28. ročník matematické olympiády

Kategorie Z

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 28. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. pp. 33–51.

Kategorie Z

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Z - P - 1

Nejmenší přirozené číslo x, pro které je $1260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

a) 1470, b) 1260^2, c) 7350.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

Řešení: Použijeme vyjádření přirozeného čísla jako součinu prvočinitelů. Platí:

$$1260x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x$$

Nejmenší přirozené číslo tvaru $1260x$, které je třetí mocninou přirozeného čísla, je $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$. Nejmenší takové x je tedy

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 7350\,.$$

Správná je odpověď c).

Z - P - 2

Na desce, na níž je narýsován pravidelný desetiúhelník, jehož vrchol je označen 0, hrají dva hráči tuto hru:

Na vrchol 0 si nejprve postaví společnou jednu figurku a pak ji střídavě přemísťují podle vlastní volby buď o 3, nebo o 4, nebo o 5 vrcholů ve směru otáčení hodinových ručiček. Vyhraje hráč, který první opět umístí figurku na vrchol 0.

Popište, jak má postupovat hráč, který začíná, aby vyhrál nejpozději svým třetím tahem.

Řešení: Vrcholy desetiúhelníku označme 0, 1, 2, ..., 9 ve směru otáčení hodinových ručiček. Táhne-li v průběhu hry některý hráč na některé z polí 5, 6, 7, protihráč může z každého z těchto polí dalším tahem dosáhnout 0 a vyhrává. Táhne-li v průběhu hry hráč na pole 2, vyhraje svým následujícím tahem, neboť protihráč se odtud nutně dostane na některé z polí 5, 6, 7. Táhne-li hráč na jiné pole (různé od 0) než 2, při vhodné odpovědi protihráče nevyhraje svým následujícím tahem.

Hráče označme *A*, *B*. *A* začíná a svým prvním tahem se může dostat na pole 3, 4 nebo 5.

I. Zahájí-li *A* tahem na 3, dostane se *B* dalším tahem na 6, 7 nebo 8. V prvních dvou případech *A* vyhrává svým druhým tahem. V třetím případě se *A* svým druhým tahem může dostat na 2 a vyhrát svým třetím tahem.

II. Zahájí-li A tahem na 4, dostane se B dalším tahem na 7, 8 nebo 9. V prvním případě A vyhrává svým druhým tahem. V druhém i třetím případě se A svým druhým tahem může dostat na 2 a vyhrát svým třetím tahem.

III. Zahájí-li A tahem na 5, umožní hráči B vyhrát jeho prvním tahem.

Existují tedy právě dva postupy, které hráči A zaručují výhru nejpozději jeho třetím tahem. Jsou popsány v I. a II. Pravidla, jimiž se hráč A řídí, můžeme jednoduše vyjádřit tabulkou doporučující mu, jak táhnout:

z pole	0	5	6	7	8	9
na pole	3, 4	0	0	0	2	2

(Řídí-li se A těmito pravidly, nedostane se při žádném postupu protihráče do situace, kdy by měl táhnout z některého z polí 1, 2, 3, 4.)

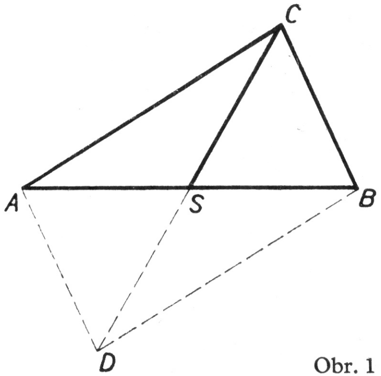
Z - P - 3

Je dán trojúhelník ABC. Označme S střed strany AB. Dokažte, že

$$|CS| < \frac{1}{2}(|AC| + |BC|)\,.$$

Řešení: Trojúhelník doplníme souměrností podle středu S na rovnoběžník $ADBC$ (obr. 1). Pro $\triangle\, ADC$ platí trojúhelníková nerovnost

$$|CD| < |AC| + |AD|\,.$$



Obr. 1

Dosadíme-li do této nerovnosti $|CD| = 2|CS|$ a $|AD| = |BC|$, dostaneme dokazovanou nerovnost.

