31. ročník matematické olympiády

Správa o 23. medzinárodnej matematickej olympiáde

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor): 31. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1981-1982. 23. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 152–184.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404760

Správa o 23. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. Organizácia a priebeh súťaže

V poradí už 23. medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v dňoch 5.—14. 7. 1982 v Maďarskej ľudovej republike, a to v prevažnej miere v jej hlavnom meste - - Budapešti. Poriadateľom 23. MMO bolo ministerstvo školstva MĽR a pri príprave odbornej časti súťaže i rámcového programu spolupracovali predstavitelia a členovia maďarskej matematickej spoločnosti Jánosa Bolyaia.

V organizácii tohtoročnej MMO v porovnaní s predchádzajúcimi došlo k niekoľkým zmenám. Najpodstatnejšou z nich však bolo, že usporiadatelia pozvali len štvorčlenné družstvá, zatiaľ čo v minulosti sa MMO zúčastňoval z jednotlivých krajín dvojnásobný počet súťažiacich žiakov. Oficiálne bolo pozvaných 32 krajín (z účastníkov predchádzajúcich MMO nepozvali organizátori len Taliansko a Turecko, ktoré sa nezúčastňovali pravidelne), z ktorých účasť odriekli iba Luxembursko, Mexiko a Španielsko. Spolu s poriadajúcou MĽR poslalo teda na 23. MMO svoje družstvá týchto 30 zemí: Alžírsko (DZ), Austrália (AU), Belgicko (BE), Brazília (BR), Bulharsko (BG), Československo (CS), Fínsko (FI), Francúzsko (FR), Grécko (GR), Holandsko (NL), Izrael (IL), Juhoslávia (YU), Kanada (CA), Kolumbia (CO), Kuba (CU), Kuvajt (KW), Maďarsko (HU), Mongolsko (MG), NDR (DD), NSR (DE), Poľsko (PL), Rakúsko (AT), Rumunsko (RO), Švédsko (SE), Tunis (TN), USA (US), Veľká Británia (GB), Venezuela (VE), Vietnam (VN) a ZSSR (SU). Je to rekordný počet, keď po prvý raz na MMO pricestovala delegácia Kuvajtu, po niekoľkoročnej prestávke delegácie Alžírska a Mongolska a po vlaňajšej absencii na 22. MMO v USA tiež NDR a Vietnam. Z 27 delegácií zastúpených na 22. MMO chýbali len Luxembursko a Mexiko. Všetky delegácie pricestovali so štvorčlennými družstvami, ale jeden z alžírskych žiakov pre onemocnenie na súťaž nenastúpil, takže na 23. MMO si zmeralo svoje schopnosti 119 matematických nádejí zo všetkých svetadielov.

Prevažná časť vedúcich delegácií, ktorí s pracovníkmi usporiadajúcej krajiny tvoria medzinárodnú jury, pricestovala do Budapešti v pondelok 5. 7. 1982. Stadiaľ ich organizátori po skupinkách mikrobusom a automobilmi prepravili do Ceglédu, štyridsaťtisícového mestečka ležiaceho 70 km juhovýchodne od Budapešti. Predsedom jury bol akademik Ákos Császár, vedúci katedry na budapeštianskej univerzite Loranda Eötvösa. Úlohy tajomníka jury príkladne plnil najčastejší účastník doterajších MMO prof. dr. Endre Hódi, vedúci matematického oddelenia pedagogického ústavu v Budapešti, ktorý bol zároveň vedúcim maďarskej delegácie.

Po svojom príchode do Ceglédu dostali vedúci delegácií širší návrh úloh pre súťaž s riešeniami v angličtine a textami vo všetkých štyroch oficiálnych jazykoch (angličtina, francúzština, nemčina, ruština). Obsahoval dva varianty šiestich úloh tvoriace tematicky pestré celky a osem náhradných úloh pre prípadné doplňovanie. Návrh pripravila maďarská úlohová komisia vedená dr. Józsefom Pelikánom z 57 úloh navrhnutých zúčastnenými krajinami, keď takmer polovica krajín, ktoré prijali pozvanie na 23. MMO, do požadovaného termínu (15. 4. 1982) možnosť poslať najviac 5 úloh pre súťaž nevyužila. Boli to AT, CO, CU, DE, DZ, GR, IL, KW, MG, RO, SE, VE. V predloženom širšom výbere 20 úloh boli návrhy jednotlivých delegácií zastúpené takto: CA a GB po 3, NL a SU po 2 a AU, BG, BR, CS, FI, FR, PL, TN, VN a YU po 1 úlohe. Neuplatnili sa teda len návrhy úloh z BE, DD a US.

Prvé zasadnutie jury (6. 7. 1982 predpoludním) bolo venované všeobecnej rozprave o navrhovaných úlohách.

Po obedňajšej prestávke, počas ktorej prijal členov jury a ďalších účastníkov 23. MMO mešťanosta Ceglédu, rokovanie pokračovalo ďalšou diskusiou o úlohách, v závere ktorej bol v podstate prijatý prvý navrhnutý variant s dvoma zmenami, keď juhoslovanská úloha o plošnom obsahu konvexného mnohouholníka a mrežových bodoch bola nahradená mierne archaickou holandskou planimetrickou dôkazovou úlohou a bulharskú úlohu o koreňoch reciprokej rovnice 4. stupňa vystriedala anglická úloha o riešeniach diofantickej rovnice 3. stupňa. Zvlášť prvá zmena, za ktorú sa pri hlasovaní vyslovilo 18 delegátov, sa v konečnom dôsledku ukázala ako nie príliš šťastná pre väčšinu družstiev, naše nevynímajúc.

Na záver stredajšieho predpoludňajšieho zasadnutia jury konečne schválila všetky 4 oficiálne formulácie vybraných úloh v oficiálnych jazykoch olympiády a delegáti tak mali možnosť prikročiť k prekladom textov úloh do materčiny súťažiacich a k ich rozmnoženiu v potrebnom počte. Vedúcim delegácií už pri tejto práci pomáhali aj ich zástupcovia, ktorí 7. 7. priviedli do Budapešti súťažiace družstvá.

Po relatívne krátkej diskusii na svojom popoludňajšom zasadnutí jury väčšinou hlasov schválila návrh, aby počet bodov za úplné riešenie každej úlohy bol rovnaký - sedem. Z toho vyplývalo, že každý súťažiaci mohol získať najviac 42 bodov. O dobe určenej na riešenie úloh sa v jury nerokovalo, pretože organizačný poriadok 23. MMO stanovil na riešenie každej trojice štyri a pol hodiny čistého času.

V piatok 9. 7. 1982 vo včasných ranných hodinách čakala vedúcich delegácií a ich zástupcov cesta autobusom do Budapešti na slávnostné otvorenie 23. MMO, ktoré sa konalo v aule gymnázia Margity Kaffkovej. Po krátkom príhovore predsedu jury akad. Császára sa žiaci rozišli do tried, kde na nich čakala prvá trojica nasledujúceho súboru súťažných úloh.

Prvý deň súťaže - 9. júla 1982

1. Funkcia f je definovaná pre všetky celé kladné n a nadobúda len celé nezáporné hodnoty. Ďalej platí:

a) $f(2) = 0, f(3) > 0, f(9\,999) = 3\,333$;

b) pre všetky m, n nadobúda rozdiel

$$f(m + n) - f(m) - f(n)$$

hodnotu 0 alebo 1.

