# 33. ročník matematické olympiády

Kategória Z

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 43–57.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404783

## ÚLOHY I. KOLA

### Z - I - 1

Nájdite všetky päťciferné čísla deliteľné číslom 84, ktoré majú túto vlastnosť: Prvé tri číslice tvoria číslo, ktoré je trikrát vačšie ako číslo zo zostávajúcich dvoch číslic. Poradie číslic je pritom rovnaké ako v päťcifernom čísle.

**Riešenie.** Označme $x$ dvojciferné číslo tvorené posledným dvojčíslím hľadaného päťciferného čísla, $y$ trojciferné číslo tvorené jeho prvými troma ciframi; potom hľadané päťciferné číslo $n$ je rovné $100y + x$. Podľa zadania úlohy má platiť $y = 3x$, tedy $n = 300x + x = 301x = 7.43.x$. Keďže 84 delí $7.43x$ vtedy a len vtedy, keď 12 delí $43x$, preto nutne $x$ sa rovná jednému z čísel 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96. Keďže pre 12 a 24 číslo $3x$ nie je trojciferné číslo, tak ostáva týchto 6 riešení pre $n$:

10 836, 14 448, 18 060, 21 672, 25 284, 28 896.

### Z - I - 2

Pre ktoré prvočíslo $p$ je číslo $2p + 1$ treťou mocninou nejakého prirodzeného čísla?

**Riešenie.** Položme $2p + 1 = m^3$, kde $m$ je prirodzené číslo a $p$ prvočíslo. $2p + 1$ je vždy nepárne číslo, preto nutne $m^3$ teda aj $m$ je nepárne. Zrejme $2p = m^3 - 1$ a odtiaľ po rozklade pravej strany máme

$$2p = (m - 1)(m^2 + m + 1). \tag{1}$$

Pretože $m$ je nepárne, možno ho vyjadriť v tvare $m = 2k + 1$, kde $k > 0$ je prirodzené číslo. Po dosadení do rovnosti (1) máme

$$2p = 2k(4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1)$$

a odtiaľ

$$p = k(4k^2 + 6k + 3).$$

Pretože prvočíslo môže byť deliteľné len číslom 1 a sebou samým, nutne $k = 1$ a $p = 4 + 6 + 3 = 13$.

Teda len pre $p = 13$ je $2p + 1$ treťou mocninou prirodzeného čísla, $2.13 + 1 = 27 = 3^3$.

## Z - I - 3

Na linke električky je čas jazdy medzi konečnými stanicami 45 minút. Na obidvoch konečných staniciach čakajú električky 5 minút. Pridaním piatich električiek na linku sa interval medzi električkami znížil o jednu minútu. Koľko súprav jazdí teraz na linke a v akom intervale? (Dĺžka intervalu vyčíslená v minútach je prirodzené číslo.)

**Riešenie.** Jedna električka prejde celú trať tam i späť za

100 minút. Pred zmenou jazdí $x$ vlakov s intervalom $y$ minút. Po zmene jazdí $x + 5$ vlakov s intervalom $y - 1$ minút. Počet intervalov násobený dĺžkou intervalu dáva vždy čas, potrebný k prejdeniu celej trati.

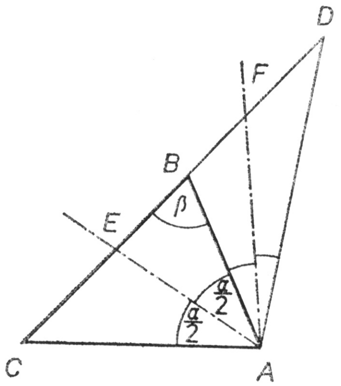
$$x . y = 100$$
$$(x + 5).(y - 1) = 100$$

Riešením sústavy rovníc: $x = 20, y = 5$.

Po trati jazdí 25 súprav s intervalom 4 minúty.

## Z - I - 4

Je daný rovnoramenný trojuholník $ABC$, $d(AC) = d(BC)$. Na predĺžení strany $CB$ za bod $B$ zvoľte bod $D$ tak, aby $d(BD) = d(AB)$. Priesečníky osí uhlov $BAC$ a $BAD$ s úsečkou $CD$ označte $E$ a $F$. Akú veľkosť má uhol $EAF$, ak $v(\sphericalangle CAB) = \alpha$?




