29. ročník matematické olympiády

Kategorie A

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 29. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979-1980. 21. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 103–147.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404730

Kategorie A

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - P - 1

Obsah P konvexního čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d a úhly α (mezi stranami a, b), γ (mezi stranami c, d) je dán vzorcem

$$(1)\qquad 16P^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}$$

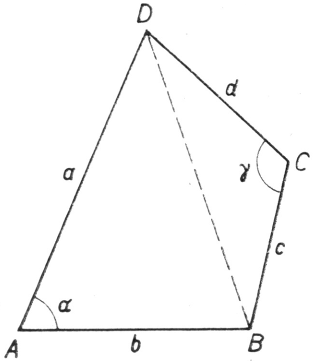
neboli

$$(1')\qquad P^2 = \frac{1}{16}(-a + b + c + d)(a - b + c + d) \,.\, (a + b - c + d)(a + b + c - d) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}\,.$$

Dokažte tento vzorec a odvoďte z něho větu: Při pevných velikostech stran a, b, c, d (a proměnných úhlech α, γ) má konvexní čtyřúhelník největší obsah, je-li tětivový, tj. leží-li všechny jeho vrcholy na kružnici.

Poznámka. Uvedená formulácia úlohy pripúšťa dve možné interpretácie. Autor úlohy zrejme požaduje dokázať implikáciu **V**$_1$: ak štvoruholník má najväčší obsah, tak je tetivový. Uvedená formulácia skôr požaduje dôkaz implikácie **V**$_2$: ak je štvoruholník tetivový, tak má najväčší obsah. Kvôli úplnosti dokážeme obidve implikácie.

Riešenie. Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ so stranami a, b, c, d a uhlami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ podľa obr. 32. Úsečka BD



Obr. 32

rozdelí štvoruholník $ABCD$ na dva trojuholníky BCD a ABD s obsahmi P_1 a P_2. Pre obsah P štvoruholníka $ABCD$ platí

$$P = P_1 + P_2$$

Obsahy P_1 a P_2 ľahko vypočítame:

$$P_1 = \frac{1}{2} cd \sin \gamma,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

Teda

$$2P = ab \sin \alpha + cd \sin \gamma. \tag{2}$$

Podľa kosínusovej vety pre obidva uvažované trojuholníky dostávame

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$BD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma.$$

Takže

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma.$$

Odtiaľ po jednoduchej úprave máme

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2\alpha + + 4c^2d^2 \cos^2\gamma - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma. \tag{3}$$

Vzťah (2) umocníme na druhú, násobíme 4

$$16P^2 = 4a^2b^2 \sin^2\alpha + 4c^2d^2 \sin^2\gamma + + 8abcd \sin \alpha \sin \gamma$$

a pripočítame k (3):

$$(4) \quad 16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd \,.$$
$$. \,(\sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \cos\gamma).$$

Z trigonometrie vieme, že platí

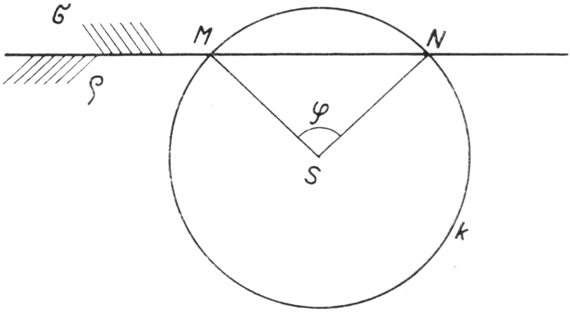
$$\sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \cos\gamma = -\cos(\alpha + \gamma) = 1 - 2\cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} \,.$$

Po dosadení do (4) dostávame

$$16P^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd -$$
$$- 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

a odtiaľ už bezprostredne vyplýva (1) a (1′).

Skôr ako prejdeme k dôkazom implikácií $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_2$, pripomeňme si známe fakty. Uvažujme kružnicu k so stredom S



Obr. 33

a dva rôzne body M, N na kružnici k. Nech ϱ, σ sú polroviny určené priamkou MN a bod S leží v polrovine ϱ (ak S leží na priamke MN, tak leží v obidvoch polrovinách ϱ, σ) – pozri obr. 33. Nech φ je veľkosť uhla MSN. Vieme, že bod X polroviny ϱ leží na kružnici k vtedy a len vtedy, ak uhol MXN je $\frac{1}{2}\varphi$, alebo X je niektorý z bodov M, N. Podobne bod Y polroviny σ leží na kružnici k vtedy a len vtedy, ak uhol MYN je $\pi - \frac{1}{2}\varphi$, alebo Y je niektorý z bodov M, N.

Z uvedeného vyplýva, že ak vrcholy štvoruholníka $ABCD$ ležia na jednej kružnici, tak $\alpha + \gamma = \pi$. Naopak, ak $\alpha + \gamma = \pi$, tak podľa vyššie uvedeného bod C leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Teda štvoruholník $ABCD$ je tetivový vtedy a len vtedy, ak $\alpha + \gamma = \pi$.

Pri pevných veľkostiach strán a, b, c, d obsah P je najväčší práve vtedy, keď je najväčšie číslo $16P^2$. Podľa vzťahu (1) najväčšia možná hodnota čísla $16P^2$ je

$$4\,(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2.$$

Ak štvoruholník $ABCD$ je tetivový, tak $\alpha + \gamma = \pi$. Potom $\cos\dfrac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, a teda P nadobúda najväčšiu možnú hodnotu. Tým sme ukázali pravdivosť implikácie $\mathbf{V}_2$.

Ukážeme teraz pravdivosť implikácie $\mathbf{V}_1$. K dôkazu pravdivosti implikácie $\mathbf{V}_1$ na základe uvedeného je potrebné dokázať toto: ak a, b, c, d sú strany (nejakého) konvexného štvoruholníka, tak existuje tetivový štvoruholník so stranami a, b, c, d.

Predpokladajme, že existuje konvexný štvoruholník so stranami a, b, c, d. Potom podľa (1) platí

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$$
$$= 16P^2 + 16abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Odtiaľ vyplýva

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 > 0,$$

a teda

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} < 1.$$

Teda existuje číslo φ, $0 < \varphi < \pi$ také, že

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Označíme

(5) $$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}.$$

Potom platí

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd} =$$
$$= c^2 + d^2 + 2cd\,\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd},$$

a teda

$$(5') \qquad x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \varphi).$$

Ľahko vidieť, že možno zostrojiť trojuholníky o stranách a, b, x a c, d, x. Ak ich zostrojíme tak, že budú mať spoločnú stranu dĺžky x a ležať v opačných polrovinách určených touto stranou, tak ich vrcholy určujú konvexný štvoruholník so stranami a, b, c, d, ktorý je podľa (5) a (5′) tetivový.

A - P - 2

Jsou-li A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníku, pak nejmenší kruh, který je obsahuje, je kruh omezený kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1A_2A_3$. Nejsou-li body A_1, A_2, A_3 vrcholy ostroúhlého trojúhelníku a jsou-li aspoň dva z nich navzájem různé, pak nejmenší kruh, který obsahuje body A_1, A_2, A_3, je kruh omezený Thaletovou kružnicí nad nejdelší z úseček A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3. Dokažte.

Riešenie. Najprv upresníme, čo znamenajú slová »najmenší kruh«. Najmenší kruh $(S; r)$ obsahujúci body A_1, A_2, A_3 je kruh s týmito dvomi vlastnosťami: i) kruh (S, r) obsahuje body A_1, A_2, A_3; ii) ak kruh $(S'; r')$ obsahuje body A_1, A_2, A_3, tak buď $r < r'$, alebo $r = r'$ a $S = S'$.