Určte $f(1982)$. (Veľká Británia)

2. Je daný nerovnoramenný trojuholník $A_1A_2A_3$ so stranami a_1, a_2, a_3 (a_i je strana protiľahlá vrcholu A_i). Nech je pre všetky

$i = 1, 2, 3$ M_i stred strany a_i, T_i bod dotyku strany a_i a kružnice vpísanej trojuholníku $A_1A_2A_3$, S_i bod súmerne združený k bodu T_i podľa osi vnútorného uhla daného trojuholníka pri vrchole A_i.

Dokážte, že priamky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 prechádzajú tým istým bodom. (Holandsko)

3. Uvažujme o postupnostiach $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ kladných reálnych čísel s vlastnosťami: $x_0 = 1$ a pre všetky $i \geqq 0$ platí: $x_{i+1} \leqq x_i$.

a) Dokážte, že pre každú takú postupnosť existuje $n \geqq 1$ tak, že platí

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 3{,}999.$$

b) Nájdite takú postupnosť daných vlastností, pre ktorú nerovnosť

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

platí pre všetky $n \geqq 1$. (ZSSR)

Druhý deň súťaže - 10. júla 1982

4. Je daná rovnica

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n.$$

Dokážte, že ak celé kladné číslo n je také, že daná rovnica má celočíselné riešenie x, y, potom má aspoň tri celočíselné riešenia.

Ukážte, že pre $n = 2\,891$ nemá daná rovnica celočíselné riešenia. (Veľká Británia)

5. Na uhlopriečkach AC a CE pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ sú dané vnútorné body M, resp. N tak, že platí

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = \lambda.$$

Vypočítajte deliaci pomer λ, ak body B, M, N ležia na priamke. (Holandsko)

6. Nech S je štvorec so stranou dĺžky 100 a nech L je lomená čiara v S bez násobných bodov zložená z úsečiek A_0A_1, A_1A_2, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, $A_0 \neq A_n$ taká, že pre každý bod P hranice štvorca S existuje na L taký bod, ktorého vzdialenosť od P nie je väčšia než $\frac{1}{2}$.

Dokážte, že na L existujú také dva body X, Y, ktorých vzájomná vzdialenosť nie je väčšia než 1, ale dĺžka tej časti čiary L, ktorá je ohraničená bodmi X a Y, nie je menšia než 198. (Vietnam)

V zátvorke za textom úlohy je meno krajiny, z návrhu ktorej úloha pochádza.

Pre zodpovedanie otázok súťažiacich na prípadné nejasnosti v texte sa aj v Budapešti použila tradičná osvedčená forma, keď žiak má možnosť poslať otázku písomne na lístku k tomu určenom najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov. Otázka sa prečíta a preloží v jury, ktorá schvaľuje taktiež plný text odpovede. V čase čakania na otázky žiakov v prvý súťažný deň predstavil predseda jury delegátom vedúceho skupiny koordinátorov, ktorým bol člen korešpondent Maďarskej akadémie vied dr. László Lovász, ďalší z niekdajších vynikajúcich maďarských olympionikov, ktorý získal prvú cenu na rovnakých troch MMO ako dr. Pelikán.

V sobotu 10. 7. opäť zavčas rána odchádzali delegáti z Ceglédu, tentoraz už definitívne. Po zodpovedaní otázok k textom druhej trojice úloh sa ubytovali na zvyšok pobytu v MĽR v osemnásťposchodovom internáte Zoltána Schönherza patriacom budapeštianskej vysokej škole technickej, kde sa konala tiež koordinácia hodnotení a záverečné zasadnutie jury.

Pre koordináciu bolo vyhradené v programe nezvykle málo času: sobotňajšie popoludnie a celý pondelok. Vďaka tomu, že každú úlohu koordinovali dve skupiny maďarských koordinátorov podľa umne zostaveného grafikonu, nakoniec sa túto náročnú úlohu s vypätím všetkých síl podarilo zvládnuť tak, že začiatok záverečného zasadnutia jury plánovaného na pondelok 12. 7. večer sa oneskoril len asi o hodinu.

Popoludní po súťaži mali žiaci v oba súťažné dni voľný program a v nedeľu 11. 7. 1982 sa uskutočnila celodenná spoločná exkurzia všetkých účastníkov 23. MMO do Balatonského pionierskeho tábora v Zánke.

Na pondelok 12. 7. 1982 mali žiaci plánovaný celodenný výlet loďou po Dunaji do Visegrádu spojený s prehliadkou tamojších historických pamiatok. Večer sa uskutočnila beseda s autorom svetoznámej »bűvös koczky« a ďalších hlavolamov prof. Rubikom.

V pondelok 12. 7. 1982 večer na záverečnom zasadnutí jury sa najskôr rozhodlo o hodnotení riešení v tých prípadoch, keď nedošlo k dohode medzi vedením delegácie a koordinátormi. Také prípady boli celkom tri a ich riešenie nezabralo mnoho času. Potom nasledovalo rozhodovanie o potrebnom počte bodov pre získanie jednotlivých cien. Po krátkej diskusii prešiel nakoniec pôvodný návrh predsedu jury, aby cenu dostali súťažiaci, ktorí získali aspoň polovicu možných bodov. Takých bolo celkom 61. Pre prvú cenu bolo stanovené rozpätie 42—37 bodov, pre druhú cenu 36—30 bodov a pre tretiu cenu 29—21 bodov. Znamenalo to takmer ideálne rozdelenie cien, keď prvú cenu dostalo 10, druhú 20 a tretiu 31 súťažiacich. O udelení zvláštnych cien za originálne riešenie úloh sa nerokovalo, pretože organizačný poriadok 23. MMO s tým nepočítal. V závere rokovania sa diskutovala otázka organizátorov budúcich MMO. Vedúci francúzskej delegácie uviedol, že u nich sa uvažovalo o usporiadaní MMO roku 1985 v Paríži. Vzhľadom na to, že žiadna delegácia sa nehlási k usporiadaniu MMO roku 1983, pokúsi sa po návrate do vlasti získať súhlas k tomu, aby sa konala v Paríži už 24. MMO roku 1983. Vedenie delegácie ČSSR informovalo o predbežných úvahách usporiadať 25. MMO roku 1984 v Prahe a zástupca Fínska prof. Lehtinen oznámil, že o usporiadanie 26. MMO roku 1985 sa bude pravdepodobne uchádzať jeho krajina. Vedúci austrálskej delegácie prof. Williams informoval, že MMO r. 1988 by chceli usporiadať v Austrálii v rámci osláv 200. výročia vzniku austrálskeho zväzu. V rámci diskusie o budúcnosti MMO odznel o. i. návrh, aby sa oficiálnym jazykom stala taktiež španielčina. Poďakovaním predsedu jury akad. Császára ostatným členom za činorodú spoluprácu a vedúceho francúzskej delegácie prof. Deschampsa maďarským hostiteľom za starostlivú prípravu a dobrú organizáciu 23. MMO sa záverečné rokovanie jury skončilo.

V utorok 13. 7. predpoludním sa uskutočnilo rozšírené zasadnutie komisie ICMI pre organizáciu MMO za účasti jej tajomníka J. Herseeho z Veľkej Británie. S uspokojením konštatovalo, že pre najbližšie tri roky sú usporiadatelia MMO predbežne zabezpečení.