Obr. 1

**Riešenie** (obr. 1). Polpriamka $AE$ je osou uhla $\alpha$, preto $v(\sphericalangle EAB) = \frac{1}{2}\alpha$. Trojuholník $ABC$ je rovnoramenný, preto $\alpha = \beta$. Uhol $ABD$ je susedný k uhlu $ABC$, preto $v(\sphericalangle ABD) = 180° - \alpha$. Trojuholník $ABD$ je rovnoramenný, $d(AB) = d(BD)$. Potom $v(\sphericalangle BAD) = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Polpriamka $AF$ je osou uhla $BAD$, preto $v(\sphericalangle BAF) = \frac{1}{4}\alpha$.

Súčet uhlov $EAB$ a $FAB$ je $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha = \frac{3}{4}\alpha$. Pre uhol $\alpha$ v rovnoramennom trojuholníku $ABC$ platí $\alpha < 90°$. Potom musí platiť pre súčet uhlov $EAB$ a $FAB$ $\frac{3}{4}\alpha < 67°30'$.

Uhol $EAF$ zostrojený vyššie popísaným spôsobom je pre každý rovnoramenný trojuholník $ABC$ vždy menš íako 67,5°.

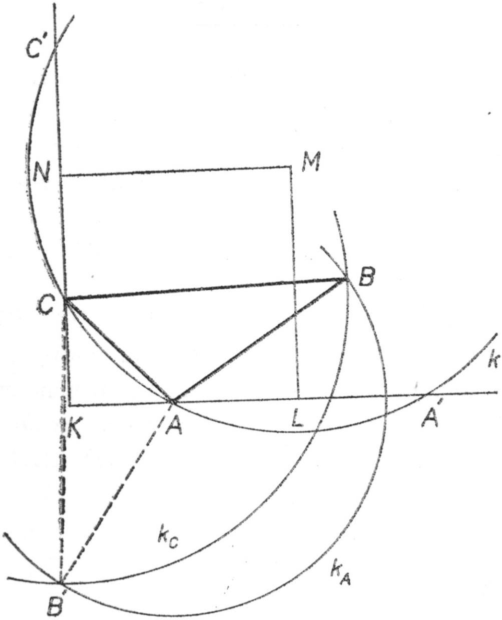
## Z - I - 5

Je daný štvorec $KLMN$ s dĺžkou strany 6 cm. Zostrojte trojuholník $ABC$, ktorý má tieto štyri vlastnosti:

1. vrchol $A$ leží na priamke $KL$,
2. vrchol $C$ leží na priamke $KN$,
3. bod $M$ má od každého z bodov $A$ a $C$ vzdialenosť 7 cm,
4. $d(AB) : d(BC) : d(CA) = 1,5 : 2 : 1$.

Koľko riešení má úloha?

**Riešenie.** Zostrojíme kružnicu $k = (M, 7\text{ cm})$ (obr. 2). Jej priesečníky s $KL$ označíme $A, A'$ a jej priesečníky s $KN$




Obr. 2

označíme $C$, $C'$. Každá z dvojíc bodov $A$, $C$; $A$, $C'$; $A'$, $C$; $A'$, $C'$; predstavuje vždy dva vrcholy zostrojeného trojuholníka.

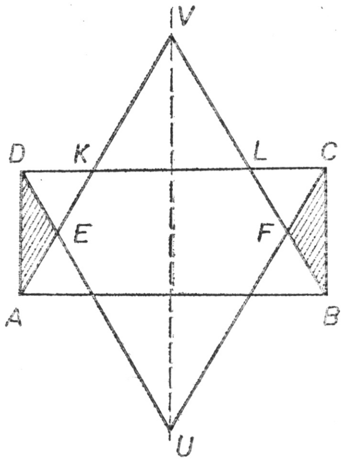
Uvažujme dvojicu $A$, $C$. Potom bod $B$ je priesečníkom kružníc $k_A = (A; 1{,}5 . AC)$ a $k_C = (C; 2 . AC)$. Obdobne je tomu v prípade dvojíc $A$, $C'$; $A'$, $C$; $A'$, $C'$.

Úloha má celkom 8 riešení.

## Z - I - 6

Je daný rovnostranný trojuholník $ABV$, $d(AB) = 8$ cm. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ktorého strana $CD$ prechádza stredom $K$ úsečky $AV$. Ďalej zostrojte v polrovine s hraničnou priamkou $CD$ a vnútorným bodom $A$ rovnostranný trojuholník $CDU$. Vypočítajte obsah tých častí obdĺžnika $ABCD$, ktoré ležia mimo trojuholníka $ABV$ i trojuholníka $CDU$.