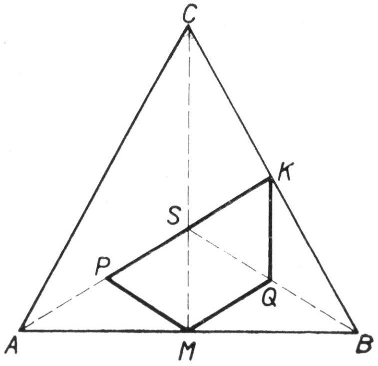
Z - P - 4

V rovnostranném trojúhelníku ABC označíme S průsečík přímek AK a CM, kde M je střed strany AB a K střed strany BC. Dále označíme P střed úsečky AS a Q střed úsečky BS.

a) Dokažte, že čtyřúhelník $PKQM$ je rovnoramenný lichoběžník.

b) Vypočtěte, jakou částí obsahu $\triangle\, ABC$ je obsah lichoběžníku $PKQM$.

Řešení: Čtyřúhelník $PKQM$ (obr. 2) se skládá ze tří shodných rovnostranných trojúhelníků SPM, SMQ, SQK,



Obr. 2

jejichž strany mají délku $\frac{1}{3}v$, kde v je výška a zároveň těžnice $\triangle ABC$. Je totiž zřejmé, že $|SP| = |SM| = |SQ| = |SK| = \frac{1}{3}v$ a $\sphericalangle PSM = \sphericalangle MSQ = \sphericalangle QSK = 60°$, tj. také $|PM| = |MQ| = |QK| = \frac{1}{3}v$. Trojúhelníky APM, PSM mají shodné strany $|AP| = |PS|$ a společnou výšku z vrcholu M. Proto platí pro jejich obsahy

$$\triangle APM = \triangle PSM .$$

Z obdobných důvodů platí

$$\triangle MBQ = \triangle SMQ , \quad \triangle BQK = \triangle SQK .$$

Trojúhelník ABK se tedy skládá ze 6 trojúhelníků téhož obsahu; každý z nich má za obsah $\frac{1}{12}$ obsahu $\triangle ABC$. Lichoběžník $PKQM$ se skládá ze tří těchto trojúhelníků, je tedy

$$PKQM = \frac{1}{4} \triangle ABC .$$

Z - I - 1

Najděte přirozená čísla x, y tak, aby platilo

$$28x^4 = 75y^3$$

a aby číslo x bylo nejmenší možné.

Řešení: Použijeme vyjádření přirozeného čísla jako součinu prvočinitelů. Pravá i levá strana dané rovnice je dělitelna prvočísly 2, 3, 5, 7; má-li být číslo x co nejmenší, nesmí se ve vyjádření čísel x, y vyskytovat jako činitel žádné jiné prvočíslo. Každé z prvočísel 2, 3, 5, 7 je prvočinitelem čísel x, y, je tedy

$$x = 2^a 3^b 5^c 7^d, \quad y = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta .$$

Tento zápis říká, že např. číslo x má a prvočinitelů 2, b prvočinitelů 3 atd. Z dané rovnice plyne podle známých vzorců pro počítání s mocninami

$$2^2 . 7 . 2^{4a} 3^{4b} 5^{4c} 7^{4d} = 3 . 5^2 . 2^{3\alpha} 3^{3\beta} 5^{3\gamma} 7^{3\delta}$$

neboli

$$2^{4a+2} . 3^{4b} . 5^{4c} . 7^{4d+1} = 2^{3\alpha} . 3^{3\beta+1} . 5^{3\gamma+2} . 7^{3\delta} .$$

