31. ročník matematické olympiády

Kategória C

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor): 31. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1981-1982. 23. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984. pp. 59–78.

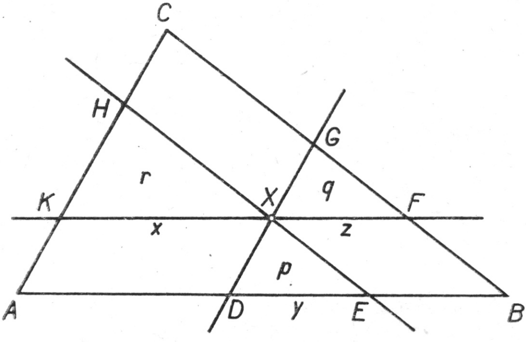
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404756

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - I - 1

Vnútorným bodom X trojuholníka ABC vedieme rovnobežky s jeho stranami a tak rozdelíme trojuholník ABC na tri trojuholníky a tri rovnobežníky. Obsahy nových trojuholníkov sú p, q, r. Vypočítajte obsah P trojuholníka ABC pomocou čísel p, q, r.

Riešenie. Označme (pozri obr. 9) novovytvorené trojuholníky DEX, XFG, KXH. Vzhľadom na rovnobežnosť odpovedajúcich si strán, a teda aj zhodnosť odpovedajúcich



Obr. 9

si uhlov, sú tieto trojuholníky podobné všetky navzájom i s trojuholníkom ABC. Vieme, že ak sú dva trojuholníky podobné v pomere $k : 1$, potom ich plošné obsahy sú v pomere $k^2 : 1$. Preto platí:

$$p : P = \frac{y^2}{(x + y + z)^2}, \quad q : P = \frac{z^2}{(x + y + z)^2},$$

$$r : P = \frac{x^2}{(x + y + z)^2}.$$

Z týchto rovností po odmocnení dostaneme

$$\sqrt{\frac{p}{P}} = \frac{y}{x + y + z}, \quad \sqrt{\frac{q}{P}} = \frac{z}{x + y + z},$$

$$\sqrt{\frac{r}{P}} = \frac{x}{x + y + z}.$$

Sčítaním ľavých a pravých strán týchto rovností dostávame

$$\frac{\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}}{\sqrt{P}} = \frac{x + y + z}{x + y + z} = 1,$$

z čoho vyplýva, že $\sqrt{P} = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$,
čiže $P = (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})^2$.

C - I - 2

Definujme pre ľubovoľné čísla r, s číslo $\min(r, s)$ takto: $\min(r, s) = r$, ak je $r \leqq s$, $\min(r, s) = s$, ak je $r > s$.

Nech a, b, c sú nezáporné čísla a nech platí

$$(1) \qquad a + b \geqq c.$$

Potom platí tiež

$$(2) \qquad \min(1, a) + \min(1, b) \geqq \min(1, c);$$

dokážte.

Riešenie. Budeme rozlišovať niekoľko prípadov:

a) $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$. Potom je $\min(1, a) = a$, $\min(1, b) = b$, a pretože vždy platí: $c \geqq \min(1, c)$, bude vzhľadom na (1)

$$\min(1, a) + \min(1, b) = a + b \geqq c \geqq \min(1, c),$$

z čoho vyplýva, že v tomto prípade nerovnosť (2) platí.

b) Nech $a > 1$, $0 \leqq b \leqq 1$. Potom je $\min(1, a) = 1$, $\min(1, b) = b$, čo znamená, že $\min(1, a) + \min(1, b) = 1 + b \geqq 1 \geqq \min(1, c)$, čím sme opäť dokázali správnosť nerovnosti (2) aj v tomto prípade. Rovnako by sme postupovali aj v prípade, keď by bolo $0 \leqq a \leqq 1$, $b > 1$.

c) Nech konečne $a > 1$, $b > 1$. Potom je $\min(1, a) = 1$, $\min(1, b) = 1$, z čoho vyplýva, že $\min(1, a) + \min(1, b) = 2 > 1 \geqq \min(1, c)$, čím je dokázaná nerovnosť (2) aj v tomto prípade.