Popoludní prijala vedenia zahraničných delegácií a domácich organizátorov v zasadacej sieni rektora Vysokej školy záhradníckej v Budapešti námestníčka ministra školstva MĽR Mária Hanga a hneď potom nasledovalo slávnostné zakončenie 23. MMO spojené s vyhlásením výsledkov a odovzdaním diplomov držiteľom cien i ostatným súťažiacim v aule tejto vysokej školy. Na ňom v krátkom prejave predseda jury zhodnotil priebeh a výsledky 23. MMO a námestníčka ministra školstva MĽR M. Hanga vo svojom vystúpení vyzdvihla význam matematiky a medzinárodných stretnutí matematických talentov a poďakovala všetkým, ktorí sa pričinili o odborný i spoločenský úspech podujatia. Súčasne s diplomami preberali víťazi 23. MMO i ostatní súťažiaci vecné ceny a suveníry.

Definitívnou bodkou za tohtoročnou MMO sa stala záverečná slávnostná večera, ktorá sa konala o 20,00 hod. v budapeštianskom hoteli Ifjuság. Prehovorili na nej predseda jury, predstaviteľ ministerstva školstva MĽR a vedúci delegácie Kuvajtu, ktorí tak využili príležitosť poďakovať sa za pozvanie ich delegácie na 23. MMO, čím dostali po prvý raz príležitosť zúčastniť sa na takomto podujatí.

V stredu 14. 7. 1982 od skorých ranných hodín postupne opúšťali jednotlivé delegácie pohostinnú pôdu hlavného mesta Maďarska. Ako jedna z prvých odcestovala rýchlikom Hungária do svojej vlasti aj československá delegácia.

2. Výsledky 23. MMO

Výber súťažných úloh na MMO býva každoročne najzodpovednejšou úlohou jury a má podstatný vplyv na priebeh a výsledky súťaže. Maďarskí organizátori sa usilovali uľahčiť túto úlohu starostlivou prípravou navrhovaných variantov šiestich problémov, z ktorých prvý svojou tematickou pestrosťou i primeranou obťažnosťou, keď obsahoval relatívne ľahké i náročné úlohy, zodpovedal predstavám značnej časti vedúcich delegácií. V priebehu rokovania jury o úlohách sa však prejavila snaha niektorých delegácií zľahčiť navrhnutý variant a tak sa stalo, že mechanickou väčšinou pri hlasovaní sa do výberu dostala holandská planimetrická úloha zaradená nakoniec ako druhá v poradí. Súťaž ukázala, že väčšina súťažiacich nebola na úlohu tohto typu pripravená a nedokázali si s ňou poradiť. Okrem niekoľko málo delegácií (NDR, NSR, ZSSR, Maďarsko, Vietnam, Veľká Británia) všetky na nej strácali body, čo podstatne ovplyvnilo celkové výsledky 23. MMO. Pre zaujímavosť spomeňme, že ani družstvo Holandska, ktoré úlohu navrhlo, nezískalo za jej riešenie ani bod. Možno povedať, že ostatné úlohy boli vhodne volené a umožnili presadiť sa najschopnejším účastníkom súťaže.

Svoju suverenitu z vlaňajška potvrdili najmä družstvá NSR, ZSSR a USA. Po vlaňajšej neúčasti sa opäť umiestnili medzi najlepšími družstvá NDR a Vietnamu. Viac sa čakalo na domácej pôde od Maďarska i od tradične veľmi úspešnej Veľkej Británie, aj keď všetci členovia oboch družstiev získali ceny rovnako ako reprezentanti ČSSR a Bulharska, čím potvrdili dobrý štandard z posledných rokov. V porovnaní

Krajina	Súčet bodov žiaka č. 1	2	3	4	Celkom bodov	Neofic. porad.	Počet cien I.	II.	III.
Alžírsko (DZ)	11	10	2	–	23	27.–28.	–	–	–
Austrália (AU)	20	23	10	13	66	20.–21.	–	–	1
Belgicko (BE)	7	2	22	19	50	24.	–	–	1
Brazília (BR)	24	10	19	13	66	20.–21.	–	–	1
Bulharsko (BG)	26	29	26	27	108	9.	–	–	4
ČSSR (CS)	29	21	31	34	115	7.	–	2	2
Fínsko (FI)	16	35	28	34	113	8.	–	2	1
Francúzsko (FR)	38	17	14	20	89	15.	1	–	–
Grécko (GR)	14	19	9	13	55	23.	–	–	–
Holandsko (NL)	17	22	34	19	92	14.	–	1	1
Izrael (IL)	22	18	17	18	75	18.	–	–	1
Juhoslávia (YU)	30	20	18	30	98	12.	–	2	–
Kanada (CA)	14	12	23	29	78	17.	–	–	2
Kolumbia (CO)	3	9	18	4	34	26.	–	–	–
Kuba (CU)	17	7	17	3	44	25.	–	–	–
Kuvajt (KW)	2	1	1	0	4	30.	–	–	–
Maďarsko (HU)	21	36	33	35	125	6.	–	3	1
Mongolsko (MG)	21	12	13	10	56	22.	–	–	1
NDR(DD)	37	40	27	32	136	3.–4.	2	1	1
NSR (DE)	42	35	31	37	145	1.	2	2	–
Poľsko (PL)	30	23	16	27	96	13.	–	1	2
Rakúsko (AT)	11	11	38	22	82	16.	1	–	1
Rumunsko (RO)	26	14	26	33	99	11.	–	1	2
Švédsko (SE)	23	15	11	25	74	19.	–	–	2
Tunis (TN)	7	8	1	3	19	29.	–	–	–
USA (US)	40	35	29	32	136	3.–4.	1	2	1
Veľká Británia (GB)	23	23	28	29	103	10.	–	–	4
Venezuela (VE)	11	10	1	1	23	27.–28.	–	–	–
Vietnam (VN)	42	30	32	29	133	5.	1	2	1
ZSSR (SU)	37	42	30	28	137	2.	2	1	1
Celkom					2474		10	20	31

s vlaňajškom značne stratili Rakúsko a Kanada, kým ostatné tu nemenované družstvá dosiahli v podstate očakávané výsledky. Podrobný prehľad o výsledkoch 23. MMO podáva tabuľka.

Tabuľka zároveň ukazuje, že 3 žiaci: Bruno Haible (DE), Le Tu Quoc Thang (VN) a Grigorij Perelman (SU) získali plný počet bodov a stali sa tak absolútnymi víťazmi 23. MMO. Skutočnosť, že účastníci 23. MMO získali spolu 2 474 bodov, čo je 49,5 % z celkového možného počtu, potvrdzuje, že aj napriek vyššie uvedeným výhradám sa výber úloh podaril jury lepšie než v minulom roku a ukázal sa byť pre súťaž primeraným. Kvôli úplnosti ešte dodajme, že na 23. MMO súťažilo 7 dievčat (HU 1, IL 1, MG 1, TN 3, VE 1), z ktorých len Rita Csákány (HU) získala tretiu cenu, keď dosiahla 21 bodov.