**Riešenie.** Priesečníky priamok $AV$ a $DU$, $BV$ a $CU$ označme (obr. 3), po rade $E$ a $F$. Zvonku obidvoch uvažovaných trojuholníkov ležia v obdĺžniku len trojuholníky $ADE$ a $BCF$. V obidvoch týchto trojuholníkoch majú uhly pri stranách $AD$ a $CB$ veľkosť 30°. Strany $AD$ a $CB$ sú proti-




Obr. 3

ľahlé strany obdĺžnika $ABCD$. Teda trojuholníky $ADE$ a $BCF$ sú podľa vety usu zhodné rovnoramenné trojuholníky. Stačí vypočítať obsah jedného z nich.

Označme $L$ priesečník priamok $BV$ a $DC$. Z konštrukcie obdĺžnika $ABCD$ vyplýva, že $KL$ je stredná priečka trojuholníka $ABV$, takže $d(KL) = 4$. Z osovej súmernosti obdĺžnika $ABCD$ a trojuholníka $ABV$ podľa osi $UV$ vyplýva, že $d(DK) = 2$. Trojuholník $DKE$ má pri strane $DK$ uhly o veľkosti 60°, a preto je rovnostranný. Teda $ADE$ je rovnoramenný trojuholník o ramenách dĺžky 2 a uhloch pri základni o veľkosti 30°, takže má ten istý obsah ako rovnostranný trojuholník o strane dĺžky 2. Obsah $\triangle AED$ je teda

$$P = \frac{1}{2} . 2 . \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Celkový obsah časti obdĺžnika $ABCD$, ktoré ležia zvonku $\triangle ABV$ i $\triangle CBU$ je $2\sqrt{3}$ cm².

## ÚLOHY II. KOLA

### Z - II - 1

Pred dvojciferné číslo napíšeme to isté číslo, avšak s opačným poradím cifier. Dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné číslom 21. Určte dvojciferné číslo.

**Riešenie.** Označme $a$ cifru na mieste desiatok a $b$ počet jednotiek zvoleného dvojciferného čísla. Podľa podmienok úlohy má byť číslo $100(10b + a) + 10a + b = 1001b + 110a$ deliteľné číslom 21, teda siedmymi a tromi. Pretože 1001 je deliteľné siedmymi, musí byť siedmymi deliteľné číslo $a$, teda $a = 7$. Číslo $1001b + 770$ sa rovná $3(333b + 256) + 2(b + 1)$ a je deliteľné tromi práve vtedy, keď je číslo $b + 1$ deliteľné tromi. Jediným riešením sú čísla 72, 75, 78.

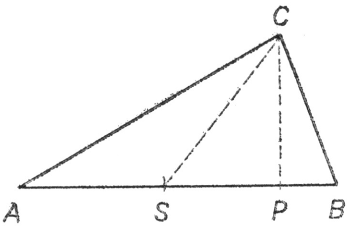
## Z - II - 2

Nájdite všetky prvočísla $p$ pre ktoré je číslo $p + 4$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

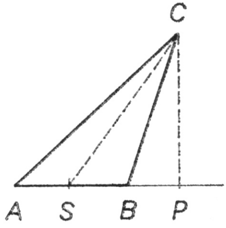
**Riešenie.** Ak je $p + 4 = a^2$, je $p = (a - 2)(a + 2)$. Pretože je $p$ prvočíslo, musí byť $a - 2 = 1$, $p = a + 2 = 5$. To je jediné riešenie.

## Z - II - 3

V trojuholníku $ABC$ je $S$ stred strany $AB$ a $P$ päta výšky na priamku $AB$. Ďalej je $d(CS) = 5$, $d(CP) = 4$ a $d(AP) : d(BP) = 2$. Vypočítajte veľkosť strany $AB$.




Obr. 4a




4b

**Riešenie.** (obr. 4a, b). Podľa Pytagorovej vety je $d(SP) = 3$. Ak označíme $d(AS) = x$, je $d(AP) = x + 3$, $d(BP) = x - 3$ lebo $d(BP) = 3 - x$. Z podmienky $d(AP) : d(BP) = 2$, potom vyplýva v prvom prípade $x = 9$, v druhom $x = 1$. Potom je $d(AB) = 18$ alebo $d(AB) = 2$.

## Z - II - 4

Auto ide z miesta A do miesta B priemernou rýchlosťou 70 km/h, naspäť priemernou rýchlosťou 50 km/h. Keby išlo tam i späť priemernou rýchlosťou 60 km/h, trvala by celá jazda o 8 minút menej. Aká je vzdialenosť miest A a B?