Pretože iné prípady pre nezáporné čísla a, b už nastať nemôžu, je tým správnosť tvrdenia úlohy dokázaná.

C - I - 3

Nájdite všetky prirodzené čísla m, pre ktoré platí, že $m + 3$ je deliteľné štyrmi, $m + 4$ je deliteľné piatimi a $m + 5$ je deliteľné šiestimi.

Riešenie. Nech m je prirodzené číslo požadovaných vlastností. Zo zadania úlohy vyplýva, že potom musia existovať prirodzené čísla p, q, r tak, že platí

$$(1) \qquad m + 3 = 4p, \quad m + 4 = 5q, \quad m + 5 = 6r.$$

Rovnosti (1) budú zrejme splnené práve pre také m, pre ktoré bude existovať celé nezáporné číslo s deliteľné číslami 4, 5, 6, pre ktoré platí

$$(2) \quad m + 3 = 4 + s, \quad m + 4 = 5 + s, \quad m + 5 = 6 + s.$$

Za číslo s vo vzťahoch (2) možno zvoliť zrejme každé číslo tvaru $s = 4.5.3.k$, kde k je ľubovoľné celé nezáporné číslo, čiže $s = 60\,k$. Z toho vyplýva, že podmienkam úlohy môžu vyhovovať len čísla

$$(3) \qquad m = 1, 61, 121, 181, 241, \ldots$$

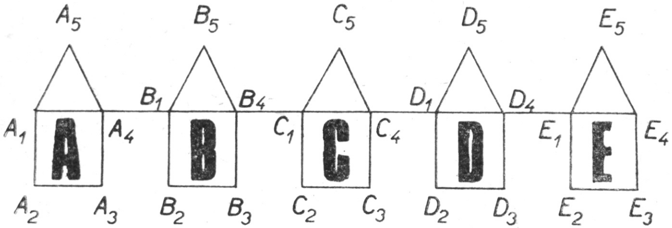
a skúškou sa ľahko presvedčíme, že všetky čísla (3) sú riešeniami úlohy.

Úsečky v obr. 10 je treba zafarbiť červenou a modrou farbou takto:

Začneme v niektorom vyznačenom bode a zafarbíme niektorú z úsečiek, ktorá z neho vychádza, červenou farbou. V ďalších krokoch farbíme striedavo modrou alebo červenou farbou niektorú z dosiaľ nezafarbených úsečiek vychádzajúcich z bodu, do ktorého viedla práve zafarbená úsečka. Takto pokračujeme dovtedy, pokiaľ je to možné.

a) Určte, v ktorých bodoch treba začať, aby sa potom dali zafarbiť všetky úsečky.

b) Koľko rôznych zafarbení všetkých úsečiek môže vzniknúť?



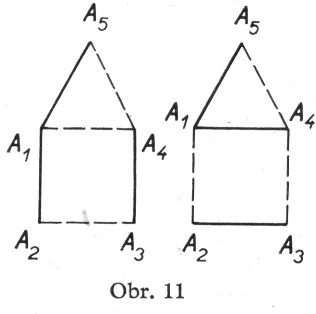
Obr. 10

Riešenie. a) Daný obrazec voláme grafom, jednotlivé úsečky sú hranami grafu, ich koncové body voláme uzlami. Počet hrán vychádzajúcich z daného uzla grafu voláme jeho stupňom. V danom grafe sú s výnimkou uzlov A_1 a E_4 všetky uzly párneho stupňa. Uzly A_1, E_4 sú tretieho, teda nepárneho stupňa. Úloha zafarbiť všetky hrany daného grafu je totožná s úlohou nakresliť daný graf jedným ťahom. K tomu, aby sme daný graf nakreslili jedným ťahom, nemôžeme začať v uzle párneho stupňa. Ak by sme začali napr. z uzlu A_5 farbením hrany A_5A_1, pri predpísanom spôsobe farbenia hrán by sme sa pri farbení »domčeka« A buď zafarbením hrany A_4A_5 vrátili naspäť do uzla A_5 a ďalej k domčeku B by sme už nemohli pokračovať, pričom by aj niektoré z hrán domčeka A (napr. A_4A_1) zostali nezafarbené, alebo by sme nemohli zafarbiť hranu A_4A_5. Musíme preto začínať v uzle nepárneho stupňa. K tomu, aby sa dali zafarbiť všetky úsečky daného obrazca, musíme teda začať v bodoch A_1, resp. E_4.