3. Hodnotenie československej účasti

Československé družstvo pre 23. MMO vybralo predsedníctvo ÚV MO predovšetkým na základe výsledkov II. a III. kola kategórie A 31. ročníka MO. Pri nominácii však prihliadalo tiež k poznatkom z dvoch sústredení širšieho výberu, ktoré sa konali v Štiříne od 5. do 10. 4. 1982 a od 7. do 19. 6. 1982, k poznatkom z korešpondenčného seminára a predchádzajúcej účasti členov širšieho výberu na MMO. Príležitosť zmerať svoje matematické tvorivé schopnosti s reprezentantmi 29 krajín všetkých svetadielov tak dostali títo žiaci tried so zameraním na matematiku z Gymnázia W. Piecka v Prahe 2: Petr Couf, 4. tr.; Miroslav Engliš, 4. tr.; Igor Kříž, 3. tr.; Jiří Sgall, 3. tr. Vedením delegácie bol poverený predseda ÚV MO prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., prorektor Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, a jeho zástupcom bol podpredseda ÚV MO dr. František Zítek, CSc., zástupca riaditeľa Matematického ústavu ČSAV v Prahe. V súvislosti s predpokladaným usporiadaním 25. MMO roku 1984 v Prahe však bola naša delegácia početnejšia než obvykle, pretože 23. MMO sa zúčastnil ako pozorovateľ tiež tajomník ÚV MO dr. Leo Boček, CSc., z MFF UK v Prahe, vyslaný MŠ ČSR a na náklady ÚV JČSMF, resp. ÚV JSMF, tiež dr. Václav Šůla z MŠ ČSR, resp. dr. Ladislav Berger, predseda pobočky JSMF v Žiline a člen ÚV MO.

Ako už bolo vyššie spomenuté, podieľalo sa Československo na organizácii 23. MMO aj zaslaním návrhu troch súťažných úloh do požadovaného termínu. Jednu z nich organizátori zaradili aj do širšieho výberu, ale do prijatej šestice sa už nedostala.

Výsledky, ktoré naši žiaci na 23. MMO dosiahli, sú zhrnuté v tabuľke:

Žiak	Počet bodov za riešenie úlohy č. 1	2	3	4	5	6	Celkom	Udelená cena a celkové umiest.	
Couf Petr	7	0	2	7	6	7	29	III.	31.–36.
Engliš Miroslav	7	0	7	0	7	0	21	III.	59.–61.
Kříž Igor	7	1	7	7	7	2	31	II.	24.–25.
Sgall Jiří	6	0	7	7	7	7	34	II.	16.–18.
ČSSR spolu	27	1	23	21	27	16	115		

Tabuľka ukazuje, že naši žiaci si suverénne poradili s 1. a 5. úlohou, keď strata jedného bodu bola v oboch prípadoch spôsobená nepozornosťou pri jednoduchom numerickom počítaní. Prekvapením bola strata bodov u M. Engliša za 4. úlohu, pretože ide o úlohu zo školskej teórie čísel, o ktorú sa pomerne silne zaujíma. V podstate uspokojivý je výsledok v 3. i v 6. úlohe, ktoré boli všeobecne považované za najnáročnejšie, ale veľmi nepríjemným prekvapením je doslovný výbuch celého družstva v planimetrickej 2. úlohe. Okrem toho, čo už bolo uvedené vyššie, je treba konštatovať, že v triedach so zameraním na matematiku sa podobnej problematike venuje málo pozornosti, ale čo je horšie, pozabudlo sa na ňu aj v tohtoročných prípravných sústredeniach.

I keď československú účasť na 23. MMO možno považovať celkove za úspešnú - veď všetci členovia družstva získali ceny, pri kritickej náročnosti musíme po pravde povedať, že v silách družstva bolo podstatne viac. Stačí, ak pripomenieme, že už na 22. MMO Kříž a Couf získali 2. cenu so stratou len 2, resp. 4 bodov a Sgall si z USA priviezol 3. cenu. Ak na budúcich MMO chceme pokračovať v úspešnom trende posledných rokov, bude treba ešte lepšie využiť podmienky, ktoré nám ministerstvá školstva pre prípravu družstva poskytujú, a v prípravných sústredeniach opravdu nič neponechať na náhodu. Podľa poznatkov z krajín najúspešnejších na 23. MMO i podľa našich vlastných skúseností by malo mať aprílové sústredenie prednáškovo-seminárny charakter a júnové formu samostatného riešenia úloh s rôznou tematikou spojeného s rozborom rôznych metôd riešení. Bude potrebné v predsedníctve ÚV MO ešte starostlivejšie zvažovať tematiku sústredení a podľa vopred schválenej tematiky vyberať tých najvhodnejších lektorov. V tematike sústredení by nemali chýbať: elementárna číselná teória (vety o deliteľnosti, kongruencie, neurčité rovnice, číselne-teoretické funkcie), základy matematickej analýzy (postupnosti, limity, nekonečné rady), nerovnosti a odhady, rekurentné postupnosti, mnohočleny jednej a viac premenných (vlastnosti koreňov, apod.), základy funkčnej teórie (limita, spojitosť, trigonometrické, exponenciálne a logaritmické funkcie), rovnice a sústavy rovníc, diferenčné a funkcionálne rovnice, kombinatorika (kombinácie, binomické koeficienty, vytvárajúce funkcie), geometrické zobrazenia v rovine (zhodnosť, podobnosť, rovnoľahlosť), dôkazové planimetrické úlohy (trojuholník, kružnica, apod.), stereometria (štvorsten a jeho vlastnosti, apod.), metrické vlastnosti geometrických útvarov v rovine a priestore (trojuholníková nerovnosť, kružnica a jej časti, guľa), konvexné mnohouholníky, kombinatorická geometria.

Pokiaľ ide o prípravu na organizovanie MMO roku 1984, možno očakávať, že naši delegáti i pozorovatelia na 23. MMO mali oči otvorené a pozorne sledovali tak dobré, ako aj tienisté stránky organizácie, a odpozorované skúsenosti uplatnia pri príprave podujatia, ktoré by sa malo stať ďalšou príležitosťou pre šírenie dobrého mena našej socialistickej vlasti vo svete.

Riešenie 1. úlohy. Z časti a) zadania úlohy vyplýva, že $f(2) = 0$, a z časti b) zasa, že buď $f(2) = 2f(1)$, alebo $f(2) = 2f(1) + 1$. Vzhľadom na nezápornosť hodnôt funkcie f z toho vyplýva, že musí byť $f(1) = 0$. Z b) taktiež vyplýva

$$(1) \qquad f(m+n) = \begin{cases} f(m) + f(n), \\ f(m) + f(n) + 1, \end{cases}$$

z čoho pre $m = 1$, $n = 2$ ďalej dostaneme

$$f(3) = \begin{cases} f(1) + f(2) = 0, \\ f(1) + f(2) + 1 = 1, \end{cases}$$

odkiaľ vzhľadom na podmienku $f(3) > 0$ plynie, že $f(3) = 1$. Pre $m = 1$ a ľubovoľné celé kladné n z (1) dostaneme

$$(2) \qquad f(n+1) = \begin{cases} f(n) + f(1) = f(n), \\ f(n) + f(1) + 1 = f(n) + 1, \end{cases}$$

z čoho vyplýva, že funkcia f je neklesajúca. Podobne pre $m = 2$ a ľubovoľné celé kladné n z (1) dostaneme, že $f(n + 2) \geqq f(n)$, ale pre $m = 3$ už z (1) vyplýva, že $f(n + 3) \geqq f(n) + 1$ pre každé celé kladné n. Z toho máme, že