Protože vyjádření je jednoznačné, dostaneme porovnáním exponentů

$$4a + 2 = 3\alpha, \; 4b = 3\beta + 1, \; 4c = 3\gamma + 2, \; 4d + 1 = 3\delta$$

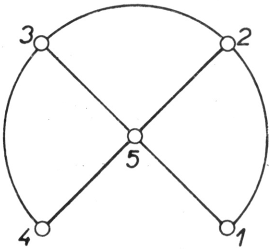
Rozřešme první z těchto rovnic. Číslo a musí být co nejmenší kladné číslo. Zkusme $a = 1$; $4a + 2 = 6$, $\alpha = 2$. Podobně zkusíme $b = 1$, vyjde $\beta = 1$; $c = 1$ nevyhovuje, ale pro $c = 2$ dostaneme $\gamma = 2$. Nevyhovuje ani $d = 1$, pro $d = 2$ dostaneme $\delta = 3$. Máme tedy řešení:

a	b	c	d	α	β	γ	δ
1	1	2	2	2	1	2	3

Hledaná čísla jsou $x = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^2 \,.\, 7^2 = 7350$, $y = 2^2 \,.$ $.\, 3 \,.\, 5^2 \,.\, 7^3 = 102\,900$. Zkouška potvrdí správnost řešení.

Z - I - 2

Na obr. 3 je znázorněn hrací plán „podkovy“, hry francouzských dětí. Obsahuje pět polí označených čísly 1 až 5.



Obr. 3

Sousední pole se nazývají dvě pole spojená úsečkou nebo obloukem. Hru hrají dva hráči, červený ($\check{C}$) a modrý (M), z nichž každý má dva kameny své barvy.

Počáteční postavení zaujmou tak, že střídavě kladou po jednom kameni své barvy na pole 1 až 5; jedno zůstane volné. Při samotné hře táhnou hráči střídavě vždy jedním kamenem své barvy na sousední volné pole. Vyhrává hráč, který znemožní protivníkovi další tah.

a) Kolik počátečních postavení má hra „podkova“?

b) Najděte všechna postavení, z nichž modrý nemůže dále táhnout.

c) Je dáno postavení *Č* 1,4; *M* 3,5, červený táhne. Zapište další průběh hry, jestliže červený vyhrál svým třetím tahem.

Řešení:

a) Nejdříve obsadíme dvě z polí 1 až 5 červenými kameny. To je možné 10 způsoby: 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2,3; 2,4; 2,5; 3,4; 3,5; 4,5. Ke každé z uvedených 10 dvojic lze přidat na zbylá tři pole dvojici modrých kamenů třemi způsoby.
Počátečních postavení je tedy $10 \cdot 3 = 30$.

b) Probereme-li všech 10 možností rozestavení modrých kamenů, podaří se nám červené kameny umístit tak, aby zablokovaly modré, jen ve dvou případech. Budou to postavení *Č* 3,5, *M* 1,2 a *Č* 2,5, *M* 3,4.

c) Zápis průběhu hry je třeba tento:

červený	modrý
1,4	3,5
táhne *Č*	(nutný tah)
2,4	3,5
táhne *M*	(nutný tah)

	2,4	1,3
táhne *Č*	(2,5, 1,3 nevede k cíli)	
	4,5	1,3
táhne *M*	(udělal chybu)	
	4,5	1,2
táhne *Č*		
	3,5	1,2

Modrý nemůže pokračovat, červený vyhrává.

