33. ročník matematické olympiády

Kategorie B

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 72–89.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404785

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

B - I - 1

Všechna obvodová pole šachovnice tvaru 497×497 jsou očíslována přirozenými čísly od 1 do 1984. Číslování začíná v levém horním rohu a pokračuje ve směru pohybu hodinových ručiček po obvodu šachovnice. Je dáno přirozené číslo k. Na očíslované pole klademe figurky tak, že první položíme na pole číslo 1 a další figurky pokládáme o k polí dále, tedy druhou na pole číslo $1 + k$, třetí na pole $1 + 2k$, atd. ve směru očíslování, dokud se nedostaneme na pole, které už je obsazené figurkou. V tom okamžiku pokládání figurek končí.

a) Na kterém poli skončí pokládání figurek?

b) Kolik obvodových polí šachovnice bude obsazeno figurkami?

Řešení. Nejdříve je třeba vědět, kolik má naše šachovnice polí na obvodu. V horní řadě je jich 497, v pravém sloupci ještě 496, stejný počet ještě v dolní řadě, a v levém sloupci zbývá 495, celkem 1984. První figurku položíme na pole číslo 1, druhou na pole číslo $1 + k$, třetí na pole $1 + 2k$, atd., proto i-tá figurka připadne na pole číslo $1 + (i - 1)k$. Pokud je však toto číslo už větší než číslo 1984, vezmeme pouze jeho zbytek při dělení číslem 1984. Při našem obíhání obvodových polí šachovnice následuje totiž po poli číslo 1984 pole číslo 1. Nechť je $j > i$. Figurka j-tá připadne právě tehdy na stejné pole jako figurka i-tá, jestliže čísla $1 + (j - 1)k$ a $1 + (i - 1)k$ dávají stejný zbytek při dělení číslem 1984, neboli když je jejich rozdíl $(j - i)k$ dělitelný číslem 1984. Jestliže i-tá a j-tá figurka připadnou na téže pole, připadnou na téže pole také figurky s pořadovými čísly $i - 1$ a $j - 1$, dále figurky s pořadovými čísly $i - 2$, $j - 2$, atd. Jelikož však pokládání figurek končí, jakmile má být některá figurka položena na již obsazené pole, musí být $i = 1$ a pokládání figurek končí vždy na prvním poli. Číslo j je takové nejmenší přirozené číslo větší než 1, pro které je číslo $(j - 1)k$ dělitelné číslem 1984, tedy $(j - 1)k = m \, . \, 1984$, m je přirozené. Tady je výhodné vzít na pomoc největšího společného dělitele čísel k a 1984, který označíme D. Je pak $(j - 1)\dfrac{k}{D} = m\dfrac{1984}{D}$ a přirozená čísla $\dfrac{k}{D}$, $\dfrac{1984}{D}$ jsou nesoudělná. Protože j má být nejmenší přirozené číslo, jež splňuje výše uvedenou rovnost, musí být $(j - 1) = \dfrac{1984}{D}$ a to je též počet obsazených polí, protože j-tá figurka by už musela být položena na pole číslo 1, obsazené první figurkou. Jsou-li čísla k, 1984 nesoudělná, budou obsazena všechna obvodová pole šachovnice.

B - I - 2

V rovině je dáno šest navzájem různých bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Některými dvojicemi z těchto bodů jsme vedli přímku. Nechť s_k označuje počet všech těchto přímek, které procházejí bodem A_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$. Jestliže z každých tří různých bodů množiny $A_1, \ldots, A_6$ lze vybrat dvojici bodů, jimiž byla vedena přímka, pak platí nerovnost

$$(2s_1 - 7)^2 + (2s_2 - 7)^2 + \ldots + (2s_6 - 7)^2 \leqq 54.$$

Dokažte.