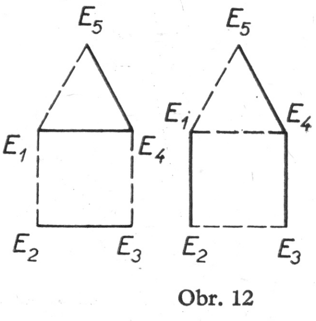
b) Predpokladajme, že začneme daný graf farbiť v bode A_1. Každý domček pozostáva zo 6 hrán. Po zafarbení všetkých hrán domčeka A sa dostaneme k hrane A_4B_1, ktorá je spojnicou prvých dvoch domčekov. Po vyjdení z vrcholu A_1 sa môžeme k hrane A_4B_1, ktorú budeme farbiť ako siedmu, a teda červene, dostať celkom 6 spôsobmi, ale vzniknú pritom len dve navzájom rôzne zafarbenia hrán domčeka A (pozri obr. 11, na ktorom sú červené hrany vyznačené plnou čiarou, modré čiarou prerušovanou). Domček B začneme farbiť z uzlu B_1 modrou hranou a z rovnakých dôvodov ako pri farbení domčeka A dostaneme dve rôzne zafarbenia s tým rozdielom, že farby hrán budú opačné ako na obr. 11. Pri farbení prvých dvoch domčekov máme teda celkom 4 rôzne zafarbenia. Hranu B_4C_1, ktorá je spojnicou domčekov B a C, budeme farbiť ako štrnástu, teda modrou farbou. Domček C zafarbíme podobne ako domček A a domček D podobne ako domček B a domček E opäť podobne ako domček A. Pri každom z nich dostaneme teda celkom dve rôzne zafarbenia. Pri troch domčekoch máme tak 8 rôznych zafarbení, pri štyroch 16 a pri všetkych piatich 32. Pritom sme hranu C_4D_1 farbili ako dvadsiatu prvú, čiže červene, a hranu D_4E_1 ako dvadsiatu ôsmu, tj. modre.

Ak začneme s farbením grafu z bodu E_4 červenou farbou, dostaneme farbenie domčeka E ako na obr. 12, kde opäť plná čiara znamená červenú farbu hrany a prerušovaná čiara farbu modrú. Po zafarbení domčeka E budeme hranu E_1D_4 farbiť ako siedmu, čiže červenou farbou. Pri tomto spôsobe farbenia grafu dostávame teda iné zafarbenia ako pri farbení z bodu A_1, ktorých je zrejme taktiež celkom 32. Z toho vyplýva, že celkový počet rôznych zafarbení je $32 . 2 = 64$.

Poznámka. Odporúčame čitateľovi, aby si uvedomil, že pri farbení grafu pozostávajúceho zo 6 domčekov bude počet zafarbení pri vyjdení z bodu A_1 64, ale pri vyjdení z druhého uzla nepárneho stupňa nedostaneme už ďalšie rôzne zafarbenia grafu. Teda i v tom prípade bude celkový počet rôznych zafarbení len 64.