$f(6) \geqq f(3) + 1 = 2$, $f(9) \geqq f(6) + 1 \geqq 3$, atď. Úplnou indukciou ľahko dokážeme, že pre celé kladné n platí:

$$f(3n) \geqq n. \tag{3}$$

Videli sme, že pre $n = 1$ vzťah (3) platí. Nech teda platí pre nejaké celé kladné k: $f(3k) \geqq k$. Potom pre $n = 3k$, $m = 3$ z (1) máme

$$f(3k + 3) = \begin{cases} f(3k) + f(3) \geqq k + 1, \\ f(3k) + f(3) + 1 \geqq k + 2, \end{cases}$$

čo znamená, že $f(3(k + 1)) \geqq k + 1$, tj., že (3) platí pre $k + 1$, ako sme potrebovali dokázať. Ak pre nejaké celé $q > 0$ platí $f(3q) > q$, potom

$$f(3q + 3) = \begin{cases} f(3q) + f(3) > q + 1, \\ f(3q) + f(3) + 1 > q + 2, \end{cases}$$

z čoho je zrejmé, že pre každé celé kladné $n \geqq q$ už platí v (3) ostrá nerovnosť.

Z časti a) zadania úlohy však vieme, že $f(9\,999) = 3\,333$, čo znamená, že pre všetky $n \leqq 3\,333$ platí v (3) rovnosť. Špeciálne preto platí

$$1\,982 = f(3\,.\,1\,982) \geqq f(2\,.\,1\,982) + f(1\,982) \geqq$$

$$\geqq 3\,.\,f(1\,982).$$

Z toho však priamo vyplýva, že

$$661 > \frac{1\,982}{3} \geqq f(1\,982) \geqq f(1\,980) + f(2) =$$

$$= \frac{1\,980}{3} = 660\,.$$

Teda $f(1\,982) = 660$.

Iné riešenie (podľa *M. Engliša*). Rovnosť $f(1) = 0$ a vzťah (2) dostaneme ako hore. Vzťah (2) prakticky znamená, že pre každé celé kladné n platí

(4) $$f(n) \leqq f(n + 1) \leqq f(n) + 1.$$

Nech n je ľubovoľné celé kladné číslo. Dokážeme úplnou indukciou, že pre ľubovoľné celé kladné k platí

(5) $$f(n) = \left[\frac{f(kn)}{k}\right],$$

kde symbol $[c]$ znamená celú časť čísla c. Pre $k = 1$ rovnosť (5) zrejme platí. Nech (5) platí pre nejaké celé $K > 0$, tj. nech

(6) $$Kf(n) \leqq f(Kn) < Kf(n) + K.$$

Potom podľa b) je $f(Kn + n) = f(Kn) + f(n) + \varepsilon$, kde $\varepsilon \in \{0;\ 1\}$. Je teda $f(Kn + n) \geqq f(Kn) + f(n) \geqq Kf(n) +$

$+ f(n) = (K+1) f(n)$ podľa (6) a taktiež $f(Kn+n) \leqq \leqq f(Kn) + f(n) + 1 < (K+1) f(n) + K + 1$ čiže

$$(K+1) f(n) \leqq f((K+1)n) < (K+1)(f(n)+1),$$

odkiaľ

$$f(n) \leqq \frac{f((K+1)n)}{K+1} < f(n) + 1\,,$$

čo sme mali dokázať.

Teraz podľa (5) pre $n = 11$ a $k = 909$ a podľa a) dostaneme $f(11) = \left[\frac{f(9\,999)}{909}\right] = \left[\frac{3\,333}{909}\right] = 3$. Na druhej strane však z (5) pre $k = 8$, $n = 11$ máme $f(11) = \left[\frac{f(88)}{8}\right] = 3$, z čoho vyplýva, že $f(88) \leqq 31$. Preto podľa (4) je $f(89) \leqq 32$. Analogicky zistíme, že $f(9) = \left[\frac{f(9\,999)}{1\,111}\right] = \left[\frac{3\,333}{1\,111}\right] = 3 = \left[\frac{f(90)}{10}\right]$ z čoho vyplýva, že $f(90) \geqq 30$ a stadiaľ podľa (4) máme $f(89) \geqq 29$. Platí teda

$$29 \leqq f(89) \leqq 32. \tag{7}$$

Z b) pre $m = 9\,910$, $n = 89$ máme

$$f(9\,999) = 3\,333 = f(9\,910) + f(89) + \varepsilon,$$

kde $\varepsilon \in \{0; 1\}$. Z toho vzhľadom na (7) vyplýva

$$3\,300 \leqq f(9\,910) \leqq 3\,304. \tag{8}$$

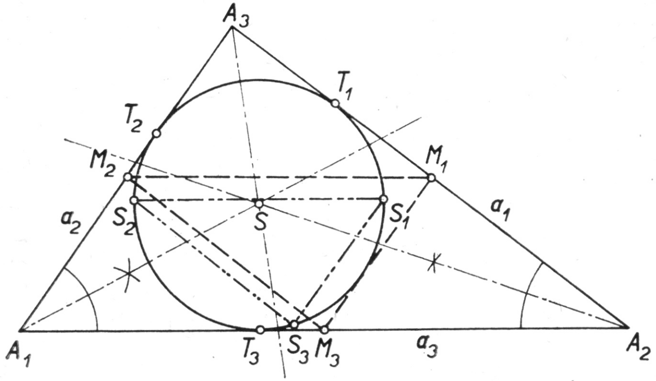
Keďže 9 910 = 5 . 1 982, z (8) podľa (5) dostaneme

$$f\,(1\,982) = \left[\frac{f\,(9\,910)}{5}\right] = 660.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že vlastnosti a), b) požadované v úlohe má napr. aj funkcia $f\,(n) = \left[\dfrac{n}{3}\right]$.

Riešenie 2. úlohy. Pri osovej súmernosti podľa osi uhla trojuholníka $A_1A_2A_3$ pri vrchole A_1 je oblúk S_1T_3 kružnice vpísanej trojuholníku $A_1A_2A_3$ súmerne združený k oblúku T_1T_2 tejto kružnice (pozri obr. 43). Pri súmernosti podľa osi uhla pri vrchole A_2 analogické tvrdenie platí pre oblúky T_3S_2 a T_1T_2 tejto kružnice. Platí teda:

$$\widehat{T_3S_1} = -\,\widehat{T_2T_1} = \widehat{T_1T_2} = -\,\widehat{T_3S_2}.$$



Obr. 43

Z toho vyplýva, že $S_1S_2 \parallel A_1A_2$, ale pretože $M_1M_2 \parallel A_1A_2$, je tiež $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Analogickou úvahou prídeme k záveru, že $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ a $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Trojuholníky $M_1M_2M_3$ a $S_1S_2S_3$ majú teda odpovedajúce strany rovnobežné, čo znamená, že ich možno na seba transformovať buď posunutím, alebo stredovou rovnoľahlosťou (homotetiou). Je zrejmé, že v rovnakom vzájomnom vzťahu sú aj kružnice týmto trojuholníkom opísané. Trojuholník $M_1M_2M_3$ je však nerovnoramenný rovnako ako daný trojuholník $A_1A_2A_3$, a tak jemu opísaná kružnica pretína strany a_i daného trojuholníka v dvoch rôznych bodoch. Z toho vyplýva, že jej polomer je väčší ako polomer kružnice opísanej trojuholníku $S_1S_2S_3$, ktorá je zhodná s kružnicou vpísanou trojuholníku $A_1A_2A_3$. Spomínané zobrazenie nemôže byť preto posunutím, ale stredovou rovnoľahlosťou. Potom však priamky M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 musia prechádzať stredom tejto rovnoľahlosti, čím je tvrdenie dokázané. Poznamenajme ešte, že vzhľadom na to, že trojuholník $A_1A_2A_3$ je nerovnoramenný, je $M_i \neq S_i$ pre všetky $i = 1, 2, 3$.

