VII. Správa o 4. korešpondenčnom seminári MO

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 140–150.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404705

VII. Správa o 4. korešpondenčnom seminári MO

Na základe pozitívnych skúseností s korešpondenčným seminárom v predchádzajúcich rokoch sa konal korešpondenčný seminár aj v školskom roku 1977/78 v rámci XXVII. ročníka MO. Návrh účastníkov seminára predložil *doc. dr. J. Moravčík, CSc.*, na základe výsledkov XXVI. ročníka MO. Návrh vychádzal z toho, že v Prahe sa bude konať celomestský seminár vybraných riešiteľov MO, ktorého účastníci budú riešiť úlohy korešpondenčného seminára ako domáce cvičenia. Do seminára boli preto vybraní riešitelia z jednotlivých krajov takto: Severočeský 2, Západočeský 1, Juhočeský 2, Východočeský 6, Severomoravský 5, Juhomoravský 2, Bratislava 3, Západoslovenský 2, Stredoslovenský 6, Východoslovenský 2. Z 31 vybraných riešiteľov sa práce v seminári nezúčastnil 1 zo Severočeského a 1 zo Stredoslovenského kraja.

Pre seminár boli vybrané nasledujúce tematické okruhy:

Nerovnosti v algebre a geometrii — výber 8 úloh zostavil *Michal Kaukič* z VŠD Žilina. Hodnotenie 195 riešení od 27 riešiteľov uskutočnil a s komentárom riešiteľom rozoslal *Peter Ivan* z VŠD Žilina.

Množiny bodov v priestore — výber pozostávajúci z 11 úloh formulovaných v 6 celkoch zostavil *doc. Vyšín, CSc.*, ktorý tiež hodnotil a komentoval 183 riešení od 21 riešiteľov.

Matematická analýza — výber 8 úloh zostavil *dr. Jiří Jarník, CSc.*, ktorý zhodnotil a komentoval celkom 148 riešení od 22 riešiteľov.

Kombinatorika — výber 8 úloh zostavil *dr. František Zítek, CSc.*, ktorý dostal na hodnotenie a komentovanie celkom 62 riešení od 15 riešiteľov.

Školská teória čísel — výber 8 úloh zostavil *dr. Štefan Sakáloš* z PFUK v Bratislave, ktorý komentoval a hodnotil 91 riešení od 15 riešiteľov.

Za vedenie seminára (výber autorov tematických celkov, súborné hodnotenie riešiteľov) zodpovedal *doc. dr. J. Moravčík, CSc.*

Po zhodnotení riešení všetkých tematických celkov možno za najúspešnejších účastníkov seminára považovať týchto: *Vladimír Matěna*, G Trutnov 37 úspešných riešení (zo 43 možných), *Jaroslav Hančl*, G Bílovec, 36, *Josef Tkadlec*, G Bílovec, 36, *Milan Veščičík*, G Bratislava, ul. ČA, 33, *Zdeněk Kalousek*, G Jablonec n. N., 31, *Ilja Turek*, G Hradec Králové, 31, *Rostislav Urban*, G Ostrava, 30.

Z vyššie menovaných žiakov 3 (Veščičík, Turek, Kalousek) a 2 ďalší účastníci korešpondenčného seminára (Kratochvíl, Filakovszky), ktorí zaslali len riešenia 3, resp. 2 tematických celkov, boli členmi družstva ČSSR na XX. MMO v Rumunsku, ktoré v neoficiálnom hodnotení družstiev obsadilo 5. miesto medzi 17 krajinami. Pravidelné riešenie úloh korešpondenčného seminára má na tomto úspechu nesporne tiež svoj nemalý podiel. Vyplynulo to aj z ankety uskutočnenej v Bukurešti medzi našimi reprezentantmi, ktorá však poukázala zároveň na možnosti ďalšieho skvalitnenia organizácie korešpondenčného seminára v budúcnosti. Preto predsedníctvo ÚV MO na svojom zasadnutí v septembri 1978 rozhodlo o poriadaní korešpondenčného seminára aj v školskom roku 1978/79, ale s niektorými organizačnými zmenami.

Pre informáciu čitateľov o obsahu korešpondenčného seminára, ktorý sa konal v školskom roku 1977/78 prinášame na ďalších stránkach prehľad všetkých úloh, ktoré jeho účastníci dostali na riešenie. Tým im zároveň poskytujeme možnosť vyskúšať svoje schopnosti úspešne riešiť náročnejšie matematické úlohy.