Obr. 11

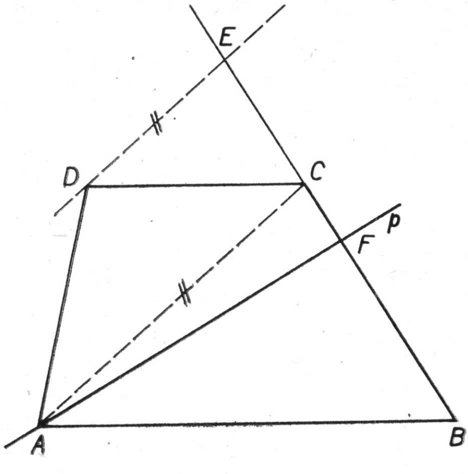


Obr. 12

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD, kde $|AB| > |CD|$. Vrcholom A veďte priamku p tak, aby rozdelila daný lichobežník na dve časti rovnakých obsahov.

Riešenie. Veďme vrcholom D daného lichobežníka rovnobežku s uhlopriečkou AC tohto lichobežníka. Táto pretne polpriamku BC v nejakom bode, ktorý označíme E. Vznikne tak trojuholník ABE (pozri obr. 13), ktorý má zrejme rovnaký obsah ako lichobežník $ABCD$. Trojuholníky ACD a ACE majú totiž spoločnú stranu AC a výšky oboch trojuholníkov na túto stranu sú rovnako veľké.

Označme F stred úsečky BE. Vzhľadom na to, že $|AB| > |CD|$, musí bod F ležať zrejme vo vnútri úsečky BC.



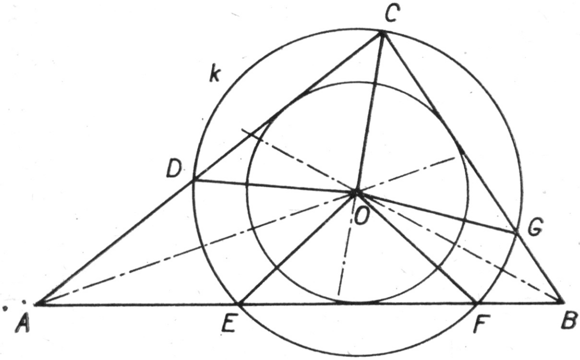
Obr. 13

Priamka AF je potom zrejme hľadanou priamkou p. Obsah trojuholníka ABF je totiž polovicou obsahu trojuholníka ABE a vzhľadom na vyššie uvedené teda polovicou obsahu daného lichobežníka. Z toho vyplýva, že obsahy trojuholníka ABF a štvoruholníka $AFCD$ sú rovnaké.

C - I - 6

Je daný trojuholník ABC. Nech O je stred jemu vpísanej kružnice a nech $|OC| < |OA|$, $|OC| < |OB|$. Vyjadrite veľkosti tetív, ktoré na stranách trojuholníka ABC vytína kružnica $k = (O; |OC|)$, pomocou veľkostí jeho strán.

Riešenie. Označme C, D, E, F, G spoločné body kružnice k a obvodu trojuholníka ABC (pozri obr. 14). Trojuholníky DOC, FOE, COG sú zrejme všetky tri rovnoramenné s rovnako veľkými ramenami, a sú preto zhodné. Ich základňami sú tetivy kružnice k vyťaté na stranách trojúholníka ABC,



Obr. 14

ktoré sú preto tiež zhodné. Označme ich dĺžku t. Platí teda: $|CD| = |CG| = |EF| = t$. Označme ďalej $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$. Body D, E sú súmerné podľa priamky AO, body G, F zasa podľa priamky BO. Preto platí: $|AF| = |AC| = b$, $|BE| = |BC| = a$. Ďalej platí: $|AE| = c - |BE| = c - a$, $|BF| = c - |AF| = c - b$. Keďže $|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$, po dosadení dostaneme $c = c - a + t + c - b$, z čoho už vyplýva: $t = a + b - c$.

ÚLOHY KLAUZÚRNEJ ČASTI I. KOLA

C - S - 1

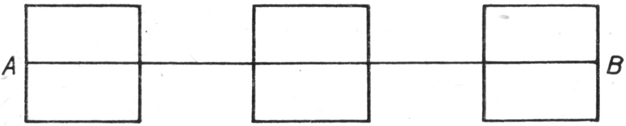
Nájdite prvé dve z čísel 3, 33, 333, 3333, ..., ktoré sú deliteľné siedmimi.