Ľahko vidieť, že to nie je najmenší kruh v zmysle množinovej inklúzie.

Najprv predpokladáme, že body A_1, A_2, A_3 nie sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka a aspoň dva sú navzájom rôzne. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že A_1A_2 je najdlhšia z úsečiek A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3.

Ak body A_1, A_2, A_3 ležia na jednej priamke, tak bod A_3

leží na úsečke A_1A_2. Potom kruh ohraničený Thalesovou kružnicou nad úsečkou A_1A_2 obsahuje aj bod A_3.

Ak body A_1, A_2, A_3 neležia na priamke, tak tvoria vrcholy pravouhlého alebo tupouhlého trojuholníka. Pravý alebo tupý uhol je proti najdlhšej strane A_1A_2. Potom zase body A_1, A_2, A_3 ležia vnútri kruhu ohraničeného Thalesovou kružnicou nad úsečkou A_1A_2. Tento kruh má polomer $\frac{1}{2} A_1A_2$.

Naopak, každý kruh obsahujúci body A_1, A_2, A_3 obsahuje úsečku A_1A_2, a teda buď má polomer väčší ako $\frac{1}{2} A_1A_2$, alebo je ohraničený Thalesovou kružnicou nad touto úsečkou.

Teraz budeme predpokladať, že body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka. Nech S je stred opísanej kružnice tomuto trojuholníku a r jej polomer. Zrejme kruh $(S; r)$ má vlastnosť i). Nech kruh $(S'; r')$ obsahuje body A_1, A_2, A_3 a je rôzny od kruhu $(S; r)$. Kružnice $(S; r)$ a $(S'; r')$ sa musia pretínať v dvoch bodoch X, Y. Tetiva XY nemôže byť priemerom kružnice $(S; r)$. Teda delí kružnicu na dva nerovnaké oblúky. Keby bolo $r' \leqq r$, tak kratší oblúk XY kružnice $(S; r)$ leží v kruhu $(S'; r')$. Keďže body A_1, A_2, A_3 ležia na kružnici $(S; r)$ a v kruhu $(S'; r')$, tak ležia na tomto kratšom oblúku. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod A_2 leží medzi bodmi A_1, A_3. Potom však uhol $A_1A_2A_3$ je tupý, čo je spor s predpokladom. Teda $r' > r$. Ukázali sme, že kruh má aj vlastnosť ii).

Poznámka. Úloha bola tiež úlohou B - I - 4 28. ročníka Matematickej olympiády. Čitateľ môže nájsť iné riešenie úlohy v príslušnej brožúrke.

A - P - 3

Pre každé kladné reálné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(6) \qquad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2.$$

Kedy platí rovnosť?

Riešenie. Nerovnosť (6) dokážeme matematickou indukciou a súčasne ukážeme, že rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Pre $n = 1$ nerovnosť (6) vždy platí:

$$x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 \geqq 1^2.$$

Pre $n = 2$ jednoduchými úpravami dostávame

$$(x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2}{x_1x_2} =$$

$$= 4 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} \geqq 4.$$

Zrejme rovnosť platí práve vtedy, keď $x_1 = x_2$.

Predpokladajme, že platí (6). Označíme $a = x_1 + \ldots + x_n$, $b = \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$.

Potom

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right) =$$

(7)

$$= (a + x_{n+1})\left(b + \frac{1}{x_{n+1}}\right) = ab + bx_{n+1} + a.\frac{1}{x_{n+1}} + 1.$$

Podľa indukčného predpokladu platí

$$ab \geqq n^2,$$

a teda

$$b \geqq \frac{n^2}{a}.$$

Zo (7) dostávame

(8) $$(x_1 + \ldots + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqq$$

$$\geqq n^2 + a\frac{1}{x_{n+1}} + bx_{n+1} + 1.$$

Pritom rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak $ab = n^2$, tj.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{n}{a}\cdot x_{n+1} = \frac{a^2 + n^2\, x^2{}_{n+1}}{nax_{n+1}} =$$

$$= \frac{(a - nx_{n+1})^2 + 2anx_{n+1}}{nax_{n+1}} \geqq 2.$$

Rovnosť platí práve vtedy, keď $a = nx_{n+1}$, tj. $x_{n+1} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Dosadením do (8) dostaneme

$$(x_1 + \ldots + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Pritom rovnosť platí vtedy a len vtedy, keď $ab = n^2$ a $a = nx_{n+1}$, tj. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.

Iné riešenie. Ľavá strana nerovnosti (6) sa dá napísať ako súčet $n + \frac{1}{2}n(n-1)$ sčítancov:

$$\frac{x_1}{x_1} + \ldots + \frac{x_n}{x_n} + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \ldots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right).$$

Zrejme $\frac{x_1}{x_1} = \ldots = \frac{x_n}{x_n} = 1$.

Pre $i \neq j$ dostávame

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} = \frac{(x_i - x_j)^2 + 2x_i x_j}{x_i x_j} \geqq 2.$$

Rovnosť platí práve vtedy, keď $x_i = x_j$.

Teda

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq$$

$$\geqq n.1 + \frac{1}{2}\, n\,(n-1).2 = n^2.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

A - P - 4

Jsou dány konečné množiny M_1, M_2, M_3, M_4. Symbolem $|M|$ označme počet prvků množiny M. Dokažte, že platí

(9) $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| -$
$- |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| -$
$- |M_2 \cap M_4| - |M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| +$
$+ |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| +$
$+ |M_2 \cap M_3 \cap M_4| - |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|$.

Riešenie. Nech m je počet prvkov množiny $M_1 \cup M_2 \cup \cup M_3 \cup M_4$. Rovnosť (9) dokážeme matematickou indukciou podľa m.

Označíme
$a = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|$,
$b = |M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_4| +$
$\quad + |M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_4| + |M_3 \cap M_4|$,

$$c = |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + \\ + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4|,$$
$$d = |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|.$$

Rovnosť (9) je potom ekvivalentná rovnosti

$$m = a - b + c - d. \tag{10}$$

Nech $m = 1$. Potom množina $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ má jediný prvok x, a ten patrí do i množín, $i = 1, 2, 3, 4$. Ľahko vidieť, že platí toto:

Ak $i = 1$ (teda x patrí len do jednej z množín M_1, M_2, M_3, M_4), tak $a = 1$, $b = c = d = 0$ a teda (10) platí.

Ak $i = 2$, tak $a = 2$, $b = 1$, $c = d = 0$ a zase (10) platí.

Ak $i = 3$, tak $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 0$. Potom $1 = 3 - 3 + 1 + 0$ a (10) platí.

Ak $i = 4$, tak $a = 4$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 1$ a zase platí (10).

Predpokladajme, že $m = k + 1$ a (9) platí pre množiny, ktorých zjednotenie má k prvkov. Nech x je ľubovoľný prvok množiny $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$. Označíme

$$\begin{aligned} M_1' &= M_1 - \{x\}, \\ M_2' &= M_2 - \{x\}, \\ M_3' &= M_3 - \{x\}, \\ M_4' &= M_4 - \{x\}. \end{aligned}$$

Ďalej označíme

$$a' = |M'_1| + |M'_2| + |M'_3| + |M'_4|,$$

a podobne b', c', d'.

Podľa indukčného predpokladu platí

$$k = a' - b' + c' - d'. \tag{11}$$

Prvok x patrí do i množín, $i = 1, 2, 3, 4$.

Ak $i = 1$, tak $a = a' + 1$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$ a podľa (11)

$$m = k + 1 = a - b + c - d,$$

tj. platí (10).

