28. ročník matematické olympiády

Korespondenční seminář MO

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 28. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. pp. 146–152.

Korespondenční seminář MO

Cílem korespondenčního semináře bylo dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů MO, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy a neměli tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na MMO. K účasti bylo prostřednictvím ÚV MO na základě výsledků v MO a návrhů KV MO pozváno 35 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo 25. Pravidelně jim byla rozesílána série poměrně náročných úloh, které měli během 5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla pak opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Uvádíme znění všech úloh v korespondenčním semináři zadaných.

1. Nerovnosti

11. Dokážte, že pre kladné čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqq ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ac\,(a + c)\,.$$

12. Nech α, β, γ sú uhly ostrouhlého trojuholníka. Ak $\alpha < \beta < \gamma$, potom $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$; dokážte!

13. Súčet druhých mocnín piatich reálnych čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 je 1. Dokážte, že najmenšia z hodnôt

$(a_i - a_j)^2$ pre $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$ nie je väčšia ako $\frac{1}{10}$.

14. Nájdite celú časť čísla

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1\,000\,000}.$$

15. Na jednotkovej kružnici, v prvom kvadrante, sú dané také oblúky $\overset{\frown}{AM_1} = X_1, \overset{\frown}{AM_2} = X_2, \ldots, \overset{\frown}{AM_k} = X_k$, $A \equiv (1, 0)$, že $X_1 < X_2 < \ldots < X_k$. Dokážte, že

$$\sin 2X_1 + \sin 2X_2 + \ldots + \sin 2X_{k-1} - \sin(X_1 - X_2) - \sin(X_2 - X_3) - \ldots - \sin(X_{k-1} - X_k) < \frac{\pi}{2} + \sin(X_1 + X_2) + \sin(X_2 + X_3) + \ldots + \sin(X_{k-1} + X_k).$$

16. Dokážte, že pre ľubovolné kladné čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}.$$

17. Nech $x_0 = 5$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Potom $45 < x_{1000} < 45{,}1$; dokážte!

21. Je dán pravidelný 25-úhelník $A_1A_2 \dots A_{25}$ se středem O. Z vektorů $\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \dots, \mathbf{OA}_{25}$ jich vyberte několik tak, aby velikost součtu vybraných vektorů byla co největší. Určete tuto maximální velikost.

22. V konvexním n-úhelníku jsou sestrojeny všechny úhlopříčky, a dělí ho tak na mnohoúhelníčky. Určete maximální možný počet stran mnohoúhelníčku.

23. Obdélníkové pole o rozměrech 300×400 je rozděleno pěšinami na čtverce 100×100, po obvodu pole vedou také pěšiny. Po pěšině jde chodec rychlostí v, přes pole rychlostí u. Poraďte chodci, jak se dostane z jednoho rohu pole do opačného rohu nejrychleji, a určete, za jak dlouho.

24. Je dáno n jednotkových úseček v rovině tak, že mají společný bod a jejich koncové body jsou vrcholy $2n$-úhelníku. Dokažte, že alespoň jedna jeho strana není menší než strana pravidelného $2n$-úhelníku vepsaného do kružnice o průměru 1.

25. Do daného trojúhelníku vepište trojúhelník s co nejmenším obvodem. (Uvnitř každé strany daného trojúhelníku leží jediný vrchol vepsaného trojúhelníku.)

26. Mezi všemi trojúhelníky vepsanými do dané kružnice najděte ten, který má největší součet čtverců stran.

27. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku označme R, vepsané r. Dokažte, že $R \geqq 2r$. Pro které trojúhelníky platí rovnost? Dokažte, že pro každá dvě čísla $R \geqq 2r$ existuje příslušný trojúhelník.

3. Mnohočleny

31. Součin dvou mnohočlenů s celými koeficienty má všechny koeficienty dělitelné pěti. Dokažte, že alespoň jeden z mnohočlenů má všechny koeficienty dělitelné pěti.

32. Je dáno číslo $a \neq 0$ a nenulový mnohočlen $P(x)$. Dokažte, že mnohočlen $(x - a)^n P(x)$ má alespoň $n + 1$ nenulových koeficientů.

33. Je dán mnohočlen 7. stupně s komplexními koeficienty. Leží-li v rovině komplexních čísel všechny jeho kořeny uvnitř (ne na hranici) úhlu velikosti 60° s vrcholem v počátku, jsou všechny jeho koeficienty nenulové. Dokažte.