Riešenie. Priamym výpočtom sa ľahko presvedčíme, že žiadne z čísel 3, 33, 333, 3333, 33 333 nie je siedmimi deliteľné. Číslo 333 333 však už siedmimi deliteľné je, pretože platí $333\,333 = 7 \,.\, 47\,619$. Tak sme našli prvé z hľadaných čísel. Druhé by sme mohli rovnako hľadať skúšaním deliteľnosti, ale riešenie si môžeme uľahčiť nasledujúcou úvahou:

Číslo zapísané $k + 6$ trojkami dáva pri delení siedmimi rovnaký zvyšok ako číslo zapísané k trojkami, pretože ich rozdiel je rovný $333\,333 \,.\, 10^k$, čo je číslo deliteľné siedmimi. Preto ďalším číslom deliteľným siedmimi v danom slede bude číslo zapísané dvanástimi trojkami, teda číslo 333 333 333 333.

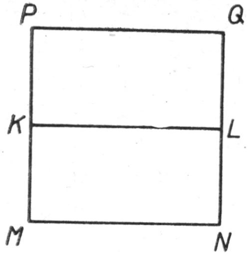
C - S - 2

Určete, koľkými spôsobmi možno daný obrazec (obr.15) nakresliť jedným ťahom. Pritom za rôzne pokladáme také spôsoby, pri ktorých sa začína na rôznych miestach alebo pri ktorých sa úsečky zakreslujú v rôznom poradí.



Obr. 15

Riešenie. Ako sme zistili pri úlohe C - I - 4, ak chceme daný graf nakresliť jedným ťahom, musíme začať a končiť v uzle nepárneho stupňa. V danom prípade musíme teda začať v bode *A* a končiť v bode *B* alebo obrátene. Daný graf pozostáva z troch »domčekov«, z ktorých každý obsahuje šesť hrán, a z dvoch spojovacích hrán. Akonáhle zakreslíme spojovaciu hranu, nemôžeme sa už vracať späť. Preto pred zakreslením spojovacej hrany už musí byť zakreslený celý predchádzajúci domček. Každý z troch domčekov možno zakresliť šiestimi rôznymi spôsobmi (obr. 16): *KMNLKPQL*, *KMNLQPKL*, *KPQLKMNL*, *KPQLNMKL*, *KLQPKMNL*, *KLNMKPQL*. Ak začneme v bode *A*, môžeme teda daný obrazec zakresliť $6 . 6 . 6 = 216$ spôsobmi. Rovnaký počet spôsobov zakreslenia obrazca dostaneme, ak vyjdeme z bodu *B*. Celkom je teda 432 možností, ako sa dá daný obrazec nakresliť jedným ťahom.

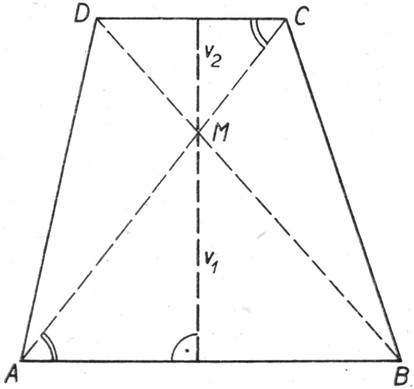


Obr. 16

C - S - 3a

Lichobežník $ABCD$ so základňami $|AB| = 10$, $|CD| = 5$ a výškou $v = 9$ je svojimi uhlopriečkami AC, BD rozdelený na štyri trojuholníky. Vypočítajte ich obsahy.