Řešení. Každé z čísel s_k se rovná některému z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, proto se číslo $(2s_k - 7)^2$ rovná některému z čísel 49, 25, 9, 1. Jestliže pro všechna $k = 1, 2, \ldots, 6$ platí $s_k \geqq 2$, je pro každé k hodnota $(2s_k - 7)^2$ rovna 1 nebo 9, a proto je dokazovaná nerovnost splněna. Nechť se některé s_k rovná nule, můžeme předpokládat, že je to číslo s_1. To znamená, že bod A_1 není spojen přímkou s žádným dalším bodem z bodů $A_2, \ldots, A_6$. Pak ale musí být spojeny přímkou každé dva z těchto pěti bodů. Kdyby například nebyly body A_2, A_3 spojeny přímkou, znamenalo by to, že jsme žádnými dvěma body z bodů A_1, A_2, A_3 nevedli přímku, což je proti předpokladu. Je proto $s_1 = 0$ a $s_k = 4$ pro $k = 2, 3, \ldots, 6$, součet na levé straně dokazované nerovnosti je $49 + 5 . 1 = 54$, nerovnost je splněna. Zbývá vyšetřit případ, kdy se některé s_k, třeba s_1, rovná 1. Pak jsme bodem A_1 vedli jedinou přímku, můžeme předpokládat, že jsme bod A_1 spojili přímkou s bodem A_2. Podobně jako v předcházejícím případě dokážeme, že jsme vedli přímku každými dvěma body z bodů A_3, A_4, A_5 a A_6. Přitom jsme žádný z těchto bodů nespojili přímkou s bodem A_1. Nevíme, zda jsme vedli přímku bodem A_2, a některým z bodů $A_3, \ldots, A_6$. Víme však, že platí $s_1 = 1$,

$1 \leqq s_2 \leqq 5, 3 \leqq s_k \leqq 4$ pro $k = 3, 4, 5, 6$. Proto je $(2s_1 - 7)^2 = 25$, $(2s_2 - 7)^2 \leqq 25$ a $(2s_k - 7)^2 = 1$ pro $k = 3, 4, 5, 6$. Dokazovaná nerovnost je i v tomto případě vždy splněna.

B - I - 3

Nechť a, b jsou daná reálná čísla. Nalezněte všechny uspořádané dvojice reálných čísel x, y, vyhovující soustavě nerovnic

$$x^2 + y^2 \leqq ax + by$$

$$|a - b + y - x| \leqq a + b - x - y$$

$$|x - y| \leqq -x - y\,.$$

Proveďte diskusi vzhledem k parametrům a, b.

Řešení. První nerovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 \leqq \frac{a^2 + b^2}{4}\,,$$

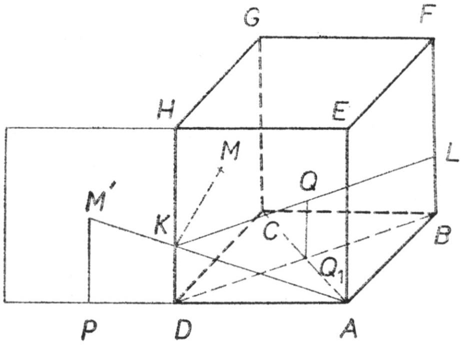
dvojice (x, y) splňuje tuto nerovnici právě tehdy, když bod $[x, y]$ patří do kruhu o středu $\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$ a poloměru $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, který se ovšem v případě $a = b = 0$ redukuje na pouhý bod $[0, 0]$. Pro další postup je dobře si uvědomit, že $|r| \leqq s$ platí tehdy a jen tehdy, když platí $r \leqq s$ a současně $-r \leqq s$. Proto je druhá nerovnice úlohy splněna právě tehdy, když je $y \leqq b$ a současně $x \leqq a$. Stejně tak můžeme poslední nerovnici úlohy nahradit nerovnicemi $x \leqq 0$ a $y \leqq 0$. Dál musíme rozlišit čtyři případy podle znamének čísel a, b. Je-li například