**Riešenie.** Ak označíme hľadanú vzdialenosť $s$ (v km), má podľa podmienok úlohy platiť

$$\frac{s}{70} + \frac{s}{50} = \frac{2s}{60} + \frac{8}{60}, \text{ odtiaľ } s = 140 \text{ km.}$$

ÚLOHY III. KOLA V ČSR
(úlohy pripravil KV MO - Severočeský kraj)

## Z - III - 1

Aké musia byť číslice $x$, $y$, ak päťciferné číslo $4x01y$ je deliteľné pätnástimi? Nájdite všetky riešenia úlohy a získané čísla vypíšte.

**Riešenie.** Číslica $y$ môže byť 0 alebo 5 a číslica $x$ ľubovoľné číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$, ktoré doplnia ciferný súčet tak, aby bol deliteľný tromi. Teda ak

$$y = 0, \text{ tak } 5 + x = 3k, k \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \{1, 4, 7\},$$
$$y = 5, \text{ tak } 10 + x = 3k, k \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \{2, 5, 8\}.$$

Hľadané päťciferné čísla, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, sú:

41 010, 42 015, 44 010, 45 015, 47 010, 48 015.

## Z - III - 2

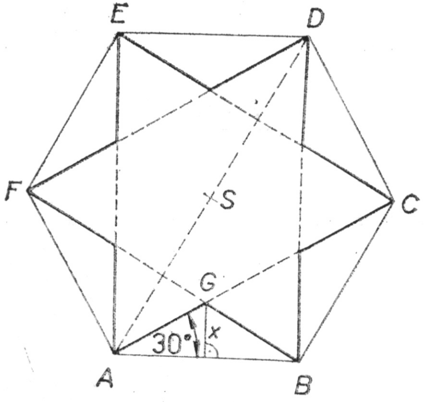
Existuje pätica po sebe nasledujúcich nepárnych čísel, aby súčet ich štvorcov bolo prvočíslo?

**Riešenie.** Neexistuje. Číslica nultého rádu súčtu štvorcov ľubovoľnej pätice po sebe nasledujúcich nepárnych čísel $[(2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 + (2k + 5)^2 + (2k + 7)^2, k \in \mathbb{Z}]$ je vždy číslo päť.

## Z - III - 3

Je daný pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ o strane $a = 2$ cm. Určte obsah obrazca, ktorý je zjednotením trojuholníkov $ACE$ a $BDF$.

**Riešenie.** Najprv vypočítame obsah rovnoramenného trojuholníka (obr. 5) $P_{ABC} = \dfrac{2 . x}{2} = x$, kde $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Potom obsah obrazca $P = P_6 - 6 . P_{ABG} = 6 . \sqrt{3} - 6 . \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ cm$^2$.




Obr. 5

## Z - III - 4

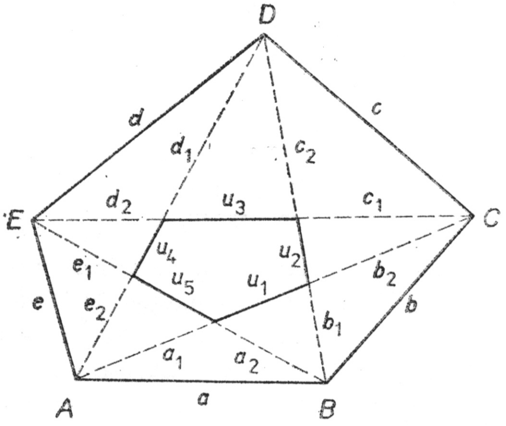
Kolóna áut mala doraziť do mesta nejneskôr o 11.00 hodine. Keby išla priemernou rýchlosťou 30 km/h, prišla by do mesta už o 10.00 hodine. Keby išla priemernou rýchlosťou 20 km/h, dorazila by až o 12.00 hodine. Akou priemernou rýchlosťou musí kolóna ísť a akú vzdialenosť má prekonať?

**Riešenie.** Návod: Z podmienok úlohy dostávame rovnice $s = 30t$ (1), $s = 20(t + 2)$ (2), $s = v(t + 1)$ (3). Z (1) a (2) máme $30t = 20(t + 2)$, odkiaľ $t = 4$. Potom z (1) a (3) vyplýva $s = 120$, $v = 24$. Kolóna musí prejsť 120 km najviac za 5 hodín. Musí teda ísť rýchlosťou aspoň 24 km/h.