Z - I - 3

V rovině je dána úsečka AB. Vyšetřete množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC, pro jejichž vnitřní úhly platí

$$\alpha \geqq \beta > \gamma.$$

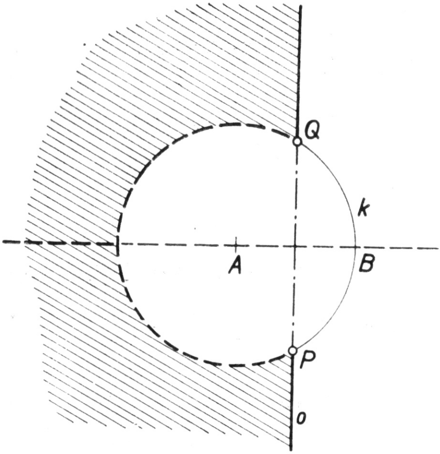
Řešení: Porovnání vnitřních úhlů trojúhelníku lze převést na porovnání jeho stran a obráceně. Přitom používáme dvě věty:

Pro vnitřní úhly α, β trojúhelníku ABC platí rovnost $\alpha = \beta$, právě když platí pro protější strany rovnost $|BC| = |AC|$ a $\alpha > \beta \Leftrightarrow |BC| > |AC|$.

V naší úloze jsou dané podmínky pro úhly ekvivalentní s podmínkami pro strany

$$|BC| \geqq |AC| > |AB|.$$

Sestrojíme tedy osu úsečky AB a kružnici k se středem A a poloměrem $|AB|$ (obr. 4). Hledaná množina je vyšrafovaná část roviny; patří k ní silně vytažená část přímky o, nepatří k ní čárkovaný oblouk kružnice k, ani body P, Q, ani body přímky AB.

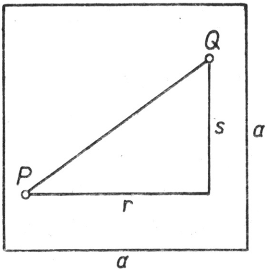


Obr. 5

Z - I - 4

Jsou dány dva různé body P, Q. Sestrojte čtverec **K**, který obsahuje body P, Q a má nejmenší možný obsah.

Řešení: Čtverec **K** je čtverec, který má úsečku PQ za svou úhlopříčku. Obsah čtverce s úhlopříčkou PQ je roven $\frac{1}{2}|PQ|^2$. Uvažujme čtverec, který obsahuje body P, Q a přitom PQ není jeho úhlopříčka. Dokážeme-li, že délka jeho úhlopříčky u je pak větší než $|PQ|$, budeme hotovi, neboť jeho obsah $\frac{1}{2}u^2$ bude pak větší než $\frac{1}{2}|PQ|^2$. Nechť je tedy u délka úhlopříčky a a délka strany čtverce, který obsahuje body P, Q, a nechť úsečka PQ není jeho úhlopříčkou. Je-li úsečka PQ rovnoběžná s některou stranou čtverce, je $|PQ| \leq a < a\sqrt{2} = u$. Není-li úsečka PQ

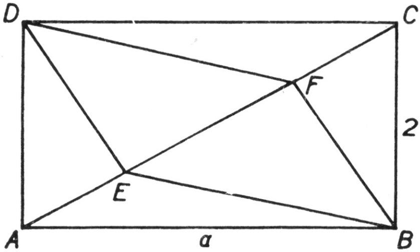


Obr. 5

rovnoběžná se stranou čtverce, doplníme ji na pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami rovnoběžnými se stranami čtverce (obr. 5). Pro délky odvěsen r, s platí $r \leqq a$, $s \leqq a$, přičemž alespoň jedna nerovnost je ostrá (pokud by $r = a = s$, byla by úsečka PQ úhlopříčkou čtverce). Je tedy $|PQ| = \sqrt{r^2 + s^2} < \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = u$. V obou případech tedy platí $|PQ| < u$, což jsme potřebovali dokázat.

Z - II - 1

V obdélníku $ABCD$ je $|AB| = a > 2$, $|BC| = 2$. Kolmice vedené na úhlopříčku AC vrcholy B, D protínají tuto úhlopříčku v bodech E, F (obr. 6).