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$, musí být $x \leqq 0$, $y \leqq 0$ a bod $[x, y]$ musí ležet v kruhu popsaném na začátku řešení úlohy. Jeho střed leží v 1. kvadrantu, jeho průnikem s 3. kvadrantem je pouze počátek [0, 0]. Podobně postupujeme v ostatních třech případech. Řešením dané soustavy nerovnic je vždy právě jedna uspořádaná dvojice reálných čísel. Pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ je to dvojice (0, 0), je-li $a < 0$, $b \geqq 0$, je řešením dvojice $(a, 0)$, pro $a \geqq 0$, $b < 0$ je to dvojice $(0, b)$, a konečně v případě $a < 0$, $b < 0$ je řešením dvojice (a, b). Výsledek můžeme shrnout takto: Řešením dané soustavy nerovnic je vždy jedině dvojice $x = \min(a, 0)$, $y = \min(b, 0)$. Označení $\min(c, d)$ znamená vzít minimum z čísel c, d, tedy menší z čísel c, d, nebo kterékoliv z nich, jsou-li si rovna.

B - I - 4

Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Vrchol A je spojen po povrchu krychle nejkratší čarou se středem stěny $BCGF$, respektive $DCGH$. Tato lomená čára má s hranou BF, respektive DH společný bod L, resp. K. Určete obsah trojúhelníku AKL.

Řešení. Představme si, že jsme stěnu $DCGH$ uvažované krychle otočili kolem hrany DH do roviny $AEHD$ tak, že se její střed M zobrazí do bodu M', různého od středu stěny $DAEH$ (obr. 11). Protože bod A byl spojen s bodem M přes bod K nejkratší lomenou čarou, leží body A, K, M' na přímce a lomená čára se skládá z úseček AK a KM. Z podobnosti trojúhelníků ADK a APM' určíme velikost úsečky DK. Protože $|AP| = 3|PM'|$, je $|AD| = 3|DK|$, tedy $|DK| = \dfrac{a}{3}$. Stej-



Obr. 11

nou velikost má úsečka BL, trojúhelník AKL je rovnoramenný se základnou KL, $|KL| = a\sqrt{2}$. Označíme-li střed úsečky KL a jeho pravoúhlý průmět do roviny ABC písmeny Q, Q_1, je $|QQ_1| = \frac{a}{3}$, $|AQ| = a\frac{\sqrt{22}}{6}$ (dostaneme z pravoúhlého trojúhelníku AQQ_1), obsah trojúhelníku AKL je tedy $a^2\frac{\sqrt{11}}{6}$.

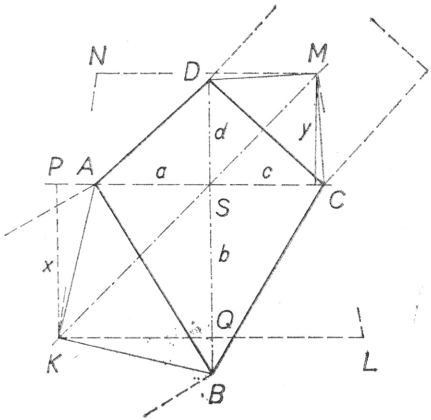
B - I - 5

Je dán deltoid $ABCD$, jehož úhlopříčka BD délky f půlí úhlopříčku AC délky e. Označme postupně K, L, M, N středy vně sestrojených čtverců nad stranami AB, BC, CD, DA. Dokažte tato tvrzení:

a) Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky KM a LN jsou k sobě kolmé a protínají se v témže bodě S, jako úhlopříčky daného deltoidu.

b) Obsah lichoběžníku $KLMN$ se rovná obsahu daného deltoidu zvětšenému o obsahy dvou čtverců se stranami délek $\frac{e}{2}, \frac{f}{2}$.