Ak $i = 2$, tak $a = a' + 2$, $b = b' + 1$, $c = c'$, $d = d'$ a podľa (11) máme

$$m = k + 1 = k + 2 - 1 = a - b + c - d.$$

Podobne pre $i = 3$ máme $a = a' + 3$, $b = b' + 3$, $c = c' + 1$, $d = d'$. Pre $i = 4$ je $a = a' + 4$, $b = b' + 6$, $c = c' + 4$, $d = d' + 1$. V obidvoch prípadoch pomocou (11) dostávame rovnosť (10).

Poznámka. Tvrdenie úlohy je špeciálnym prípadom všeobecného tvrdenia, ktoré sa nazýva princíp zapojenia a vypojenia alebo princíp inklúzie a exklúzie. Jeho presná formulácia je táto: nech $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sú konečné množiny. Pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ označíme M_T prienik všetkých tých množín M_i, pre ktoré $i \in T$. Potom platí

$$|M_1 \cup \ldots \cup M_n| = \sum_T (-1)^{|T| + 1} . |M_T|, \tag{12}$$

sčitujeme cez všetky neprázdne podmnožiny T množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Špeciálnym prípadom rovnosti (12) je rovnosť (9) alebo jednoduchá rovnosť

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dôkaz rovnosti (12) je rovnaký, ako uvedené riešenie úlohy (jediný rozdiel: $i = 1, 2, \ldots, n$).

Iný dôkaz rovnosti (12) možno urobiť matematickou indukciou podľa n. Stačí si uvedomiť, že každá neprázdna podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$ má jeden z tvarov T, $T \cup \{n + 1\}$, $\{n + 1\}$, kde T je neprázdna podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

A - I - 1

Označme P_A obsah trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a P_B obsah trojúhelníku $B_1B_2B_3$. Jestliže $|A_iA_k| \geqq |B_iB_k|$ pro všechny dvojice indexu 1, 2, 3 a v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ není žádný úhel tupý, pak $P_A \geqq P_B$. Dokažte.

Riešenie. Označíme

$$p_{ik} = \frac{|B_iB_k|}{|A_iA_k|}$$

pre každú dvojicu i, k, $i \neq k$ čísiel 1, 2, 3. Podľa zadania úlohy platí

$$0 < p_{ik} \leqq 1.$$

Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $p_{12} \geqq p_{23}$, $p_{12} \geqq p_{13}$.

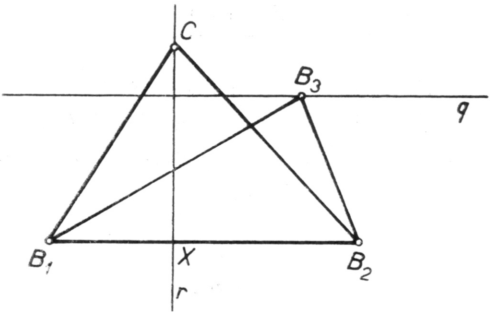
Ľahko zostrojíme bod C ležiaci v tej istej polrovine určenej priamkou B_1B_2 ako bod B_3 a taký, že trojuholníky $A_1A_2A_3$ a B_1B_2C sú podobné. Pre dĺžky ich strán platí

$$|B_1C| = p_{12}\,|A_1A_3|, \ |B_2C| = p_{12}\,|A_2A_3|, \ |B_1B_2| = p_{12}\,|A_1A_2|.$$

Obsah P trojuholníka B_1B_2C je potom

$$P = p_{12}^2 . P_A \leqq P_A.$$

Nech priamka q prechádza bodom B_3 a je rovnobežná s priamkou B_1B_2 a r prechádza bodom C a je kolmá na B_1B_2.



Obr. 34

Priesečník priamok B_1B_2 a r označíme X (obr. 34). Nijaký uhol v trojuholníku $A_1A_2A_3$ nie je tupý, teda ani uhly B_2B_1C a B_1B_2C nie sú tupé. Z toho vyplýva, že bod X leží na úsečke B_1B_2. Nech B'_3 je priesečník priamok q a r.

Uvažujme dve polroviny ϱ a σ určené priamkou r. Nech σ obsahuje bod B_1 a ϱ obsahuje bod B_2. Ak bod B_3 leží v polrovine ϱ, tak $|B_1B_3| \geqq |B_1B_3'|$. Keďže $|B_1B_3| = p_{13}\,|A_1A_3| \leqq$ $\leqq p_{12}\,|A_1A_3|$, tak máme $|B_1B_3'| \leqq |B_1C|$.

Podobne, ak bod B_3 leží v polrovine σ, tak $|B_2B_3| \geqq |B_2B_3'|$. Keďže $|B_2B_3| = p_{23}\,|A_2A_3| \leqq p_{12}\,|A_2A_3|$, tak dostávame $|B_2B_3'| \leqq |B_2C|$.

V obidvoch prípadoch bod B_3' leží na úsečke XC, teda

$$|XB_3'| \leqq |XC|.$$

Obsah P_B je rovnaký ako obsah trojuholníka $B_1B_2B_3'$, a pre ten platí

$$P_B = \frac{1}{2}\,|B_1B_2|\,.\,|XB_3'| \leqq \frac{1}{2}\,|B_1B_2|\,.\,|XC| = P \leqq P_A.$$

A - I - 2

Najděte délky stran konvexního čtyřúhelníku, jehož nejdelší strana má délku 13 cm a nejkratší 3 cm, víte-li, že jeho obsah je 96 cm^2.

Riešenie. Využijeme vzťah (1) dokázaný v úlohe A - P - 1. Máme dve možnosti: buď najkratšia a najdlhšia strana sú priľahlé, alebo protiľahlé. Použijeme označenia z riešenia úlohy A - P - 1.

Uvažujme najprv prípad, že najkratšia a najdlhšia strana sú priľahlé. Označíme ich a, b. Potom platí

$$13 = b \geqq c \geqq a = 3,$$

$$13 = b \geqq d \geqq a = 3.$$

Keby bolo $c < 13$ alebo $d < 13$ alebo $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \neq 0$, tak podľa (1′) by platilo

$$P^2 = \frac{1}{16}(-3 + 13 + c + d)(3 - 13 + c + d) .$$

$$.(3 + 13 - c + d)(3 + 13 + c - d) - 39cd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}(10 + c + d)(-10 + c + d)(16 - c + d) .$$

$$\cdot (16 + c - d) - 39cd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{1}{16}((c + d)^2 - 10^2) .$$

$$\cdot (16^2 - (c - d)^2) - 39cd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} < \frac{1}{16}(26^2 - 10^2) . 16^2 =$$

$$= 96^2.$$

Podľa podmienky úlohy má byť $P = 96$, a teda nutne $c = d = 13$ a $\alpha + \gamma = \pi$.

Podobne postupujeme v prípade, ak najdlhšia a najkratšia strana sú protiľahlé. Označíme najkratšiu stranu $a = 3$ a najdlhšiu $c = 13$. Potom platí

$$a = 3 \leqq b \leqq c = 13,$$

$$a = 3 \leqq d \leqq c = 13.$$

Podľa (1′) dostaneme podobne ako vyššie

$$P^2 = \frac{1}{16}((b+d)^2 - 10^2)(16^2 - (b-d)^2) -$$

$$- 39bd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Keby bolo $b < 13$ alebo $d < 13$ alebo $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \neq 0$, tak platí

$$P^2 < \frac{1}{16}(26^2 - 10^2) . 16^2 = 96^2.$$

Keďže $P = 96$, tak z uvedeného vyplýva, že $b = 13$, $d = 13$ a $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, tj. $\alpha + \gamma = \pi$.