Riešenie. Označme M priesečník uhlopriečok AC, BD (obr. 17). Trojuholníky DCM a BAM majú odpovedajúce



Obr. 17

uhly zhodné, sú teda podobné. Pretože podľa predpokladu je $|AB| = 2|CD|$, sú aj ich výšky v pomere 2 : 1. Platí preto: $v_1 = 6$, $v_2 = 3$. Z toho vyplýva, že obsah trojuholníka ABM je $\frac{1}{2} . 10 . 6 = 30$, obsah trojuholníka CDM je $\frac{1}{2} . 5 . 3 = 7{,}5$. Ďalej je obsah trojuholníka ABC rovný $\frac{1}{2} . 10 . 9 = 45$, z čoho vyplýva, že obsah trojuholníka BCM je $45 - 30 = 15$ a rovnako veľký je tiež obsah trojuholníka ADM.

C - S - 3b

Pre nezáporné čísla a, b, c platí $a + b \geqq c$. Zistite, či potom musí platiť $a^2 + 3b^2 \geqq c^2$.

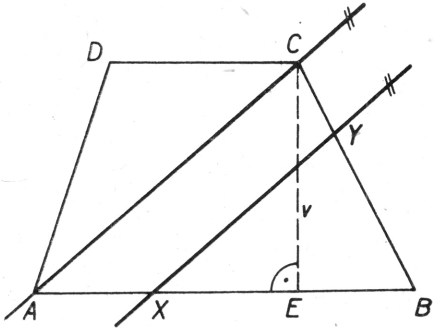
Riešenie. Ukážeme, že nerovnosť $a^2 + 3b^2 \geqq c^2$ nemusí platiť pre všetky také a, b, c, pre ktoré je $a + b \geqq c$. Stačí totiž, aby sme zvolili čísla a, b tak, aby platilo $a^2 + 3b^2 < (a + b)^2$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $b(b - a) < 0$, a číslo c tak, aby bolo $a^2 + 3b^2 < c^2 \leqq (a + b)^2$. Ľahko sa vidí, že príkladom takej trojice sú čísla: $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$. Je totiž $a + b = 3 = c$, ale $a^2 + 3b^2 = 7 < 9 = c^2$.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami $|AB| = 2a$, $|DC| = a$. Veďte dve priamky rovnobežné s úsečkou AC tak, aby rozdelili lichobežník na tri časti rovnakého obsahu. Určte priesečníky týchto priamok s priamkou AB.

Riešenie. Označme $v = |CE|$ výšku lichobežníka $ABCD$ (pozri obr. 18). Potom pre jeho obsah P platí



Obr. 18

$$P = \frac{1}{2}(2a + a)\,v = \frac{3}{2}\,av.$$

Hľadané rovnobežky s úsečkou AC majú preto rozdeliť daný lichobežník na tri časti s obsahom $\frac{1}{2}\,av$. Takýto obsah má však zrejme trojuholník ACD. Preto jednou z hľadaných rovnobežiek je priamka AC. Druhú rovnobežku s úsečkou AC nájdeme tak, že trojuholník ABC rozdelíme na dve časti rovnakého obsahu. Označme X priesečník hľadanej rovnobežky s priamkou AB, Y jej priesečník s priamkou BC. Obsahy podobných trojuholníkov BXY a BAC sú v pomere $1 : 2$. Podľa vety o obsahoch podobných trojuholníkov, ktorú sme použili v riešení úlohy C-I-1, musí preto platiť $|BX|$: $|BA| = 1 : \sqrt{2}$, z čoho vyplýva, že $|BX| = \dfrac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

C - II - 2

Pre každé prirodzené číslo n je číslo $N = 10^{2n} - 2^{2n}$ násobkom čísla 96. Dokážte.

Riešenie. Číslo N môžeme postupne upraviť takto:

$$N = 2^{2n}(5^{2n} - 1) = 2^{2n}(5^n - 1)(5^n + 1).$$

Číslo $2^{2n} \geqq 2^2$ pre každé $n \geqq 1$ je zrejme násobkom 4. Čísla $5^n - 1$, 5^n, $5^n + 1$ sú tri za sebou nasledujúce prirodzené čísla. Práve jedno z nich je preto násobkom troch. Nie je to číslo 5^n. Násobkom troch bude teda niektoré z čísel $5^n - 1$, $5^n + 1$, ktoré sú párne a jedno z nich musí byť násobkom štyroch. Súčin $(5^n - 1)(5^n + 1)$ bude teda pre každé $n \geqq 1$ násobkom čísla $3 . 2 . 4 = 24$. Preto číslo N je pre každé prirodzené n násobkom čísla $4 . 24 = 96$, ako bolo treba dokázať.