Řešení. Označme velikosti úseček AS, BS, CS a DS po řadě a, b, c, d. Je pak $a = c = \frac{e}{2}$, $b + d = f$. Veďme bodem K kolmice k úhlopříčkám AC, BD deltoidu, jejich paty označíme P, Q (obr. 12). Pak jsou přímky KP, KQ na sebe kolmé,



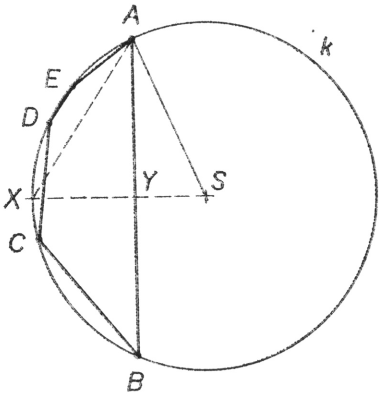
Obr. 12

stejně tak přímky KA, KB, navíc je $|KA| = |KB|$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky KPA a KQB shodné. Z toho plyne rovnost $|KP| = |KQ|$, to znamená, že bod K leží na ose úhlu ASB. Stejně tak dokážeme, že bod M leží na ose úhlu DSC, a proto prochází přímka KM bodem S. Označme x velikost úsečky KP. Protože je $|PA| = |QB|$, je $x - a = b - x$, tedy $x = \frac{a+b}{2}$. Označíme-li vzdálenosti bodu M od přímek AC a BD jako y, dostaneme obdobným způsobem $y = \frac{a+d}{2}$. Je zřejmě $y \neq x$, jinak by bylo $b = d$ a místo deltoidu bychom měli kosočtverec. Ze souměrnosti podle přímky BD plyne ihned, že čtyřúhelník $KLMN$ je lichoběžník o základnách $2x$, $2y$ a výšce $x + y$. Jeho obsah je $(x + y)^2 = \frac{(a + b + a + d)^2}{4} = \frac{(e+f)^2}{4} = \frac{ef}{2} + \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4}$. Protože obsah výchozího deltoidu je $\frac{ef}{2}$, je tím dokázáno i tvrzení b) úlohy.

B - I - 6

Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má všechny vrcholy na kružnici, jeho nejdelší strana má délku $\sqrt{2}$ a jeho třetí nejdelší strana délku 1. Dokažte, že poloměr kružnice je nejvýše 1.

Řešení. Můžeme předpokládat, že nejdelší stranou pětiúhelníku je strana AB, tedy $|AB| = \sqrt{2}$. Ukážeme nejprve, že střed S kružnice k pětiúhelníku $ABCDE$ opsané je bodem pětiúhelníku. Kdyby tomu tak nebylo, ležely by vrcholy C, D, E v opačné polorovině ohraničené přímkou AB, než ve které leží bod S (obr. 13). Označme X ten bod kružnice k, který leží v polorovině ABC a zároveň na průměru kružnice k kolmém k přímce AB, dále Y průsečík úseček AB, XS.



Obr. 13

Protože $|\sphericalangle ASY| < 90°$, je $|\sphericalangle AXY| > 45°$, proto je $|XY| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $|AX| < 1$. Podle předpokladu jsou délky dvou stran BC, CD, DE, AE pětiúhelníku aspoň rovny 1. Odpovídající středové úhly by pak musely být větší než $|\sphericalangle ASY|$, což není možné. Můžeme tedy předpokládat, že bod S je bodem pětiúhelníku. Kdyby byl poloměr kružnice k větší než 1, byl by středový úhel odpovídající straně AB menší než 90°, totéž by platilo pro středový úhel odpovídající další nejdelší straně. Další strany mají délky nejvýše rovny jedné, proto jim odpovídající středové úhly jsou menší než 60°. Pak by se ovšem nemohl součet všech pěti středových úhlů rovnat 360°, jak však na druhé straně plyne z toho, že bod S je bodem pětiúhelníku. Proto se poloměr kružnice k rovná nejvýše 1.

B - S - 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = |ax + by|$$

$$bx - ay = 0\,.$$

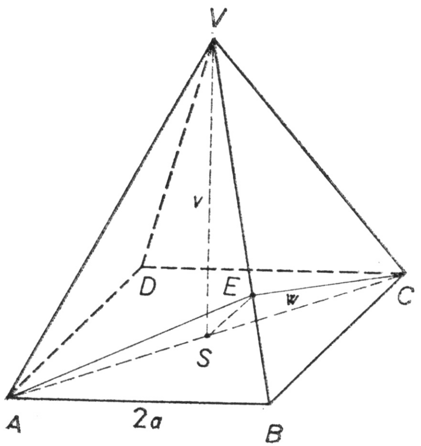
Proveďte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b.

