tak, že položíme jednak

(3) $$0 \sim k,$$

jednak

(4) $$j + n \sim j \qquad \text{pro všechna } j \in \mathsf{Z}.$$

Snadno se přesvědčíme, že po tomto rozšíření platí

(1′) $$j \sim n - j$$

pro všechna $j \in \mathsf{Z}$. Skutečně, je-li $j \in \mathsf{Z}$, $j = np + r$, $p \in \mathsf{Z}$, $0 \leqq r < n$, je

$$j = np + r \sim r \sim n - r \sim n - r - np = n - j.$$

Dokážeme nyní, že pro každé $q \in \mathsf{Z}$ je

(5) $$qk \sim k.$$

Vztah (5) platí triviálně pro $q = 1$, podle (3) pro $q = 0$; podle (1′) a (4) je pak

$$-k \sim n - k \sim k,$$

takže (5) platí také pro $q = -1$.

Dále postupujeme indukcí. Předpokládejme, že (5) platí pro všechna $q \in \mathsf{Z}$, $|q| \leqq m$, kde $m \geqq 1$, a dokážeme, že (5) platí také pro $q = m + 1$ a pro $q = -m - 1$.

Nechť $(m + 1)k = np + r$, $0 \leqq r < n$, takže podle (4) je $(m + 1)k \sim r$. Je-li $r = k$, máme vztah (5). Je-li $r > k$, je podle (2) $r \sim r - k$, avšak $r - k \sim np + r - k = mk \sim k$. Je-li konečně $r < k$, je podle (2) $r \sim k - r$, ale $k - r \sim$ $\sim k - np - r = -mk \sim k$.
Pro $q = m + 1$ tedy (5) platí.

Obdobně nechť $(-m - 1)k = np + r$, $0 \leqq r < n$, takže $(-m - 1)k \sim r \sim n - r$. Je-li $n - r = k$, platí (5). Je-li $n - r > k$, je podle (2) $n - r \sim n - r - k$, avšak podle (4) je pak $n - r - k \sim n - r - k - n(p + 1) = -r - k -$ $- np = -k + (m + 1)k = mk \sim k$. Je-li $n - r < k$, je podle (2) $n - r \sim k - n + r$ dále podle (4) $k - n + r \sim k -$ $- n + r + n(p + 1) = k + np + r = -mk \sim k$. Opět tedy vždy platí (5).

Poněvadž čísla n, k jsou nesoudělná, lze každé celé číslo $z \in \mathsf{Z}$ vyjádřit ve tvaru

$$z = ak + bn,$$

kde $a \in \mathsf{Z}$, $b \in \mathsf{Z}$. Podle (4) a (5) platí pak pro každé $z \in \mathsf{Z}$

$$z = ak + bn \sim ak \sim k;$$

v ekvivalenci $\sim$ patří všechna čísla do jediné třídy - tj. mají všechna touž barvu.

3. Při $0 < k < 2^m$, $m \geqq 1$, je číslo $\binom{2^m}{k}$ sudé, platí totiž

$$k \binom{2^m}{k} = 2^m \binom{2^m - 1}{k - 1}.$$

Mnohočlen $Q_{2^m}(x) = (1 + x)^{2^m}$ tedy můžeme psát ve tvaru

$$Q_{2^m}(x) = 1 + R_m(x) + x^{2^m},$$

kde R_m je mnohočlen stupně $2^m - 1$, jehož koeficienty jsou vesměs sudá čísla.

Je-li P libovolný mnohočlen stupně n, $n < 2^m$, pak

$$P(x)Q_{2^m}(x) = P(x) + P(x)R_m(x) + x^{2^m} P(x), \tag{1}$$

takže

$$w(P \,.\, Q_{2^m}) = 2w(P). \tag{2}$$

Nerovnost

$$w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_n}) \geqq w(Q_{i_1}), \tag{3}$$

kde $0 \leqq i_1 < \ldots < i_n$, dokážeme nyní indukcí podle stupně i_n. Pro $i_n = 0$, $i_n = 1$ je ovšem (3) triviální. Předpokládejme tedy, že (3) platí, jakmile $i_n < 2^m$, $m \geqq 1$, a dokážeme, že potom platí také, když $2^m \leqq i_n < 2^{m+1}$.

Rozlišíme dva případy:

I. Nechť

$$2^m \leqq i_1 < \ldots < i_n < 2^{m+1}.$$

Potom

$$Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_n} = Q_{2^m}(Q_{i_1-2^m} + \ldots + Q_{i_n-2^m})$$

a podle (2) a indukčního předpokladu je

$$w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_n}) = 2w(Q_{i_1-2^m} + \ldots + Q_{i_n-2^m}) \geqq$$
$$\geqq 2w(Q_{i_1-2^m}) = w(Q_{i_1});$$

nerovnost (3) tedy platí.