Obr. 6

a) Vyjádřete obsah rovnoběžníku $EBFD$ pomocí čísla a.

b) Určete všechna čísla a, pro něž se obsah rovnoběžníku $EBFD$ rovná polovině obsahu obdélníku $ABCD$.

Řešení: Označíme-li hledaný obsah P, bude

$$P = |DE| \left(|AC| - 2\,|AE|\right).$$

Vyjádříme-li dvojím způsobem obsah obdélníku $ABCD$ a jeho strany označíme $|AB| = a$, $|BC| = b$, dostaneme

$$|AC| \,.\, |DE| = ab\,, \tag{1}$$

a tedy

$$P = ab - 2\,|AE| \,.\, |DE|\,.$$

Podle Pythagorovy věty je $|AE| = \sqrt{b^2 - |DE|^2}$, a tedy

$$P = ab - 2|DE|\sqrt{b^2 - |DE|^2}\,. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že podle Pythagorovy věty je $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$, dostaneme z (1)

$$|DE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Dosadíme-li to do (2) a upravíme, vyjde

$$P = ab\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,.$$

V našem případě bylo dáno $b = 2$ a tedy

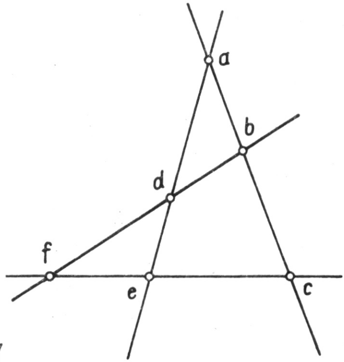
$$P = \frac{2a\,(a^2 - 4)}{a^2 + 4}\,.$$

Obsah P je roven polovině obsahu obdélníku $ABCD$ právě pro $a = 2\sqrt{3}$.

Z - II - 2

Dokažte, že k šesti bodům vyznačeným na obr. 7 nelze připsat šest navzájem různých přirozených čísel tak, aby součet čísel připsaných k třem bodům přímky byl pro všechny čtyři vyznačené přímky stejný.

Řešení: Označme a, b, c, d, e, f čísla připsaná k vyzna-



Obr. 7

čeným bodům podle obr. 7. Kdyby čísla splňovala uvedené podmínky, platilo by pro ně:

$$a + b + c = a + d + e$$
$$f + d + b = f + e + c$$

Sečtením dostaneme

$$2b = 2e,$$

a to je spor s předpokladem, že čísla jsou navzájem různá, a tím je proveden nepřímý důkaz. (Předpokladu, že čísla jsou přirozená, jsme ani nevyužili.)

Z - II - 3

Určete přirozená čísla x, y, z tak, aby platilo

$$45\,xy^2 = 8z^3$$

a aby součin xyz byl menší než 1000.

Řešení: Nechť x, y, z je řešením úlohy.

Z dané rovnice plyne, že z je dělitelné patnácti, tj.

$$z = 15t. \tag{1}$$

Znásobíme-li danou rovnici číslem xz^2, dostaneme

$$45\, x^2y^2z^2 = 8xz^5$$

a po dosazení z (1) do pravé strany a úpravě

$$x^2y^2z^2 = 2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^4\, xt^5.$$

Vzhledem k tomu, že $xyz < 10^3$, je

$$2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^4\, xt^5 < 10^6,$$

a tedy

$$27\, xt^5 < 200\,.$$

Odtud vidíme, jednak že $t = 1$, a tedy $z = 15$, jednak že

$$x \leqq 7\,. \tag{2}$$

Dosadíme-li za z do dané rovnice, redukuje se na

$$xy^2 = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 5^5\,.$$

Z toho vidíme, že x je násobek šesti, a podle (2) je tedy $x = 6$; $y = 10$.