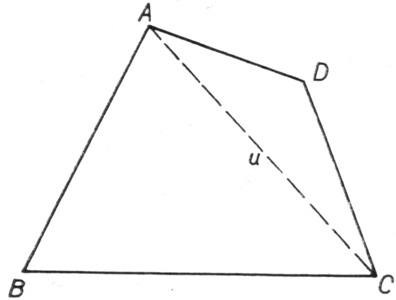
Zistili sme, že podmienke úlohy vyhovuje jediné tetivový štvoruholník o stranách 3, 13, 13, 13.

Iné riešenie. Tetivový konvexný štvoruholník o stranách a, b, c, d má podľa vzťahu (1) dokázanom v úlohe A - P - 1 obsah 96.

Ukážeme, že je to jediný štvoruholník, ktorý vyhovuje podmienke úlohy. Kvôli zjednodušeniu našich úvah je užitočné dohodnúť sa na jednom pojme. Budeme hovoriť, že štvoruholník má vlastnosť **Q**, ak je konvexný, jeho najkratšia strana má dĺžku 3 a najdlhšia strana má dĺžku 13. Najprv dokážeme pomocné tvrdenie: ak štvoruholník s vlastnosťou **Q** nemá tri strany dĺžky 13, tak existuje štvoruholník s vlastnosťou **Q**, ktorý má od neho väčší obsah.

Dokážeme pomocné tvrdenie. Uvažujme štvoruholník $ABCD$ s vlastnosťou **Q**, ktorý nemá tri strany dĺžky 13. Nech a, b, c, d sú dĺžky strán DA, AB, BC, CD. Môžeme predpokladať, že DA je najkratšia strana, tj. $a = 3$. Keďže štvoruholník $ABCD$ nemá tri strany dĺžky 13, tak jedna zo strán AB, BC, CD je kratšia ako 13 (a jedna je 13). Zrejme stačí uvažovať prípady i) $b < 13$, $c = 13$ a ii) $b = 13$, $c < 13$.

Označíme u dĺžku úsečky AC (pozri obr. 35). Ľahko vidieť, že $u < 13 + 13$ (lebo $u < 3 + d \leqq 3 + 13$). Teda môžeme zostrojiť trojuholník ACB' o stranách u, 13, 13 a taký, že



Obr. 35

bod B' leží v tej istej polrovine určenej priamkou AC ako bod B. Ľahko vidieť, že štvoruholník $AB'CD$ má vlastnosť **Q** a obsah väčší ako štvoruholník $ABCD$ (lebo má väčšiu stranu AB v prípade i) a väčšiu stranu BC v prípade ii)). Tým je pomocné tvrdenie dokázané.

Predpokladajme, že štvoruholník $ABCD$ má vlastnosť **Q**. Ak dĺžky jeho strán sú 3, 13, 13, 13, tak pre jeho obsah podľa úlohy A - P - 1 platí

$$P^2 = \frac{1}{16} . 36 . 16 . 16 . 16 - 3 . 13^3 \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} =$$

$$= 96^2 - 3 . 13^3 \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} .$$

Ak $P = 96$, tak nutne $\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} = 0$, teda $\alpha + \gamma = \pi$. To ale znamená, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Naviac, ak je netetivový, tak jeho obsah je menší ako 96.

Podľa pomocného tvrdenia, ak štvoruholník má vlastnosť **Q** a nemá tri strany dĺžky 13, tak existuje štvoruholník s vlastnosťou **Q** o stranách 3, 13, 13, 13 a s väčším obsahom.

Z uvedeného vyplýva, že jediný štvoruholník vyhovujúci podmienke úlohy je tetivový o stranách 3, 13, 13, 13.

A - I - 3

V rovině je dána konečná množina bodů. Každý z nich je označen právě jednou ze tří barev, a přitom je každá barva použita alespoň pro jeden bod. Dokažte, že existuje kruh, ktorý obsahuje po jednom bodu dvou barev a alespoň jeden bod třetí barvy.

Riešenie. Označíme L danú konečnú množinu bodov. Zrejme existuje kruh, ktorý obsahuje všetky body množiny L. Ľahko vidieť, že existuje kruh K_0 s týmito dvomi vlastnosťami:

i) kruh K_0 obsahuje aspoň jeden bod každej farby;

ii) ak kruh K je taký, že $K \cap L$ má menej prvkov ako $K_0 \cap L$, tak K neobsahuje body všetkých troch farieb.

Ukážeme, že kruh K_0 je hľadaný kruh, tj. obsahuje len po jednom bode dvoch farieb.

K dôkazu potrebujeme pomocné konštrukcie. Ak kruh K má stred S a polomer r, tak jeho hranica $h(K)$ je kružnica so stredom S a polomerom r.

Uvažujme kruh $K = (S;\ r)$. Nech r' je najväčšie z čísiel $|SX|$, $X \in K \cap L$. Potom $r' \leqq r$. Ak $K' = (S;\ r')$, tak zrejme platí $K' \cap L = K \cap L$ a existuje bod množiny L na hranici $h(K')$. Teda v ďalšom bez újmy na všeobecnosti môžeme vždy predpokladať, že $h(K) \cap L \neq \emptyset$.

Dokážeme teraz *prvé pomocné tvrdenie*:
Ak $K \cap L$ má aspoň dva prvky, tak existuje kruh K' taký, že $K \cap L = K' \cap L$ a $h(K') \cap L$ má aspoň dva prvky.

Podľa vyššie uvedeného môžeme predpokladať, že $h(K) \cap \cap L \neq \emptyset$. Nech $A \in h(K) \cap L$, tj. A je bod množiny L ležiaci na hranici kruhu K.

Ak bod X patrí do kruhu K, $X \neq A$, tak označíme S_X priesečník osi súmernosti úsečky AX s priamkou AS. Ľahko vidieť, že bod S_X leží na úsečke AS. Nech $X_0 \in K \cap L$, $X_0 \neq A$ je taký, že pre každé $X \in K \cap L$, $X \neq A$ platí

$|S_{X_0}S| \leqq |S_X S|$. Existencia takého bodu X_0 vyplýva z toho, že množina $K \cap L - \{A\}$ je konečná a neprázdna (lebo $K \cap L$ má aspoň dva body). Nech $S' = S_{X_0}$ a $r' = |S_{X_0}A|$. Ukážeme, že $K' = (S', r')$ má požadovanú vlastnosť.

Zrejme $K' \subseteq K$ a teda $K' \cap L \subseteq K \cap L$. Ak $X \in K \cap L$, tak buď $X = A$ alebo $X \neq A$. Zrejme $A \in K'$. Ak $X \neq A$, tak $|S_{X_0}X| \leqq |S_{X_0}S_X| + |S_X X|$. Ale $|XS_X| = |S_X A|$ a $|S_{X_0}S_X| + |S_X A| = r'$. Teda $X \in K'$. Zrejme $|S_{X_0}X_0| = r'$ a teda X_0 leží na hranici kruhu K'.

Dokážeme *druhé pomocné tvrdenie*:
Ak $A \in h(K) \cap L$, tak existuje kruh K' taký, že $K' \cap L = K \cap L - \{A\}$.

Nech d je najmenšie z čísiel $|XS|$, kde $X \in L - K$. Potom $d > r$. Na priamke AS zvolíme bod S' taký, aby platilo $|AS| < |AS'| < \frac{d + r}{2}$. Nech r' je najväčšie z čísiel $|XS'|$, $X \neq A$, $X \in L \cap K$ (ak také X neexistuje, tak stačí položiť $r' = r$). Ukážeme, že $K' = (S'; r')$ je hľadaný kruh.

Ak $X \in L \cap K$, $X \neq A$, tak $|S'X| < |SX| + |SS'| \leqq |SA| + |SS'| = |S'A|$. Z toho vyplýva, že $|S'A| > r'$, a teda A nepatrí do K'.