Poznámka. Dá sa dokázať, že tým stredom rovnoľahlosti je spoločný dotykový bod kružníc opísaných trojuholníkom $M_1M_2M_3$ a $S_1S_2S_3$ (tzv. Feuerbachova veta).

Riešenie 3. úlohy. a) Predpokladajme, že existuje postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných reálnych čísel tak, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ daných vlastností platí

$$(1) \qquad \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq c_n x_0 .$$

Potom z (1) a nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvojice nezáporných reálnych čísel vyplýva

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right) \geqq \frac{x_0^2}{x_1} +$$

$$+ c_n x_1 \geqq 2\sqrt{x_0^2 c_n} = x_0 2\sqrt{c_n}$$

Možno preto položiť $c_{n+1} = 2\sqrt{c_n}$ pre každé $n \geqq 1$, a keďže $x_0^2 \geqq x_1^2$, z čoho vyplýva $\frac{x_0^2}{x_1} \geqq x_1$, stačí zvoliť $c_1 = 1$. Potom však platí $c_2 = 2$, $c_3 = 2\sqrt{2} = 2^{1+1/2}$, $c_4 = 2\sqrt{c_3} = 2^{1+1/2+1/4}$ a všeobecne $c_n = 2^{1+1/2+\ldots+1/2^{n-2}} = 2^{2(1-1/2^{n-1})} = 4 \,.\, 2^{-1/2^{n-2}}$ pre $n \geqq 2$. Vzhľadom na (1) a predpoklad, že $x_0 = 1$, stačí teraz n zvoliť tak, aby platilo $4 \,.\, 2^{-1/2^{n-2}} \geqq 3{,}999$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $\left(\frac{4}{3{,}999}\right)^{2^{n-2}} \geqq 2$. Pretože zrejme platí $\frac{4}{3{,}999} > \frac{4{,}001}{4}$, je

$$\left(\frac{4}{3{,}999}\right)^{2^{n-2}} > \left(1 + \frac{1}{4000}\right)^{2^{n-2}} > 1 + \frac{2^{n-2}}{4000},$$

čo je väčšie než 2 pre každé $n \geqq 14$. Tým je prvá časť úlohy dokázaná.

b) Stačí zvoliť postupnosť s všeobecným členom $x_n = 2^{-n}$. Potom

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{-2k+2}}{2^{-k}} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+2} = 2 + 1 + 2^{-1} + \ldots +$$

$$+ 2^{-n+2} = 4 - 2^{-n+2} < 4 \quad \text{pre všetky } n \geqq 1.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že je to jediná postupnosť požadovaných vlastností. Z toho, čo sme ukázali v časti a), vyplýva totiž, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ daných vlastností platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geqq \frac{x_0^2}{x_1} + c_{n-1} x_1$ pre každé $n \geqq 2$. Pretože $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 4 \,.\, 2^{-1/2^{n-2}} = 4$, potom, ak vo vzťahu

$$4 > \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geqq \frac{x_0^2}{x_1} + c_{n-1} x_1,$$

ktorý má platiť pre všetky $n \geqq 1$ pri $c_0 = 0$, prejdeme k limite pre $n \to \infty$, dostaneme

$$4 \geqq \frac{x_0^2}{x_1} + 4x_1 = 4 + \frac{1}{x_1}(x_0 - 2x_1)^2 ,$$

z čoho už vyplýva, že musí byť $x_0 = 2x_1$. Metódou úplnej indukcie z toho už teraz analogickou úvahou ľahko dokážeme, že pre každé $n \geqq 1$ musí platiť $x_n = 2x_{n+1}$, z čoho zrejme vyplýva, že $x_n = 2^{-n}$.

Iné riešenie časti a) (podľa *M. Engliša*). Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}, \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k .$$

Pretože $x_k > 0$ pre všetky $k \geqq 0$, platí pre všetky $n \geqq 1$:

$$s_n > 0, \sigma_n > 0, s_{n+1} > s_n, \sigma_{n+1} > \sigma_n.$$

Použitím Cauchyho nerovnosti dostaneme, že pre každé $n \geqq 1$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2}{x_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \right)^2 ,$$

čiže

$$s_n (\sigma_n - x_0) \geqq \sigma_{n-1}^2 . \tag{2}$$

Zrejme je však $\sigma_n - x_0 > \sigma_1 - x_0 = x_1 > 0$, a keďže $x_0 = 1$, z (2) máme

$$s_n \geqq \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1} = v_n , \qquad n \geqq 1 . \tag{3}$$

Rozoznávajme nasledujúce dva prípady:

1. Postupnosť $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. Pretože pre všetky $k \geqq 0$ platí: $x_k \leqq x_0 = 1$, je $\sigma_n - 1 \leqq \sigma_{n-1}$ pre každé $n \geqq 1$. Z toho vyplýva, že

$$v_n = \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1} \geqq \sigma_{n-1}$$

platí pre každé $n \geqq 1$, čiže postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taktiež neohraničená. Existuje teda prirodzené číslo N tak, že $v_N > 3{,}999$, z čoho vzhľadom na (3) vyplýva, že $s_N \geqq 3{,}999$, ako bolo treba dokázať.

2. Nech postupnosť $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Vzhľadom na to, že je to postupnosť rastúca, má podľa Bolzano-Weierstrassovej vety vlastnú limitu, ktorú označíme L. Pre každé

$n \geqq 1$ zrejme platí $\sigma_n < L$, teda tiež $\sigma_1 = 1 + x_1 < L$, z čoho vyplýva, že musí byť $L > 1$. Ďalej je zrejmé, že $(L - 2)^2 \geqq 0$ čiže $L^2 \geqq 4L - 4$, z čoho máme $\dfrac{L^2}{L-1} \geqq 4$.

Preto vzhľadom na (3) platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geqq \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n - 1} = \frac{L^2}{L-1} \geqq 4. \tag{4}$$

Vzhľadom na to, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, vyplýva zo (4), že aj v tomto prípade existuje dokonca nekonečne mnoho prirodzených čísel N tak, že platí: $s_N \geqq 3{,}999$.