II. Nechť

$$i_1 < \ldots < i_{q-1} < 2^m \leqq i_q < \ldots < i_n < 2^{m+1}$$

pro některé q, $1 < q \leqq n$. Potom

(4) $$Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_{q-1}}$$

je mnohočlen stupně menšího než 2^m, a tedy

(5) $$w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_{q-1}}) \geqq w(Q_{i_1}).$$

Mnohočlen

(6) $$Q_{i_q}(x) + \ldots + Q_{i_n}(x) = \sum_{j=0}^{i_n} c_j x^j$$

můžeme vyjádřit ve tvaru

$$Q_{2^m}(x)\,[Q_{i_q-2^m}(x) + \ldots + Q_{i_n-2^m}(x)] =$$
$$= [1 + R_m(x) + x^{2^m}]\,[Q_{i_q-2^m}(x) + \ldots + Q_{i_n-2^m}(x)].$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že ke každému lichému číslu $c_j (0 \leqq j < 2^m)$ lze přiřadit rovněž liché číslo c_{j+2^m}. Proto se přičtením mnohočlenu (6) k mnohočlenu (4) číslo w nezmenší:

$$w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_n}) \geqq w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_q - 1}).$$

Podle (5) tedy nerovnost (3) platí i v tomto případě.

4. Každé číslo $c \in \mathsf{M}$ lze vyjádřit ve tvaru

(1) $$c = 2^{k_1} 3^{k_2} 5^{k_3} 7^{k_4} 11^{k_5} 13^{k_6} 17^{k_7} 19^{k_8} 23^{k_9},$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_9$ jsou nezáporná celá čísla. Také součin libovolného počtu čísel z množiny M je možno vyjádřit ve tvaru (1). Přitom číslo c z (1) je druhou resp. čtvrtou mocninou celého čísla právě tehdy, jsou-li exponenty $k_1, k_2, \ldots, k_9$ vesměs čísla sudá, resp. dělitelná čtyřmi.

Poněvadž $2^9 = 512$, najdeme v každé množině P obsahující alespoň 513 (různých) čísel tvaru (1) minimálně dvě čísla c, c' taková, že pro jejich exponenty $k_1, k_2, \ldots, k_9$, resp. $k_1', k_2', \ldots, k_9'$ z vyjádření (1) platí:

(2) pro každé $j = 1, 2, \ldots, 9$ je číslo $k_j + k_j'$ sudé.

Potom je ovšem součin cc' těchto čísel čtvercem celého čísla $cc' = d^2$, přičemž číslo d lze opět vyjádřit ve tvaru (1).

Z množiny M o 1 985 prvcích takto můžeme postupně získat $\dfrac{1\,985 - 511}{2} = 737$ dvojic čísel c, c', resp. 737 čísel d $(d^2 = cc')$ tvaru (1). Poněvadž $737 > 512$, je opět možno mezi čísly d najít minimálně dvě (ve skutečnosti alespoň 113) čísla d, d' taková, že pro jejich exponenty $k_1, k_2, \ldots, k_9$, resp. $k_1', k_2', \ldots, k_9'$ platí (2). Je tedy opět dd' čtvercem celého čísla b, $dd' = b^2$, takže $d^2d'^2$ je jeho čtvrtou mocninou $d^2d'^2 = b^4$. Avšak d^2 a stejně tak d'^2 je součinem dvou čísel z množiny M - získali jsme tak čtyři (navzájem různá) čísla z M, jejichž součin je čtvrtou mocninou celého čísla.

5. Trojúhelník ABC nemůže být rovnoramenný se základnou AC, neboť pak by kružnice k_1 a k_2 měly společný jediný bod B. Můžeme proto bez újmy obecnosti předpokládat, že

$$(1) \qquad |\sphericalangle BAC| < |\sphericalangle BCA|,$$

takže $|\sphericalangle BAC| < 90°$.

Označme S střed kružnice k_1 a R střed kružnice k_2. Dokážeme nejprve, že $SORB$ je rovnoběžník.