Nech $X \in L \cap K'$. Potom $|XS| \leqq |XS'| + |S'S| \leqq r' + |S'S| < |S'A| + |S'S| \leqq d$. Z definície čísla d vyplýva, že $X \in K$. Ukázali sme, že $L \cap K' \subseteq L \cap K - \{A\}$.

Naopak, nech $X \in L \cap K$, $X \neq A$. Potom podľa definície čísla r' je $|XS'| \leqq r'$ a teda $X \in L \cap K'$.

Tým je druhé pomocné tvrdenie dokázané.

Dokážeme teraz, že kruh K_0 je hľadaný kruh. Budeme dokazovať sporom. Predpokladáme, že kruh K_0 obsahuje aspoň po dva body dvoch farieb, napr. aspoň dva body prvej farby a aspoň dva body druhej farby. Podľa prvého pomocného tvrdenia môžeme predpokladať, že na hranici $h(K_0)$ ležia aspoň dva body množiny L. Označíme ich A, B. Buď sú obidva tretej farby, alebo aspoň jeden z nich, povedzme A, je jednej z prvých dvoch farieb. V obidvoch prípadoch existuje v $L \cap K_0$ bod $X \neq A$, ktorý je rovnakej farby ako bod A. Podľa druhého pomocného tvrdenia existuje kruh K taký, že $K \cap L = K_0 \cap L - \{A\}$. Kruh K obsahuje body všetkých troch farieb, a to je spor s vlastnosťou ii) kruhu K_0.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj mnohými inými postupmi. Napríklad vhodnou kruhovou inverziou možno úlohu previesť na hľadanie polroviny ϱ, ktorá obsahuje po jednom bode dvoch farieb a aspoň jeden bod tretej farby. Nájsť takú polrovinu ϱ je jednoduchšie.

A - I - 4

Pre každé kladné reálne čísla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq \frac{4n^2}{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \tag{13}$$

Dokážte. Kedy platí rovnosť?

Riešenie. Nerovnosť (13) je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq 4n^2. \tag{14}$$

Zrejme platí

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Teda

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + $$
$$+ 2 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq 4 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Rovnosť platí vtedy a len vtedy, ak $\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 = 0$, tj. ak $x_k = y_k$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$.

Z uvedenej nerovnosti dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \cdot$$

(15)

Podľa nerovnosti (6) z úlohy A - P - 3 platí

(16) $$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geq n^2.$$

Odtiaľ pomocou (15) už vyplýva nerovnosť (14), a teda aj (13).

Rovnosť v nerovnosti (13) nastáva práve vtedy, keď platí rovnosť v nerovnosti (15) a (16), a to je jedine v prípade $x_1 = y_1 = \ldots = x_n = y_n$.

A - I - 5

Na škole pracuje 64 žiakov v piatich záujmových krúžkoch. Každý krúžok má aspoň 19 členov. Žiaden žiak nepracuje vo viac ako troch krúžkoch, ale každé tri krúžky majú aspoň jedného spoločného člena. Dokážte, že existujú dva krúžky, ktoré majú spoločných aspoň päť členov.

Riešenie. Označíme $K_1, \ldots, K_5$ množiny členov prvého až piateho krúžku. Podľa zadania úlohy žiadne štyri z množín $K_1, \ldots, K_5$ nemajú spoločný prvok.
Označíme $(i, j, l = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$k_i = |K_i|,\ k_{ij} = |K_i \cap K_j|,\ k_{ijl} = |K_i \cap K_j \cap K_l|.$$

Podľa zovšeobecnenia (12) úlohy A - P - 4 platí

$$64 = |K_1 \cup \ldots \cup K_5| = \sum_{i=1}^{5} k_i - \sum_{i<j} k_{ij} + \sum_{i<j<l} k_{ijl}.$$

Zo zadania úlohy vyplýva, že $k_{ijl} \geq 1$, $k_i \geq 19$.

Teda

$$\sum_{i=1}^{5} k_i \geq 5 . 19 = 95,$$

$$\sum_{i<j<l} k_{ijl} \geq \binom{5}{3} . 1 = 10.$$

Teda

$$\sum_{i<j} k_{ij} = \sum_{i=1}^{5} k_i + \sum_{i<j<l} k_{ijl} - 64 \geq 95 + 10 - 64 = 41.$$

Keby bolo každé k_{ij} menšie ako 5, tak

$$\sum_{i<j} k_{ij} \leq \binom{5}{2} . 4 = 10.4 = 40.$$

To však nie je, teda existujú také dva indexy i, j, že $k_{ij} \geq 5$. To ale znamená, že krúžky K_i, K_j majú aspoň päť spoločných členov.

A - I - 6

Riešte sústavu rovníc s neznámymi $x_1, \ldots, x_n$ (c, d sú reálne čísla):

$$(17) \qquad \begin{aligned} -2x_1 \qquad\quad &+ x_2 = c, \\ x_1 - 2x_2 \qquad &+ x_3 = c, \\ &\vdots \\ x_{n-2} - 2x_{n-1} &+ x_n = c, \\ x_{n-1} - 2x_n \qquad &+ d \;= c. \end{aligned}$$

Riešenie. Zo zadania úlohy vyplýva, že $n \geq 2$. Označíme $x_{n+1} = d$. Ak sčítame prvých l rovníc sústavy (17), tak dostaneme rovnice

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_1 + x_2 &= c, \\
-x_1 - x_2 + x_3 &= 2c, \\
&\vdots \\
-x_1 - x_l + x_{l+1} &= lc, \\
&\vdots \\
-x_1 - x_n + x_{n+1} &= nc.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Spočítaním prvých k rovníc (18) dostaneme pre $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$:

$$
-(k+1)\,x_1 + x_{k+1} = \frac{1}{2}\,k\,(k+1)\,c. \tag{19}
$$

Pre $k = n$ odtiaľ vyplýva

$$
x_1 = \frac{d}{n+1} - \frac{1}{2}\,nc.
$$

Pomocou (19) dostaneme

$$
x_k = \frac{1}{2}\,k\,(k-1)\,c + \frac{k}{n+1}\,d - \frac{k}{2}\,nc = \frac{1}{2}\,k\,(k-1-n)\,c + \frac{k}{n+1}\,d
$$

pre $k = 1, 2, \ldots, n$.

Skúškou ľahko zistíme, že čísla

$$x_k = \frac{1}{2} k (k - 1 - n) c + \frac{k}{n + 1} d, \ k = 1, 2, \ldots, n$$

sú riešenia sústavy rovníc (17).

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

A - II - 1

Určete všechny n-tice reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} x_1^2 - 3x_1 + 4 &= x_2 \\ x_2^2 - 3x_2 + 4 &= x_3 \\ &\vdots \\ x^2_{n-1} - 3x_{n-1} + 4 &= x_n \\ x_n^2 - 3x_n + 4 &= x_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Riešenie. Ľahko vidieť, že n-tica 2, 2, ..., 2 je riešením sústavy (20). Ukážeme, že je to jediné riešenie tejto sústavy.

Nech $y = x^2 - 3x + 4$. Z jednoduchej identity

$$y - x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

vyplýva, že pre $x \neq 2$ platí $y > x$.

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je riešenie sústavy (20). Ak niektoré x_i je rovné 2, potom z i-tej rovnice sústavy (20) vyplýva, že $x_{i+1} = 2$, a z poslednej rovnice vyplýva $x_1 = 2$. Podľa prvej rovnice je potom aj $x_2 = 2$ atď. Úhrnom: ak niektoré $x_i = 2$, tak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 2$.