Ďalšie riešenie časti a) (podľa *J. Sgalla*): Označme pre $x_0 > 0$ $f(x_0)$ infimum zo súčtov $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{k-1}^2}{x_k}$ cez všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ daných vlastností. Vzhľadom na to, že ide o rady s kladnými členmi, je zrejmé, že $f(x_0)$ existuje pre každé $x_0 > 0$ a platí: $f(x_0) > 0$. Ďalej sa ľahko vidí, že pre každé $a > 0$, $b > 0$ platí $f(a) = \dfrac{a}{b} f(b)$. Ak totiž pre nejakú nerastúcu postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ platí $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{k-1}^2}{x_k} = s$, $x_0 = b$, potom pre nerastúcu postupnosť $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, $y_0 = a$, pre ktorú $y_k = \dfrac{a}{b} x_k$ pre všetky $k \geqq 0$, zrejme bude $s' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{y_{k-1}^2}{y_k} = \dfrac{a}{b} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_{k-1}^2}{x_k} = \dfrac{a}{b} s$. Je teda $f(a) \leqq \dfrac{a}{b} f(b)$. Ak navzájom vymeníme a a b, dostaneme $f(b) \leqq \dfrac{b}{a} f(a)$

čiže $f(a) \geqq \frac{a}{b} f(b)$, z čoho už vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Označme ďalej $g(x_0, x_1)$ infimum zo súčtov $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}$ cez všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ daných vlastností. Potom podľa definície funkcií f a g platí:

$$f(1) = \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} g(1; x_1) = \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots \right) =$$

$$= \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + f(x_1) \right) = \inf_{x_1 \in (0;1\rangle} \left(\frac{1}{x_1} + x_1 f(1) \right).$$

Funkcia $y = \frac{1}{x} + x f(1)$ je spojitá pre $x \in (0; 1\rangle$ a v pravom okolí bodu $x = 0$ je neohraničená. Bude preto nadobúdať infimum v nejakom čísle $x_1 \in (0; 1\rangle$, čo znamená, že bude

$$f(1) = \frac{1}{x_1} + x_1 f(1). \tag{5}$$

Zrejme nemôže platiť $x_1 = 1$. Stačí preto uvažovať o $x_1 \in (0; 1)$, pre ktoré z (5) dostaneme

$$f(1)(1 - x_1) = \frac{1}{x_1} \quad \text{čiže } f(1) = \frac{1}{x_1(1 - x_1)} \geqq 4$$

pre všetky $x_1 \in (0; 1)$.
Z toho vyplýva, že pre všetky postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ daných

vlastností má nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k-1}^2}{x_k}$ súčet rovný aspoň 4 alebo nekonverguje, tj. postupnosť jeho čiastočných súčtov je neohraničená. V oboch prípadoch však zrejme existuje čiastočný súčet s_n tohto radu, pre ktorý platí $s_n \geqq 3{,}999$, ako sme mali dokázať.

Riešenie 4. úlohy. Nech $[x, y]$ je nejaké celočíselné riešenie rovnice

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n, \tag{1}$$

kde n je dané celé kladné číslo. Pretože $(y - x)^3 = y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3$, je $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3x^2y + 2x^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 - x^3$, čo znamená, že rovnici (1) vyhovuje tiež usporiadaná dvojica $[y - x, -x]$ celých čísel. Keďže ďalej platí $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, bude $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (x - y)^3 - 6xy^2 + 3x^2y + 2y^3 = (x - y)^3 + 3y(x - y)^2 - y^3 = (-y)^3 - 3(-y)(x - y)^2 + (x - y)^3$, z čoho vyplýva, že rovnici (1) vyhovuje potom tiež usporiadaná dvojica $[-y, x - y]$ celých čísel.

Ľahko sa vidí, že dvojice $[x, y]$, $[y - x, -x]$ a $[-y, x - y]$ sú navzájom rôzne. Ak by napr. platilo $[x, y] = [y - x, -x]$, muselo by byť $x = y - x$ a súčasne $y = -x$, z čoho už vyplýva $x = y = 0$. Táto dvojica rovnici (1) však pri celom kladnom n nemôže vyhovovať. Podobne dôjdeme k sporu aj v zostávajúcich dvoch prípadoch. Tým sme dokázali, že ak rovnica (1) má nejaké celočíselné riešenie, potom má aspoň tri také riešenia.

Nech teraz pre nejaké celé čísla x, y platí

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891 = 9 \cdot 231 + 2.$$

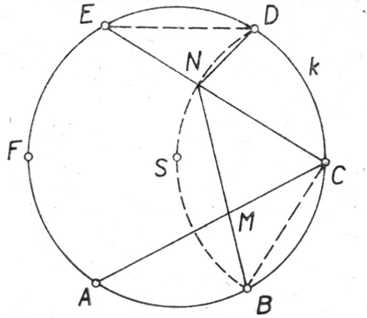
Potom zrejme je $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 2 \pmod 9$. To však znamená, že musí byť $x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod 3$ čiže $x^3 + y^3 \equiv -1 \pmod 3$. Uvažujme o jednotlivých možných prípadoch:

a) Nech $x \equiv 0 \pmod 3$. Potom musí byť $y^3 \equiv -1 \pmod 3$ čiže $y \equiv -1 \pmod 3$. Existujú teda celé čísla s, t tak, že platí: $x = 3s$, $y = 3t - 1$. Potom však $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 27s^3 - 3 \cdot 3s(3t - 1)^2 + 27t^3 - 27t^2 + 9t - 1 \equiv -1 \pmod 9$, čo je spor.

b) Nech $x \equiv -1 \pmod 3$. Potom $x^3 \equiv -1 \pmod 3$ a musí platiť $y \equiv 0 \pmod 3$. Existujú teda celé čísla u, v tak, že platí $x = 3u - 1$, $y = 3v$. Analogicky ako v prípade a) dostaneme $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv -1 \pmod 9$, čo je opäť spor.

c) Nech konečne $x \equiv 1 \pmod 3$. Potom tiež $x^3 \equiv 1 \pmod 3$ a musí preto platiť $y^3 \equiv 1 \pmod 3$ čiže $y \equiv 1 \pmod 3$. Podľa vyššie dokázaného musí danej rovnici vyhovovať tiež usporiadaná dvojica $[y - x, -x]$, pre ktorú však v tomto prípade platí $y - x \equiv 0 \pmod 3$, $-x \equiv -1 \pmod 3$, ale také riešenie sme vylúčili už v prípade a). Daná rovnica teda nemôže mať celočíselné riešenie, ako sme mali dokázať.

Riešenie 5. úlohy. Pretože trojuholník ACE je rovnostranný (pozri obr. 44), zo zadania úlohy vyplýva, že $|CM| = |EN|$. Pretože zrejme $|BC| = |DE|$ a $\sphericalangle DEC = \sphericalangle BCA = 30°$, sú trojuholníky BMC a DNE zhodné. Z toho ďalej plynie, že $\sphericalangle NBC = \sphericalangle EDN$. Keďže $\sphericalangle ECB = 90°$, je



Obr. 44

$\sphericalangle BND = \sphericalangle BNC + \sphericalangle CND = (90° - \sphericalangle NBC) + \sphericalangle CED + \sphericalangle NDE = 120°$. To znamená, že úsečku BD vidno z bodu N pod uhlom 120° rovnako ako zo stredu S kružnice opísanej danému šesťuholníku. Z toho vyplýva, že bod N leží na kružnici so stredom C a polomerom $|CB| = |CD|$. Platí preto: $|CN| = |CB|$. Pre deliaci pomer λ z toho vyplýva, že

$$\lambda = |CN| : |CE| = |CB| : |CE| = 1 : \sqrt{3}$$

čiže $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pretože v pravouhlom trojuholníku BCE je $\sphericalangle EBC = 60°$.