34. Najděte nejmenší reálné číslo a, které má následující vlastnost: Pro každý mnohočlen $f(x)$ druhého stupně, pro který $|f(x)| \leqq 1$ pro všechna $0 \leqq x \leqq 1$, platí $f'(0) \leqq a$.

35. Napište mnohočlen $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jako rozdíl čtverců dvou mnohočlenů různého stupně s reálnými koeficienty.

36. Buď r přirozené číslo. Dokažte, že trojčlen $x^2 - rx - 1$ není dělitelem žádného nenulového mnohočlenu s celými koeficienty v absolutní hodnotě menšími než r.

37. Mají-li dva mnohočleny 3. stupně s celými koeficienty společný iracionální kořen, pak mají ještě další společný kořen. Dokažte.

41. Dřevěnou krychli natřeli na červeno a pak ji rozřezali na n^3 stejně velkých krychliček. Kolika způsoby je možno z krychliček složit červenou krychli původních rozměrů?

42. Je dáno prvočíslo $p > 2$ a přirozené číslo n. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy pravidelného p-úhelníku pomocí n barev? Způsoby, při nichž se po otočení p-úhelníku barvy shodují, nepokládejme za různé.

43. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Diferencí slova budeme rozumět číslo, které udává, kolikrát v něm jsou vedle sebe různá písmena. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je počet slov s diferencí $n - k$ roven počtu slov s diferencí $n + k$.

44. Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Slovům, která lze rozdělit na dvě slova, z nichž každé obsahuje stejně X a Y, budeme říkat slova 1. druhu. Slovům, která lze takto rozdělit jediným způsobem, budeme říkat slova 2. druhu. Dokažte, že slov 2. druhu je dvakrát tolik jako slov 1. druhu.

45. Je dáno přirozené číslo $n > 2$ a množina $\mathbf{M}$, jejíž prvky jsou slova složená z písmen X a Y, přičemž každé slovo má právě n písmen a jakákoli dvě různá slova se liší alespoň na třech místech. Dokažte nerovnost

$$|\mathbf{M}| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

46. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$2^{4n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}.$$

47. Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ podmnožin nějaké množiny je dokonalý, jestliže pro žádné dvě podmnožiny $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{S}$ neplatí $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Jaký je největší možný počet podmnožin tvořících dokonalý systém podmnožin n-prvkové množiny?

5. Geometrie

51. V prostoru jsou dány dva různé body A, B. Najděte množinu všech bodů X, pro které se $|XA|^2 - |XB|^2$ rovná danému kladnému číslu k.

52. V prostoru je dána rovina ρ a body A, B v opačných poloprostorech určených rovinou ρ. Najděte v rovině ρ všechny body X, pro které je $||XA| - |XB||$ maximální.

53. V prostoru je dán klín K (průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny nejsou rovnoběžné) a uvnitř něho polopřímka p, jejíž počátek náleží hraně klínu K. Najděte rovinu ρ, která prochází polopřímkou p tak, že p je osou úhlu $\rho \cap K$.

54. Bod X se pohybuje po přímce p konstantní rychlostí danou vektorem $\boldsymbol{u}$, bod Y se pohybuje po přímce q konstantní rychlostí danou vektorem $\boldsymbol{v}$. Přímky p a q jsou mimoběžné a v jednom okamžiku je X v bodě A, Y v bodě B. Najděte polohu bodů X, Y, při které je vzdálenost $|XY|$ minimální.

55. V trojbokém jehlanu $ABCV$ je $|AV| = |BV|$ a hrana AC je kolmá ke stěně ABV, $|CV| = p$. Koule o poloměru r se dotýká stěny ABV v jejím těžišti, hrany CV a základny ABC. Vypočtěte objem jehlanu pomocí veličin p, r.

56. V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P. Paty kolmic vedených bodem P k stranám trojúhelníku ABC označíme K, L, M. Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby

a) body K, L, M, P ležely na kružnici,

b) body K, L, M ležely na přímce.

57. V rovině je dán trojúhelník ABC. Kružnice k_A prochází bodem A a dotýká se strany BC v bodě B, kružnice k_B prochází bodem B a dotýká se strany CA v bodě C a kružnice k_C prochází bodem C a dotýká se strany AB v bodě A. Dokažte, že se kružnice k_A, k_B, k_C protínají v jednom bodě Q. Co platí o úhlech $\sphericalangle QAB$, $\sphericalangle QBC$, $\sphericalangle QCA$?

58. V prostoru jsou dány přímky p, q a rovina ρ, dále je dána délka $d > 0$. Sestrojte úsečku délky d rovnoběžnou s rovinou ρ, jejíž jeden krajní bod náleží p a druhý q.