Řešení. Je-li $a = b = 0$, má soustava jediné řešení $x = y = 0$. V opačném případě můžeme předpokládat $a \neq 0$, případ $b \neq 0$ bychom řešili obdobně. Je-li $a \neq 0$, je $y = \frac{bx}{a}$. Dosazením do rovnic $x^2 + y^2 = ax + by$, $x^2 + y^2 = -ax - by$ dostaneme $x = a$, $x = -a$, $x = 0$. K nim vypočteme hodnoty $y = \frac{bx}{a}$ a zkouškou se přesvědčíme, že dvojice (a, b), $(-a, -b)$ a $(0, 0)$ jsou opravdu řešením.

B - S - 2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s výškou v a velikostí podstavné hrany $2a$. Vypočtěte odchylku sousedních bočních stěn jehlanu.

Řešení. Označme E patu kolmice vedené bodem A k přímce BV (obr. 14). Ta je též patou kolmice vedené bodem C



Obr. 14

k přímce BV. Máme určit velikost $\alpha = |\sphericalangle\, AEC|$. Trojúhelník AEC je rovnoramenný, jeho základna AC je půlena středem S čtverce $ABCD$. Také trojúhelník BCV je rovnoramenný, jeho základna BC má velikost $2a$, výška příslušná k této základně je $\sqrt{v^2 + a^2}$, velikost ramene je $|VB| = \sqrt{v^2 + 2a^2}$. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku BCV dostaneme pro $w = |EC|$ vztah $w\sqrt{v^2 + 2a^2} = 2a\sqrt{v^2 + a^2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku ESC plyne pro $\beta = |\sphericalangle\, SEC|$ rovnost $\sin\beta = \dfrac{a\sqrt{2}\,\sqrt{v^2 + 2a^2}}{2a\sqrt{v^2 + a^2}} = \dfrac{\sqrt{v^2 + 2a^2}}{\sqrt{2v^2 + 2a^2}}$, tudíž $\cos\alpha = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = -\dfrac{a^2}{v^2 + a^2}$. Tím je odchylka α určena.

Číslo $n = 1234\ldots328329$ vzniklo tak, že jsme zapsali čísla 1, 2, ..., 328, 329 bez mezer za sebou. Dokažte, že číslo n není druhou mocninou žádného přirozeného čísla.

Řešení. Chceme dokázat, že číslo n není druhou mocninou žádného přirozeného čísla m. Mohli bychom postupovat sporem: Kdyby platilo $m^2 = n$, muselo by číslo m končit cifrou 3 nebo 7, aby jeho druhá mocnina měla na konci číslici 9. Vezměme nyní v úvahu i předposlední číslice. Aby číslo m^2 končilo dvojčíslím 29, musí číslo m končit dvojčíslím 23, 27, 73 nebo 77. Tak postupujeme dále, až dojdeme ke sporu. To je ovšem postup zdlouhavý. Ukážeme si lepší metodu. Stačí totiž ukázat, že číslo n je dělitelné nějakým prvočíslem a není dělitelné jeho druhou mocninou. Zkusíme prvočíslo 3, protože známe jednoduchá kritéria pro dělitelnost třemi i devíti. Číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je třemi dělitelný jeho ciferný součet, totéž platí pro dělitelnost devíti. Platí ještě víc: Číslo a jeho ciferný součet dávají při dělení třemi stejný zbytek a totéž platí pro dělení devíti. Jaký je ciferný součet čísla n? Nám stačí znát jeho zbytek při dělení devíti. Považujeme-li dvě čísla za sobě rovná, jestliže se liší o celý násobek devíti (říkáme, že počítáme modulo 9), pak se sobě rovnají ciferný součet $C(s)$ a číslo s pro každé s. Kromě toho je $C(n) = C(1) + C(2) + C(3) + \ldots + C(329) = 1 + 2 +$

$$+ 3 + \ldots + 329 = 329 \,.\, \frac{330}{2} = 329 \,.\, 165 = 5 \,.\, 3 = 6,$$ vše

modulo 9. Proto dostaneme při dělení čísla n číslem 9 zbytek 6, při dělení třemi zbytek 0. Proto nemůže být číslo n druhou mocninou některého přirozeného čísla.