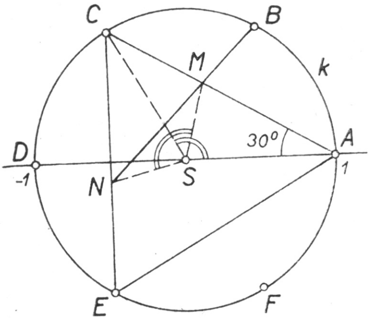
Iné riešenie (podľa *I. Kříža*). Zvoľme v rovine daného šesťuholníka súradnicovú sústavu so začiatkom v bode B a označujme polohové vektory jednotlivých bodov rovnakými symbolmi, ako sú označené tieto body. Platí teda $B = O$ a $M = \lambda C + (1 - \lambda) A$, $N = \lambda E + (1 - \lambda) C$, kde $0 \neq$

$\neq \lambda \neq 1$, pretože M, N sú podľa predpokladu vnútornými bodmi uhlopriečok AC, CE daného šesťuholníka. Z vlastností pravidelného šesťuholníka vyplýva, že $E = 2(A + C)$. Preto $N = 2\lambda(A + C) + (1 - \lambda)C = 2\lambda A + (1 + \lambda)C$. Z toho, že body B, M, N ležia na jednej priamke, vyplýva, že vektory M, N sú kolineárne. To však znamená, že musí platiť

$$\frac{2\lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda}. \tag{1}$$

Rovnosť (1) však platí práve vtedy, keď $2\lambda^2 = 1 - \lambda^2$, čiže vtedy, keď $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Pretože musí byť $\lambda > 0$, je jediným riešením $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ďalšie riešenie (podľa *J. Sgalla*): Zobrazme vrcholy daného šesťuholníka v rovine komplexných čísel tak, že



Obr. 45

$A = 1$, $D = -1$ a $S = 0$, kde S je stred daného šesťuholníka (pozri obr. 45). Pretože ACE je rovnostranný trojuholník, je $|AC| = |CE|$ a zo zadania úlohy vyplýva, že $|AM| = |CN|$. Keďže je tiež $|SA| = |SC|$ a $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCE = 30°$, sú trojuholníky SAM a SCN zhodné. Z toho vyplýva, že $|SM| = |SN|$. Pretože $\sphericalangle MSN = \sphericalangle MSC + \sphericalangle CSN = \sphericalangle ASC - \sphericalangle ASM + \sphericalangle CSN = \sphericalangle ASC = 120°$, je bod N obrazom bodu M v otočení o 120° okolo stredu S. Označme $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Potom $A = 1$, $B = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $C = \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Podľa zadania úlohy je ďalej $M = A + \lambda(C - A) = 1 - \frac{3}{2}\lambda + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$. Potom však $N = \varepsilon^2 M = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\lambda + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\sqrt{3}\right) i$. Ak body B, M, N, ktoré sú navzájom rôzne, ležia na priamke, potom musí existovať reálne číslo $k \neq 0$ tak, že platí

$$B - N = k(M - N) \quad \text{čiže}$$

$$1 + \lambda\sqrt{3}\,\mathrm{i} = k\left[\frac{3}{2}(1 - \lambda) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3\lambda - 1)\,\mathrm{i}\right].$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí stadiaľ máme

$$(2) \qquad 1 = k\frac{3}{2}(1-\lambda), \quad \lambda\sqrt{3} = k\frac{\sqrt{3}}{2}(3\lambda - 1).$$

Z (2) po jednoduchej úprave dostaneme

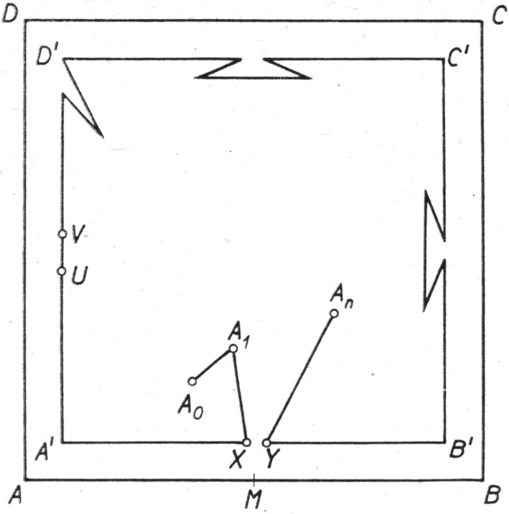
$$2 = 3k - 3k\lambda, \qquad 2\lambda = 3k\lambda - k,$$

z čoho sčítaním oboch rovností vyplýva $2k = 2\lambda + 2$ čiže $k = \lambda + 1$. Ak teraz dosadíme za k do prvej rovnosti (2), dostaneme

$$1 = \frac{3}{2}(1 - \lambda^2), \text{ z čoho už je } \lambda^2 = \frac{1}{3},$$

a stadiaľ rovnako ako v predchádzajúcom riešení máme $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Riešenie 6. úlohy (podľa *P. Coufa*). Vrcholy štvorca S označme A, B, C, D a pre body lomenej čiary L definujme usporiadanie takto: Označme $l(A_0, U)$ dĺžku tej časti L, ktorá je ohraničená bodmi A_0, U. Nech $U, V \in L$. Potom $U \leqq V$, ak $l(A_0, U) \leqq l(A_0, V)$. Vzdialenosť bodov U, V v rovine označujeme $d(U, V)$. Nech A', B', C', D' sú také body z L, pre ktoré platí: $d(A, A') \leqq \frac{1}{2}$, $d(B, B') \leqq \frac{1}{2}$, $d(C, C') \leqq \frac{1}{2}$, $d(D, D') \leqq \frac{1}{2}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $A' < D' < B'$ (pozri obr. 46). Označme $L_1 = \{Z \in L \mid Z \leqq D'\}$, $L_2 = \{Z \in L \mid Z \geqq D'\}$. Nech $L_i' = \{W \in AB \mid \exists\, W' \in L_i : d(W, W') \leqq \frac{1}{2}\}, i = 1, 2$. Je zrejmé, že $A \in L_1'$, $B \in L_2'$, čiže $L_i' \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Podľa zadania úlohy taktiež platí: $AB = L_1' \cup L_2'$. Ďalej



Obr. 46

je zrejmé, že L_i', $i = 1, 2$ je zjednotením konečného počtu intervalov alebo jednobodových množín. Preto platí: $L_1' \cap \cap L_2' \neq \emptyset$. Nech teraz $M \in L_1' \cap L_2'$ a $X \in L_1$, $Y \in L_2$ sú také body, že platí $d(M, X) \leqq \frac{1}{2}$, $d(M, Y) \leqq \frac{1}{2}$. Potom z trojuholníkovej nerovnosti vyplýva, že $d(X, Y) \leqq d(M, X) + d(M, Y) \leqq 1$. Na druhej strane však pre dĺžku $l(X, Y)$ tej časti lomenej čiary L, ktorá je ohraničená bodmi X, Y, zrejme platí: $l(X, Y) = l(X, D') + l(D', Y) \geqq \geqq d(X, D') + d(D', Y) \geqq 99 + 99 = 198$, čo sme mali dokázať.