Iné riešenie. Pri dôkaze tvrdenia úlohy môžeme použiť tiež metódu matematickej indukcie. Za tým účelom označme hodnotu čísla N v závislosti na n ako a_n.

Pre $n = 1$ je $a_1 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$, čo je zrejme číslo deliteľné číslom 96.

Nech pre nejaké prirodzené číslo $n \geqq 1$ je $a_n = 96k$, kde k je prirodzené číslo. Potom

$$a_{n+1} = 10^{2n+2} - 2^{2n+2} = 100 . 10^{2n} - 4 . 2^{2n} =$$

$$= 96 . 10^{2n} + 4\,a_n = 96\,(10^{2n} + 4k),$$

čo znamená, že číslo a_{n+1} je tiež násobkom čísla 96. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Ďalšie riešenie. Metódou matematickej indukcie sa dá dokázať, že pre ľubovoľnú dvojicu prirodzených čísel p, q a každé prirodzené číslo $n \geqq 1$ je

$$p^n - q^n = (p - q)(p^{n-1} + p^{n-2} q + \ldots + q^{n-1}),$$

čo znamená, že rozdiel $p^n - q^n$ je deliteľný číslom $p - q$. V našom prípade stačí teda položiť $p = 10^2$, $q = 2^2$.

C - II - 3a

Nech a, b, c sú nezáporné reálne čísla také, že platí: $a + b \geqq c$. Potom platí

$$\frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \geqq \frac{c}{1 + c}. \tag{1}$$

Dokážte.

Vyšetrite ďalej, kedy platí vo vzťahu (1) rovnosť a rozhodnite, či tvrdenie platí aj v prípade, keď nepredpokladáme nezápornosť čísel a, b, c, ale iba to, že sú rôzne od čísla -1.

Riešenie. Vzhľadom na to, že čísla $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$ sú kladné, platí (1) práve vtedy, keď platí nerovnosť, ktorú z nej dostaneme, ak obe strany vynásobíme súčinom $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$, čiže

$$a + abc + ab + ac + b + abc + ab + bc \geqq$$

$$\geqq c + abc + ac + bc,$$

tj.

$$(2) \qquad a + b + 2ab + abc \geqq c.$$

Nerovnosť (2) však zrejme platí, pretože podľa predpokladu je $a + b \geqq c$ a $2ab + abc \geqq 0$. Platí preto aj nerovnosť (1), ktorej správnosť sme mali dokázať.

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane zrejme práve vtedy, keď nastane rovnosť vo vzťahu (2). To však nastáva práve vtedy, keď súčasne platí

$$(3) \qquad a + b = c,$$

$$(4) \qquad 2ab + abc = 0.$$

Vzhľadom na to, že $c \geqq 0$, platí (4) práve vtedy, keď buď $a = 0$, alebo $b = 0$. Pre $a = 0$ však z (3) máme $b = c$ a pre $b = 0$ je z (3) zasa $a = c$. Rovnosť vo vzťahu (1) nastáva teda práve vtedy, keď buď $a = 0$, $b = c$, alebo $b = 0$, $a = c$.