B - S - 3b

V rovině je dáno k množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ přímek, každá z množin $M_i (i = 1, \ldots, k)$ se skládá z m navzájem různých rovnoběžných přímek. Pro $i \neq j$ nejsou přímky množiny M_i rovnoběžné s přímkami množiny M_j a žádné tři přímky množiny $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ neprocházejí jedním bodem. Určete, na kolik částí dělí rovinu přímky z množiny $M_1 \cup M_2 \cup \ldots$ $\ldots \cup M_k$.

Řešení. Množina M_1 dělí rovinu na $m + 1$ částí, množina $M_1 \cup M_2$ rozdělí rovinu na $(m + 1)^2$ částí. Každá přímka z M_3 se protne s každou přímkou z množiny $M_1 \cup M_2$, těch je $2m$, a protíná proto $2m + 1$ částí z těch $(m + 1)^2$. Každou z těchto částí rozdělí na dvě. Proto $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ dělí rovinu na $(m + 1)^2 + m(2m + 1) = 1 + 3m + 3m^2$ částí. Obdobně odvodíme, že množina $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ dělí rovinu na $1 + 3m + 3m^2 + m(3m + 1) = 1 + 4m + 6m^2$ částí. Přidáním množiny M_5 dostaneme $1 + 4m + 6m^2 + m(4m + 1) =$ $= 1 + 5m + 10m^2$ částí. Matematickou indukcí pak dostaneme pro všech k množin konečný výsledek $1 + km + \binom{k}{2} m^2$.

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Určete, kolik řešení má v oboru reálných čísel soustava rovnic

$$x^2 + y^2 = ax + by$$

$$|bx - ay| = 1.$$

Provedte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b.

Řešení. Všimněme si nejdříve, že máme určit pouze počet řešení, ne řešení sama, i když by to také nebylo obtížné. Dvojice (x, y) je řešením dané soustavy, právě když je buď řešením soustavy rovnic $x^2 + y^2 = ax + by$, $bx - ay = 1$, nebo soustavy $x^2 + y^2 = ax + by$, $ay - bx = 1$. Žádná dvojice není řešením obou soustav. Je-li $a = b = 0$, nemá ani jedna z popsaných soustav řešení. V opačném případě budeme předpokládat, že $a \neq 0$, jinak bychom zaměnili x a y, a a b. Dvojice (x, y) je pak řešením první soustavy právě tehdy, je-li $y = \dfrac{bx - 1}{a}$ a x je řešením kvadratické rovnice

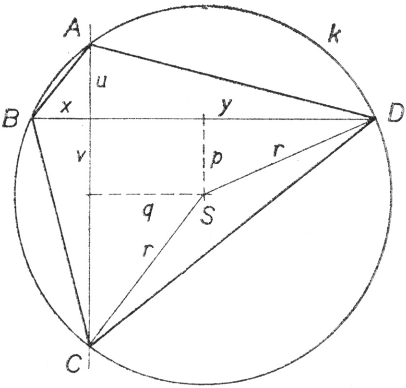
$$(a^2 + b^2)x^2 - (2b + a^3 + ab^2)\,x + 1 + ab = 0\,,$$

její diskriminant je $a^2[(a^2 + b^2)^2 - 4]$. V případě druhé soustavy rovnic dostaneme kvadratickou rovnici s týmž diskriminantem. Proto platí: Je-li $a^2 + b^2 > 2$, má úloha čtyři řešení, v případě $a^2 + b^2 = 2$ má úloha dvě řešení. Je-li $a^2 + b^2 < 2$, nemá úloha řešení. Zde je zahrnut i případ $a = b = 0$. Výsledek je dobře vidět při grafickém znázornění. Je-li aspoň jedno z čísel a, b nenulové, je první rovnicí soustavy dána kružnice se středem v bodě $\left[\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right]$, procházející počátkem soustavy souřadnic. Druhou rovnicí jsou dány dvě přímky, jež jsou rovnoběžné se spojnicí středu kružnice a počátku a mají od středu kružnice vzdálenost $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

poloměr kružnice je $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

B - II - 2

V konvexním čtyřúhelníku, kterému lze opsat kružnici a jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé, se součet druhých mocnin velikostí protějších dvou stran rovná druhé mocnině průměru kružnice čtyřúhelníku opsané. Dokažte.