Existuje-li tedy řešení splňující dané podmínky, je to nutně

$$x = 6,\ \ y = 10,\ \ z = 15\,.$$

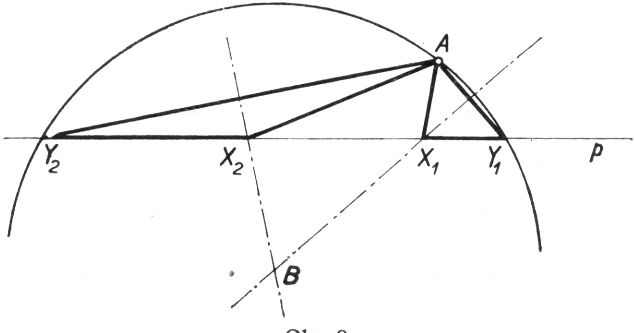
Zkouška ukáže, že to řešení je.

Z - II - 4

V rovině jsou dány body A, B a přímka p, která je odděluje. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky AXY s těmito vlastnostmi.

(1) AY je základna;
(2) body X, Y leží na přímce p;
(3) přímka BX obsahuje osu úhlu AXY.

Řešení: Nechť $\triangle AXY$ má požadované vlastnosti (obr. 8). Protože bod B leží na ose základny AY, je bod



Obr. 8

Y průsečíkem přímky p a kružnice se středem v bodě B a poloměrem $|AB|$. Osa úsečky AY protíná pak přímku p v bodě X. Vzhledem k tomu, že přímka p odděluje body A, B, dostaneme naznačenou konstrukcí dva různé průsečíky Y_1, Y_2 a k nim po jednom bodu X_1, X_2. Oba trojúhelníky AX_1Y_1, AX_2Y_2 jsou řešením úlohy.

Z - III - 1

Určete, které z čísel 156 200, 40 960, 46 656 je zároveň druhou i třetí mocninou jistých přirozených čísel. Určete tato čísla.

Z - III - 2

JZD sklízelo obilí na výměře 945 hektarů třemi kombajny 1. typu s výkonem 20 ha (na den a kombajn) a třemi kombajny 2. typu s výkonem 15 ha (na den a kombajn). Po 4 dnech se jeden kombajn 1. typu porouchal a byl vyřazen. Kombajnéři zbývajících pěti kombajnů uzavřeli závazek, že zvýší denní normu úměrně k denním výkonům kombajnů a ukončí žně v původním termínu s tím, že JZD sklidí bez kombajnů obilí ze 3 ha každý den do konce žní. Určete, kolik ha denně sklízely kombajny 1. a 2. typu ve zbývajících dnech, jestliže kombajnéři splnili závazek, který uzavřeli.

Z - III - 3

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ($|AC| = |BC|$), jehož obsah je S. Střed strany AC je bod E, střed strany BC je bod F, průsečík úseček AF a BE je bod M. Lomená čára $AFEB$ rozdělí trojúhelník ABC na pět trojúhelníků (trojúhelníky ABM, EFM, AME, BMF

a EFC). Vypočítejte obsahy všech těchto trojúhelníků pomocí obsahu S trojúhelníku ABC.

Z - III - 4

Úsečka AB je stranou trojúhelníku ABC. Pro délky jeho stran platí nerovnosti: $|AC| > |BC|$, $|AC| \geqq |AB|$. Vyšetřete množinu všech vrcholů trojúhelníka ABC.

ÚLOHY III. KOLA V SSR

Z - III - 1

Nájdite všetky dvojice x, y celých čísel, pre ktoré platí

$$y = \frac{3x + 2}{x - 2}.$$

Z - III - 2

Dané sú priamky p, q, ktoré sú navzájom kolmé, a bod T. Zostrojte $\triangle\, ABC$ tak, aby T bol jeho ťažiskom, priamka p osou strany AB, priamka q osou strany BC.

Z - III - 3

Nájdite úhrnný ciferný súčet všetkých prirodzených čísel najviac trojciferných.

Z - III - 4

Vypočítajte obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$, ak jeho uhlopriečka má veľkosť n a zviera s väčšou základňou uhol 45°.