Predpokladajme teraz, že $x_1 \neq 2$. Potom aj $x_2 \neq 2, \ldots, \ldots x_n \neq 2$. Podľa vyššie uvedeného však platí

$$\begin{gathered} x_1 < x_2, \\ x_2 < x_3, \\ \vdots \\ x_{n-1} < x_n, \\ x_n < x_1, \end{gathered}$$

čo je spor.

Teda n-tica 2, 2, ..., 2 je jediné riešenie sústavy (20).

Iné riešenie. Sústavu (20) upravíme na ekvivalentnú sústavu

$$\begin{gathered} x_1^2 - 4x_1 + 4 = x_2 - x_1 \\ x_2^2 - 4x_2 + 4 = x_3 - x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} + 4 = x_n - x_{n-1} \\ x_n^2 - 4x_n + 4 = x_1 - x_n. \end{gathered} \tag{20'}$$

Ak spočítame tieto rovnice, po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \ldots + (x_n - 2)^2 = 0.$$

Riešením tejto rovnice je jediná n-tica čísiel 2, 2, ..., 2.

Skúškou zistíme, že táto n-tica je aj riešením sústavy (20).

A - II - 2

Najděte všechny konvexní čtyřúhelníky, pro které je součet délek dvou stran roven 6, součet délek zbývajících dvou stran je 8 a obsah je 12.

Riešenie. Musíme uvažovať dve možnosti:

a) súčet dĺžiek dvoch priľahlých strán je rovný 6;

b) súčet dĺžiek dvoch protiľahlých strán je rovný 6.

Uvažujme prípad a). Použijeme vzorec (1′) z úlohy A - P - 1. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

$$a + b = 6,$$
$$c + d = 8.$$

Potom podľa vzorca (1′) platí

$$12^2 = \frac{1}{16}(-a + b + 8)(a - b + 8)(6 - c + d)$$

$$(6 + c - d) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2},$$

a teda

$$12^2 = \frac{1}{16}(8^2 - (a - b)^2)(6^2 - (c - d)^2) - abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Číslo na pravej strane tejto rovnosti je vždy menšie alebo rovné číslu

$$\frac{1}{16}.8^2.6^2 = \frac{1}{4^2}.8^2.6^2 = 2^2.6^2 = 12^2.$$

Teda musí platiť rovnosť, a tá zrejme nastáva jedine v prípade

$$a - b = 0,\ c - d = 0 \text{ a } \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0.$$

Z toho vyplýva, že $a = b = 3$, $c = d = 4$ a $\alpha + \gamma = \pi$. Tento štvoruholník (deltoid) je riešením úlohy.

V prípade b) dostaneme podobnou úpravou (teraz $a + c = 6$, $b + d = 8$):

$$12^2 = \frac{1}{16}(8^2 - (a-c)^2)(6^2 - (b-d)^2) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

a teda $a = c = 3$, $b = d = 4$ a $\alpha + \gamma = \pi$. Tento štvoruholník (obdĺžnik) je tiež riešením úlohy.

Úhrnom, riešením úlohy sú dva konvexné štvoruholníky: deltoid o stranách 3,4 a obdĺžnik o stranách 3,4.

A - II - 3a

Trojúhelník o stranách a, b, c má obsah P a trojúhelník o stranách u, v, w má obsah Q. Dokažte, že pak platí

$$\begin{aligned} (21)\qquad & a^2(-u^2 + v^2 + w^2) + b^2(u^2 - v^2 + w^2) + \\ & + c^2(u^2 + v^2 - w^2) \geq 16\,PQ. \end{aligned}$$

Pro které trojúhelníky platí rovnost?

Riešenie. Označíme γ uhol v prvom trojuhelníku ležiaci proti strane c a φ bude uhol v druhom trojuholníku proti strane w. Potom platí

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

$$Q = \frac{1}{2} uv \sin \varphi.$$

Podľa kosínusovej vety platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$
$$u^2 + v^2 - w^2 = 2uv \cos \varphi.$$

Pomocou týchto štyroch identít nerovnosť (21) prepíšeme na ekvivalentný tvar

$$a^2 (2v^2 - 2uv \cos \varphi) + b^2 (2u^2 - 2uv \cos \varphi) +$$
$$+ (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) 2uv \cos \varphi \geq 4abuv \sin \gamma \sin \varphi.$$

Úpravou dostaneme nerovnosť

$$2 (a^2v^2 + b^2u^2) - 4abuv (\cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi) \geq 0.$$

Použitím vzorca pre kosínus rozdielu a jednoduchou úpravou získame nerovnosť

$$(av - bu)^2 + 2abuv (1 - \cos (\gamma - \varphi)) \geq 0, \tag{22}$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou (21).

Pretože $\cos (\gamma - \varphi) \leqq 1$, tak nerovnosť (22) vždy platí. Tým sme dokázali nerovnosť (21).

V nerovnosti (22) platí rovnosť vtedy a len vtedy, keď obidva sčítance sú rovné nule, tj.

$$av = bu$$

a

$$\cos(\gamma - \varphi) = 1.$$

To nastáva v prípade $\gamma = \varphi$ a $a : b = u : v$, tj. v prípade, keď trojuholníky sú podobné a a, b, c a u, v, w sú odpovedajúce si strany.

A - II - 3b

Nech k, m, n sú prirodzené čísla. Potom číslo

$$1^m + 2^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m$$

je deliteľné číslom n^{k-1}. Dokážte.

Riešenie. Označíme

$$L_k = 1^m + 2^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m.$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé k je číslo L_k deliteľné číslom n^{k-1}.

Pretože $n^{1-1} = n^0 = 1$, tak pre $k = 1$ tvrdenie zrejme platí.

Predpokladáme, že L_k je deliteľné číslom n^{k-1}. Upravíme výraz pre L_{k+1} takto:

$$
\begin{aligned}
& L_{k+1} = 1^m + 2^m + \ldots + (n^k)^m + \\
& + (n^k + 1)^m + \ldots + (n^k + n^k)^m + \\
(23) \qquad & + \qquad \vdots \\
& + ((n-1)\,n^k + 1)^m + \ldots + ((n-1)\,n^k + n^k)^m
\end{aligned}
$$

Podľa binomickej vety platí

$$(jn^k + i)^m = i^m + i^{m-1}.jn^k\binom{m}{1} + \ldots + i^0.(jn^k)^m\binom{m}{m}.$$

Označíme

$$A_{ij} = i^{m-1}.j\binom{m}{1} + i^{m-2}.j^2(n^k)^1.\binom{m}{2} + \ldots + i^0.j^m(n^k)^{m-1}\binom{m}{m}.$$

Teda

$$(jn^k + i)^m = i^m + A_{ij}.n^k.$$

Súčet v $(j+1)$-om riadku výrazu (23) potom bude

$$
\begin{aligned}
(jn^k + 1)^m + \ldots + (jn^k + n^k)^m &= 1^m + \ldots + (n^k)^m + \\
&+ n^k(A_{1j} + \ldots + A_{n^kj}) = L_k + n^k.B_j,
\end{aligned}
$$

kde

$$B_j = A_{1j} + \ldots + A_{n^kj}.$$

Úhrnom z (23) dostaneme

$$
\begin{aligned}
L_{k+1} = L_k + (L_k + n^kB_1) + \ldots + \\
+ (L_k + n^kB_{n-1})
\end{aligned}
$$

a teda

$$L_{k+1} = nL_k + n^k (B_1 + \ldots + B_{n-1}). \tag{24}$$

Ľahko vidieť, že $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ sú prirodzené čísla. Podľa indukčného predpokladu, číslo L_k je deliteľné číslom n^{k-1}. Z vyjadrenia (24) vyplýva, že číslo L_{k+1} je deliteľné číslom n^k.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Dokažte, že pro každé celé nezáporné číslo k je součin $(k + 1)(k + 2) \ldots (k + 1980)$ dělitelný číslem 1980^{197}.