ÚLOHY III. KOLA V SSR
(úlohy pripravil KV MO - Bratislava)

## Z - III - 1

Dokážte, že pre každý konvexný päťuholník platí: súčet veľkostí uhlopriečok (všetkých) je väčší ako súčet všetkých jeho strán.




Obr. 6

**Riešenie.** Pri označení podľa obr. 6 zrejme platí: $a_1 + a_2 > a$, $b_1 + b_2 > b$, $c_1 + c_2 > c$, $d_1 + d_2 > d$, $e_1 + e_2 > e$; ďalej platí: $u_1 > a_1 + b_2$, $\ldots$, $u_5 > e_1 + a_2$. Sčítaním uvedených nerovností dostaneme požadované tvrdenie.

## Z - III - 2

a) Ak napíšeme ľubovoľné 3-ciferné číslo 4-krát za sebou, tak výsledné 12-ciferné číslo bude deliteľné 4-ciferným číslom 9 901. Dokážte!

b) Nájdite ďalšie (najlepšie všetky) 4-ciferné čísla, ktoré majú rovnakú vlastnosť, ako číslo 9 901.

**Riešenie.** a) Nech $a$ je trojciferné číslo, potom príslušné 12-ciferné číslo je $(1\,001\,001\,001).a$, tento súčin je deliteľný číslom 9 901, pretože činiteľ 1 001 001 001 je deliteľný týmto číslom. Možno sa o tom presvedčiť vydelením alebo rozkladom.

b) Platí: $1\,001\,001\,001 = 7.11.13.101.9\,901$. Vlastnosť z a) má každý deliteľ čísla 1 001 001 001. Štvorciferné delitele sú: $1\,001 = 7.11.13$, $7\,777 = 7.11.101$, $9\,191 = 7.13.$ $.101$, $1\,111 = 11.101$, $1\,313 = 13.101$.

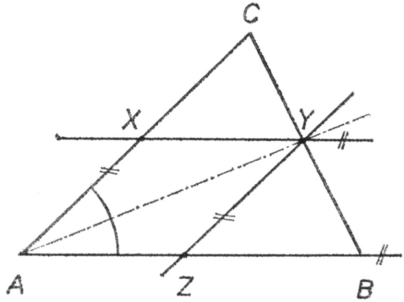
## Z - III - 3

Narysujte ľubovoľný trojuholník $ABC$. Vo vnútri strany $AC$ zostrojte bod $X$, vo vnútri strany $BC$ zostrojte bod $Y$ tak, aby platilo:

$$d(AX) = d(XY), \quad \leftrightarrow XY \parallel \leftrightarrow AB$$

a dokážte správnosť konštrukcie.

**Riešenie.** Konštrukcia úlohy je zrejmá z obr. 7, ak si uvedomíme, že priamka $AY$ je osou uhla $BAC$. Úloha má jediné riešenie.




Obr. 7

## Z - III - 4

Vlado a Peter sa vydali na túru z miesta A do miesta B a späť. Vlado išiel rýchlejšie ako Peter a keď sa vracal, stretol Petra. Peter mal prejsť do miesta B ešte 2 km. Peter sa rozhodol, že ho musí dobehnúť. Zvýšil rýchlosť chôdze na dvojnásobok. Vlado už nevládal, preto zvyšok cesty do A prešiel polovičnou rýchlosťou. Do miesta A sa obaja vrátili zároveň. Vypočítajte vzdialenosť miest A a B.

**Riešenie.** Označme $x$ vzdialenosť miest AB v km, $v_1$ rýchlosť Vlada, $v_2$ rýchlosť Petra (označenie pre východiskové rýchlosti). Podmienka, že obaja turisti dorazili do cieľa naraz, sa dá zapísať v tvare:

$$\frac{x+2}{v_1} + \frac{x-2}{1/2\, v_1} = \frac{x-2}{v_2} + \frac{x+2}{2v_2}$$

odkiaľ dostaneme $v_1 = 2 . v_2$.

Čas, ktorý uplynul od začiatku túry po prvé stretnutie turistov bol rovnaký, z čoho možno zapísať ďalšiu rovnicu:

$$\frac{x + 2}{v_1} = \frac{x - 2}{v_2}$$

Z oboch rovníc dostávame:

$$x + 2 = 2.(x - 2)$$

Teda $x = 6$.

Vzdialenosť miest $AB$ je 6 km.