Ak o číslach a, b, c nepredpokladáme nezápornosť, tak jednak vo všeobecnosti z (1) nevyplýva (2), ale ani pre $a > -1$, $b > -1$, $c > -1$, keď (2) z (1) dostaneme vyššie uvedeným postupom, neplatí (1) a zrejme ani (2), ako ukazuje tento príklad: Ak $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, je $a + b \geqq c$, ale

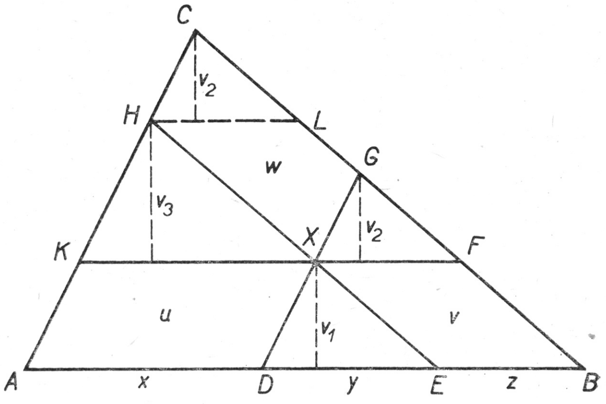
$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{0{,}5}{1+0{,}5} + \frac{-0{,}5}{1-0{,}5} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0 = \frac{c}{1+c}.$$

C - II - 3b

Ak vedieme vnútorným bodom X trojuholníka ABC rovnobežky s jeho stranami, rozdelíme tým trojuholník na tri trojuholníky a tri rovnobežníky. Obsahy týchto rovnobežníkov označíme u, v, w. Vyjadrite obsah P trojuholníka ABC pomocou čísel u, v, w.

Riešenie. Označenie priesečníkov priamok prechádzajúcich bodom X so stranami trojuholníka ABC zvolíme tak ako na obr. 19. Obsahy rovnobežníkov $ADXK$, $BEXF$, $CHXG$ v uvedenom poradí označíme u, v, w. Nech ďalej $|AD| = x$, $|DE| = y$, $|EB| = z$. Výšky trojuholníkov DEX, XFG, KXH na strany DE, XF, KX v uvedenom poradí označíme v_1, v_2, v_3. Pretože tieto trojuholníky majú všetky uhly zhodné, sú navzájom podobné, a tak platí:

$$v_1 : y = v_2 : z = v_3 : x \quad \text{čiže } v_1 = ky,\ v_2 = kz,\ v_3 = kx,$$



Obr. 19

kde $k > 0$ je reálna konštanta. Veďme bodom H rovnobežku so stranou AB daného trojuholníka a jej priesečník so stranou BC označme L. Trojuholník CHL je zrejme zhodný s trojuholníkom GXF. Preto jeho výška na stranu HL je rovná v_2. Z uvedeného je zrejmé, že výšku trojuholníka ABC na stranu AB dostaneme ako súčet $v_1 + v_2 + v_3$ a pre obsah P tohto trojuholníka platí:

$$P = \frac{1}{2}(x + y + z)(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{k}{2}(x + y + z)^2,$$

z čoho vyplýva, že

$$P = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz). \tag{1}$$

Keďže obsah rovnobežníka $HXFL$ je zrejme zhodný s obsahom rovnobežníka $CHXG$, pre čísla u, v, w platí:

$$u = xv_1 = kxy,\ v = zv_1 = kyz,\ w = zv_3 = kxz, \tag{2}$$

z čoho vyplýva

$$uv = k^2y^2xz = ky^2w,\ uw = k^2x^2yz = kx^2v, \tag{3}$$

$$vw = k^2z^2xy = kz^2u.$$

Z (2) dostaneme

$$xy = \frac{u}{k},\quad yz = \frac{v}{k},\quad xz = \frac{w}{k} \tag{4}$$

a z (3) zasa

$$(5) \qquad x^2 = \frac{uw}{kv}, \quad y^2 = \frac{uv}{kw}, \quad z^2 = \frac{vw}{ku}.$$

Dosadením zo (4) a (5) do (1) dostaneme konečne

$$P = \frac{k}{2}\left(\frac{uw}{kv} + \frac{uv}{kw} + \frac{vw}{ku} + \frac{2u}{k} + \frac{2v}{k} + \frac{2w}{k}\right) =$$

$$= \frac{u^2w^2 + u^2v^2 + v^2w^2 + 2u^2vw + 2uv^2w + 2uvw^2}{2uvw} =$$

$$= \frac{(uv + uw + vw)^2}{2uvw}.$$