Obr. 15

Řešení. Zvolme označení jako na obr. 15, jedna úhlopříčka je druhou rozdělena na úsečky velikostí x, y, druhá je rozdělena první úhlopříčkou na úsečky u, v. Vzdálenosti úhlopříček od středu kružnice čtyřúhelníku opsané jsme označili p, q. Označíme-li ještě dvě protější strany čtyřúhelníku a, c, je

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2.$$

Dále je $y = \sqrt{r^2 - p^2} + q$, $x = \sqrt{r^2 - p^2} - q$, podobně pro u, v; r značí poloměr uvažované kružnice. Dosazením dostaneme $a^2 + c^2 = 4r^2 = (2r)^2$, což jsme měli dokázat.

B - II - 3a

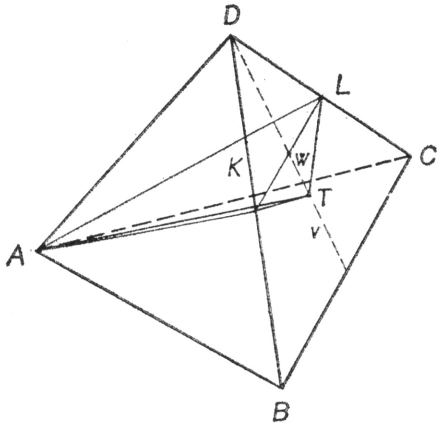
Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují rovnici

$$|x^2 - 2| + \left[\frac{x^2 - 1}{2}\right] = 1\,.$$

Poznámka. $[a]$ znamená celou část z čísla a.

Řešení. Aby bylo číslo x řešením, musí být číslo $x^2 - 2$ celé, protože jeho absolutní hodnota se má rovnat celému číslu. To však znamená, že x^2 musí být celé. Je-li x^2 liché, je $\frac{x^2 - 1}{2}$ celé a máme řešit rovnici $|x^2 - 2| + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}$, vyhovuje pouze $x^2 = 1$, protože pro $x^2 \geqq 4$ je levá strana větší než 2 a nevyhovuje ani hodnota $x^2 = 3$. Je-li x^2 sudé, je $x^2 - 1$ liché, celá část čísla $\frac{x^2 - 1}{2}$ je $\frac{x^2 - 2}{2}$. Řešíme tedy rovnici $|x^2 - 2| + \frac{x^2}{2} = 2$. Opět nevyhovují $x^2 \geqq 4$, nevyhovuje $x^2 = 2$, vyhovuje pouze $x^2 = 0$. Rovnice má právě tři řešení: $-1, 0, 1$.

Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s hranou délky a. Vrchol A je spojen po povrchu čtyřstěnu nejkratší lomenou čarou s těžištěm T stěny BCD jednak přes hranu BD, druhá čára vede přes hranu CD. První čára protne hranu BD v bodě K, druhá protne hranu CD v bodě L. Vypočtěte objem čtyřstěnu $AKLT$.



Obr. 16

Řešení. Výška jehlanu $AKLT$ na stěnu KLT (obr. 16) je stejná, jako výška čtyřstěnu $ABCD$. Vypočteme ji z pravoúhlého trojúhelníku ATB, vyjde $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dále je $|KL| = \frac{a}{2}$

a pro výšku w v trojúhelníku KLT na stranu KL platí $w = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) v$, kde v je výška v trojúhelníku BCD, tedy $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $w = \frac{a}{12}\sqrt{3}$. Výsledný objem je $\frac{a^3\sqrt{2}}{144}$.