Riešenie. Rozložíme číslo 1980 na súčin mocnín prvočísiel:

$$1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11.$$

Stačí ukázať, že súčin

$$S_k = (k + 1)(k + 2) \ldots (k + 1980)$$

je deliteľný číslami $2^{2 \cdot 197}$, $3^{2 \cdot 197}$, 5^{197} a 11^{197}.

Ľahko vidieť, že S_k je deliteľný číslom 2^{990} (lebo každé druhé číslo je párne), a teda aj číslom $2^{2 \cdot 197}$. Podobne S_k je deliteľné $3^{1980:3} = 3^{660}$, a teda aj číslom $3^{2 \cdot 197}$. Keďže $5.197 < < 1980$, každé piate číslo je deliteľné číslom 5, tak S_k je deliteľné číslom 5^{197}.

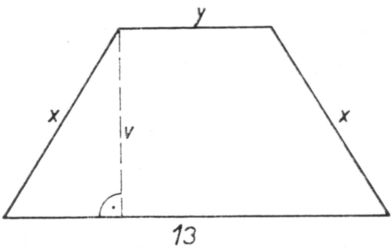
Z čísiel $k + 1, k + 2, \ldots, k + 1980$ je práve $1980 : 11 = = 180$ deliteľné číslom 11. Niektoré však môžu byť deliteľné aj číslom 11^2. Keďže $16.11^2 = 1936 < 1980$, tak aspoň 16 z týchto čísiel je deliteľné číslom 11^2. Ale aj $11^3 = 1331$ je menšie ako 1980. Teda aspoň jedno z čísiel $k + 1, \ldots, k + + 1980$ je deliteľné treťou mocninou čísla 11. Z uvedeného vyplýva, že S_k je deliteľné číslom

$$11^{180+16+1} = 11^{197}.$$

To sme chceli dokázať.

A - III - 2

Najděte velikosti stran rovnoramenného lichoběžníku, který má nejdelší stranu 13 cm, obvod 28 cm a obsah 27 cm². Existuje takový lichoběžník, předepíšeme-li obsah 27,001 cm²?



Obr. 36

Riešenie. Zo zadania úlohy jednoducho vyplýva, že najdlhšou stranou musí byť väčšia základňa.

Označíme dĺžku ramena x a dĺžku kratšej základne y. Zo zadania úlohy potom vyplývajú rovnice (pozri obr. 36):

$$(25) \qquad \begin{aligned} 2x + y + 13 &= 28 \\ \frac{13 + y}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{13 - y}{2}\right)^2} &= 27. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme y:

$$y = 15 - 2x$$

a dosadíme do druhej rovnice. Po úprave dostaneme

$$(14 - x) . \sqrt{2x - 1} = 27,$$

a teda

$$(26) \qquad (14 - x)^2 (2x - 1) = 27^2.$$

Keďže y je kratšia základňa, tak $y \leqq 13$, a teda $x \geqq 1$. Z prvej rovnice (25) vyplýva, že $2x < 15$. Úhrnom

$$(27) \qquad 1 \leqq x < \frac{15}{2} .$$

Potrebujeme nájsť všetky riešenia rovnice (26) vyhovujúce podmienke (27).

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom kladných čísiel

$$u \, . \, v \, . \, w \leqq \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3$$

máme (podľa (27) čísla $14 - x$, $2x - 1$ sú kladné):

$$(14 - x)^2 (2x - 1) \leqq \left(\frac{14 - x + 14 - x + 2x - 1}{3}\right)^3 =$$

(28) $$= 9^3 = 27^2.$$

Rovnosť nastáva jedine v prípade $14 - x = 2x - 1$, tj. pre $x = 5$. Teda jediné riešenie rovnice (26) je $x = 5$.

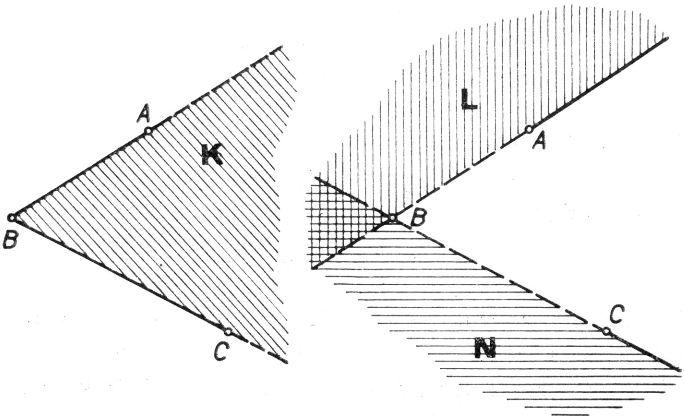
Z uvedeného vyplýva, že existuje jediný lichobežník vyhovujúci podmienkám úlohy a to je lichobežník o stranách 13, 5, 5, 5.

Z nerovnosti (28) vyplýva, že obsah lichobežníka s najdlhšou stranou 13 a obvodom 28 je menší alebo rovný 27. Teda neexistuje lichobežník s uvedenými vlastnosťami a obsahom 27,001.

Poznámka. Rovnicu (26) možno riešiť aj tak, že pomocou diferenciálneho počtu vyšetríme priebeh funkcie $y = (14 - x)^2 \, . \, (2x - 1)$ a zistíme, že v intervale $\langle 1, 15/2)$ má jediné maximum v bode $x = 5$.

A - III - 3

Množina **M** vznikla z roviny vyjmutím tří bodů A, B, C, které jsou vrcholy trojúhelníka. Jaký je nejmenší počet konvexních množin, jejichž sjednocením je **M**?



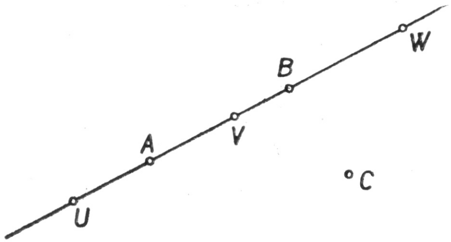
Obr. 37

Riešenie. Ukážeme, že najmenší počet konvexných množín, ktorých zjednotenie je množina **M**, je tri. K tomu je potrebné dokázať dve tvrdenia: i) množina **M** sa dá vyjadriť ako zjednotenie troch konvexných množín a ii) množina **M** sa nedá vyjadriť ako zjednotenie dvoch konvexných množín.

Dokážeme najprv tvrdenie i), a to tak, že zostrojíme tri konvexné množiny **K**, **L**, **N** také, že $\mathbf{M} = \mathbf{K} \cup \mathbf{L} \cup \mathbf{N}$.

Nech **K** je množina všetkých bodov, ktoré ležia vnútri uhla ABC alebo vnútri úsečiek AB, BC (pozri obr. 37). Nech **L** je množina všetkých bodov, ktoré ležia mimo polroviny ABC alebo na polpriamke opačnej k polpriamke AB (okrem bodu A). Podobne nech **N** je množina všetkých bodov, ktoré ležia mimo polroviny BCA alebo na polpriamke opačnej k polpriamke CB (okrem bodu C). Ľahko vidieť, že **K**, **L**, **N** sú konvexné množiny a že ich zjednotenie je množina **M**.