Poněvadž čtyřúhelník $AKNC$ je tětivový, platí

$$|\sphericalangle BNK| = |\sphericalangle BAC|.$$

Trojúhelníky BCS a BKR jsou rovnoramenné a platí v nich

jednak

$$|\sphericalangle SBN| = |\sphericalangle SBC| = 90° - \frac{1}{2}|\sphericalangle BSC| =$$

$$= 90° - |\sphericalangle BAC| = 90° - |\sphericalangle BNK|,$$

takže nutně $BS \perp NK$, jednak

$$|\sphericalangle RBK| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle BRK| = 90^\circ - |\sphericalangle BNK| =$$

$$= 90^\circ - |\sphericalangle BAC|,$$

takže $BR \perp AC$.

Avšak $SO \perp AC$ a $RO \perp KN$, neboť společná tětiva dvou kružnic je vždy kolmá na spojnici jejich středů. Je tedy skutečně $SO \parallel BR$ a $BS \parallel RO$, takže $SORB$ je rovnoběžník.

Označme nyní B' bod kružnice k_2 takový, že BB' je jejím průměrem. Potom ovšem je také $SOB'R$ rovnoběžník.

Je-li $M = B'$, je $OM = OB' \parallel SR \perp BM$. Je-li $M \neq B'$, je jednak $BM \perp B'M$ (Thales), jednak $OB' \parallel SR \perp BM$. To však znamená, že bod B' leží na přímce OM a $OM \perp BM$.

6. Označme M množinu všech posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel splňujících

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

pro všechna $n \in \mathsf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; vztah (1) lze vyjádřit také ve tvaru

$$x_n = \frac{1}{2n}(\sqrt{4n^2 x_{n+1} + 1} - 1). \tag{2}$$

Z (1) a (2) je ihned vidět, že pro posloupnosti $\{x_n\} \in \mathsf{M}$, $\{y_n\} \in \mathsf{M}$ platí tato tvrzení:

(i) jestliže $x_n = y_n$ pro některé $n \in \mathsf{N}$, potom $x_n = y_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;

(ii) jestliže $x_n < y_n$ pro některé $n \in \mathsf{N}$, potom $x_n < y_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$;

(iii) k libovolným číslům $c > 0$, $m \in \mathsf{N}$ existuje v M posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $x_m = c$.

Ke každému $k \in \mathsf{N}$ tedy najdeme v M posloupnost $\{{}^k x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je ${}^k x_k = 1$, a posloupnost $\{{}_k x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je ${}_k x_k = 1 - \frac{1}{k}$. Podle (ii) je pak ${}_k x_n < {}^k x_n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$, zejména tedy ${}_k x_1 < {}^k x_1$.

Zároveň máme podle (1) pro $k \in \mathsf{N}$

$$^{k+1}x_{k+1} = 1 < 1 + \frac{1}{k} = {}^k x_{k+1}$$

a

$$_{k+1}x_{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} > 1 - \frac{1}{k} = {}_k x_{k+1},$$

takže platí

$$_k x_1 < {}_{k+1}x_1 < {}^{k+1}x_1 < {}^k x_1 \tag{3}$$

pro každé $k \in \mathsf{N}$. Posloupnosti $\{{}^k x_1\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{{}_k x_1\}_{k=1}^{\infty}$ jsou tedy monotonní a omezené, tudíž konvergentní a platí

$$\lim_{k \to \infty} {}_k x_1 \leqq \lim_{k \to \infty} {}^k x_1;$$

existuje tedy kladné číslo z takové, že

$$\lim_{k \to \infty} {}_k x_1 \leqq z \leqq \lim_{k \to \infty} {}^k x_1. \tag{4}$$

Podle (3) je ovšem

$${}_k x_1 < z < {}^k x_1$$

pro každé $k \in \mathrm{N}$, takže pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{M}$, v níž je $x_1 = z$, platí

$$\frac{n-1}{n} = {}_n x_n < x_n < {}^n x_n = 1 \tag{5}$$

pro každé $n \in \mathrm{N}$, resp. podle (1)

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1. \tag{6}$$

Kdyby v M existovaly dvě různé posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{x_n'\}$, $x_n < x_n'$, obě splňující (6) pro všechna $n \in \mathrm{N}$, platilo by podle (5)

$$x_{n+1}' - x_{n+1} = (x_n' - x_n)\left(x_n' + x_n + \frac{1}{n}\right) >$$

$$> (x_n' - x_n)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \geqq x_n' - x_n$$

pro $n \in \mathrm{N}$, na druhé straně však také

$$x_n' - x_n < 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

což vede ke sporu. Existuje tedy právě jedna kladná hodnota x_1, (cca 0,446 534 914 ...) taková, že posloupnost $\{x_n\} \in \mathsf{M}$ s prvním členem x_1 splňuje (6) pro všechna $n \in \mathsf{N}$.