Dokážeme teraz tvrdenie ii) sporom. Predpokladajme, že množina **M** sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch konvexných množín **P**, **Q**. Na priamke AB zvolíme tri rôzne body U, V, W také, že bod A leží vnútri úsečky UV a bod B leží vnútri úsečky VW (pozri obr. 38). Body U, V, W patria do množiny



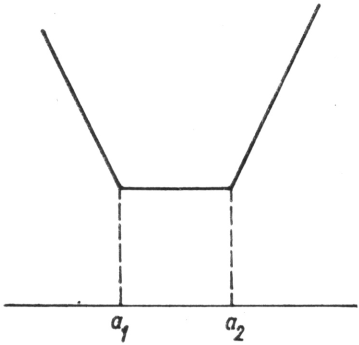
Obr. 38

M a teda aj do zjednotenia $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$. Potom niektorá z množín **P**, **Q** musí obsahovať dva z týchto troch bodov. Nech je to množina **P**. Môžu nastať tri prípady: a) $U, V \in \mathbf{P}$, b) $U, W \in \mathbf{P}$ a c) $V, W \in \mathbf{P}$. Keďže množina **P** je konvexná, tak v prípade a) a b) máme $A \in \mathbf{P}$ a v prípade c) máme $B \in \mathbf{P}$. To je však spor s tým, že $A, B \notin \mathbf{M}$.

A - III - 4

Nech $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sú reálne čísla, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$, n párne. Nájdite minimum tejto funkcie.

Riešenie. Pre $n = 2$ ľahko zistíme priebeh funkcie f a zostrojíme jej graf (pozri obr. 39):



Obr. 39

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 + a_2 - 2x && \text{pre } x < a_1 \\ f(x) &= a_2 - a_1 && \text{pre } a_1 \leqq x \leqq a_2, \\ f(x) &= 2x - (a_1 + a_2) && \text{pre } x > a_2. \end{aligned}$$

Ak $x < a_1$, tak $a_1 + a_2 - 2x > a_1 + a_2 - 2a_1 = a_2 - a_1$. Podobne ak $x > a_2$, tak $2x - (a_1 + a_2) > 2a_2 - (a_1 + a_2) = a_2 - a_1$. Z toho vyplýva, že funkcia f nadobúda svojho minima $a_2 - a_1$ v každom bode intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$.

Ak n je ľubovoľné párne prirodzené číslo, $n = 2k$, tak hodnotu funkcie f v bode x vieme vyjadriť ako súčet hodnôt k funkcií:

$$f(x) = (|x - a_1| + |x - a_n|) + (|x - a_2| + |x - a_{n-1}|) + \ldots$$
$$\ldots + (|x - a_k| + |x - a_{k+1}|).$$

Každá z funkcií $|x - a_i| + |x - a_{n+1-i}|$ nadobúda svoje minimum $a_{n+1-i} - a_i$ na intervale $\langle a_i, a_{n+1-i}\rangle$. Pre tieto intervaly platí

$$\langle a_1, a_{n-1}\rangle \supseteqq \langle a_2, a_{n-2}\rangle \supseteqq \ldots \supseteqq \langle a_k, a_{k+1}\rangle.$$

Teda funkcia f nadobúda svoje minimum na najmenšom z týchto intervalov $\langle a_k, a_{k+1}\rangle$ a hodnota tohoto minima je číslo

$$\sum_{i=1}^{k} (a_{k+i} - a_i).$$

A - III - 5

Riešte v obore celých čísiel sústavu nerovníc

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yz &\leqq 1 + y^2 \\ 3y^2 + 2zx &\leqq 1 + z^2 \\ 3z^2 + 2xy &\leqq 1 + x^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Riešenie. Ak spočítame všetky tri nerovnice, po jednoduchej úprave dostaneme nerovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 \leqq 3. \tag{30}$$

Každé riešenie sústavy nerovníc (29) je aj riešením nerovnice (30). Ak x, y, z je celočíselné riešenie nerovnice (30), tak nutne $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$, tj. $x, y, z = -1, 0, 1$. Ak

$|x| = 1$, tak podľa prvej nerovnice (29) je $2yz \leqq 1 - 3 + y^2 \leqq -2 + 1 = -1$. Teda $yz = -1$. Potom však $|y| = |z| = 1$ a z druhej a tretej nerovnice (29) podobným spôsobom dostaneme $xz = -1$ a $xy = -1$. To však nie je možné, lebo potom by bolo

$$x^2y^2z^2 = xy \,.\, xz \,.\, yz = (-1)^3 = -1.$$

Teda $x = 0$. Podobne sa zistí, že musí byť $y = z = 0$. Skúškou ľahko overíme, že 0, 0, 0 je jediným celočíselným riešením sústavy nerovníc (29).

A - III - 6

Nech $\mathbf{M}$ je množina piatich bodov v priestore, z ktorých žiadne štyri neležia v rovine. Nech je ďalej $\mathbf{R}$ množina siedmich rovín s vlastnosťami:

a) Každá rovina z množiny $\mathbf{R}$ obsahuje aspoň jeden bod množiny $\mathbf{M}$.

b) Žiadny z bodov množiny $\mathbf{M}$ neleží v piatich rovinách množiny $\mathbf{R}$.

Dokážte, že existujú také dva rôzne body P, Q, $P \in \mathbf{M}$, $Q \in \mathbf{M}$, že priamka PQ nie je priesečnicou žiadnych dvoch rovín z množiny $\mathbf{R}$.

Riešenie. Nech $\mathbf{M} = \{A_1, \ldots, A_5\}$. Nech $\mathbf{R}_i$ je množina tých rovín z množiny $\mathbf{R}$, ktoré obsahujú bod A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Nech $\mathbf{R}_{ij}$ je množina tých rovín z množiny $\mathbf{R}$, ktoré obsahujú body A_i, A_j. Teda $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j$. Podobne označíme $\mathbf{R}_{ijk} = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j \cap \mathbf{R}_k$, $\mathbf{R}_{ijkl} = \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j \cap \mathbf{R}_k \cap \mathbf{R}_l$, $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, 5$, $i \neq j, k, l$, $j \neq k, l$, $k \neq l$.

Keďže žiadne štyri body množiny $\mathbf{M}$ neležia v jednej rovine, tak $\mathbf{R}_{ijkl} = \emptyset$ pre $i < j < k < l$. Podľa podmienky b) máme $|\mathbf{R}_i| \leqq 4$ pre $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Číslo $\sum\limits_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}|$ udáva počet rovín, ktoré obsahujú práve tri body množiny $\mathbf{M}$. Keďže každý bod leží najviac v štyroch rovinách množiny $\mathbf{R}$, tak máme

$$3 \,.\, \sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}| \leqq 4.5.$$

Teda

$$\sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}| \leqq 6.$$

Podľa podmienky a) je $\sum\limits_{i=1}^{5} |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{R}|$.

Podľa princípu inklúzie a exklúzie (úloha A - P - 4) máme

$$7 = \sum_{i=1}^{5} |\mathbf{R}_i| - \sum_{i<j} |\mathbf{R}_{ij}| + \sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}|.$$

Z tejto rovnosti vyplýva

$$\sum_{i<j} |\mathbf{R}_{ij}| = \sum_{i=1}^{5} |\mathbf{R}_i| + \sum_{i<j<k} |\mathbf{R}_{ijk}| - 7 \leq 5.4 + 6 - 7 = 19.$$

Keďže $\binom{5}{2} = 10$, tak sčítancov na ľavej strane je 10 a aspoň jeden musí byť menší ako 2. Teda existuje dvojica $i < j$ taká, že $|\mathbf{R}_{ij}| \leq 1$. Body A_i, A_j ležia teda najviac v jednej rovine z množiny $\mathbf{R}$, t.j. priamka A_iA_j nie je priesečníkom dvoch rovín z množiny $\mathbf{R}$.