Nerovnosti v algebre a geometrii (zostavil *M. Kaukič*, VŠD Žilina):

1. Ak $abc > 0$, potom

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3};$$

dokážte.

2. Dokážte, že nerovnosť $pa^2 + (1 - p)(b^2 - pc^2) > > 0$, kde p je reálne číslo, a,b,c sú kladné reálne čísla, je správna práve vtedy, keď súčasne platia nerovnosti $a + b - c > 0$, $a + c - b > 0$, $b + c - a > 0$.

3. Dané sú dve kružnice rovnakej dĺžky 1977. Na jednej z nich je daných 1977 bodov a na druhej niekoľko oblúkov, ktorých súčet dĺžok je menší než 1. Dokážte, že tieto kružnice možno tak „položiť na seba“, že žiadny z daných bodov nebude ležať na niektorom z daných oblúkov.

4. Ak m, n sú kladné racionálne čísla a $x > 0$, potom platí

$$mx^n + \frac{n}{x^m} \geqq m + n\,.$$

Dokážte.

5. Dokážte, že pre $y = a\sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ a všetky reálne čísla x platí

$$\frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} \leqq y \leqq \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}\,,$$

kde $D = b^2 + (a - c)^2$.

6. Ak a,b,c sú dĺžky strán trojuholníka, x,y,z reálne čísla a platí $ax + by + cz = 0$, potom $ayz + bzx + cxy < 0$; dokážte.

7. Daná je konečná postupnosť celých kladných čísel, ktorej žiadny člen nie je menší než dané číslo M. Okrem toho každý člen tejto postupnosti začínajúc tretím je rovný absolútnej hodnote rozdielu dvoch predchádzajúcich členov. Aký najväčší počet členov môže mať taká postupnosť?

8. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú také, že $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1$; $a_2 \leqq a_3 \leqq 2a_2, \ldots, a_{n-1} \leqq a_n \leqq 2a_{n-1}$. Dokážte, že

v súčte $S = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ možno vždy vybrať znamienka tak, že $0 \leqq S \leqq a_1$.

Množiny bodov v priestore (zostavil *doc. J. Vyšín, CSc.*):

1. V priestore sú dané dva útvary U_1, U_2 a priamka s. Označíme X_1, X_2 dva body týchto vlastností: $X_1 \in U_1 \wedge \wedge X_2 \in U_2$, $X_1 \neq X_2$, $X_1X_2 \,||\, s$.

Vyšetrite množinu všetkých stredov všetkých takých úsečiek X_1X_2 v týchto prípadoch:

a) U_1, U_2 sú dve mimobežky,

b) U_1 je priamka rôznobežná s rovinou U_2,

c) U_1, U_2 sú dve rôznobežné roviny.

2. V priestore je daný trojuholník ABC a útvar U. Vyšetrite množinu všetkých stredov guľových plôch opísaných všetkým štvorstenom $ABCX$, kde $X \in U$, a to v prípadoch:

a) U je priamka rôznobežná s rovinou ABC,

b) U je rovina rôznobežná s rovinou ABC a prechádzajúca bodom A.

3. V priestore je daný útvar U, rovina ϱ a trojuholník ABC.

Vyšetrite množinu všetkých vrcholov Z všetkých trojuholníkov XYZ, kde $X \in U \wedge Y \in \varrho \wedge XY \,||\, AB \wedge \wedge YZ \,||\, BC \wedge ZX \,||\, CA$, a to v prípadoch:

a) U je priamka rôznobežná s rovinou ϱ,

b) U je rovina rôznobežná s rovinou ϱ.

4a. V priestore sú dané dve rôzne roviny ϱ, σ a bod A, ktorý neleží v žiadnej z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov všetkých priamok, z ktorých každá prechádza bodom A a má rovnakú odchýlku od roviny ϱ i roviny σ.

4b. V priestore sú dané dva rôzne body A, B a rovina ϱ, ktorá neobsahuje žiadny z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov X roviny ϱ, pre ktoré majú priamky AX, BX rovnakú odchýlku od roviny ϱ.

5. V priestore je daný bod A, priamka q a útvar U. Ďalej je dané kladné číslo k. Vyšetrite množinu všetkých bodov X týchto vlastností: $X \in q$, podiel vzdialeností bodu X od útvaru U a od bodu A je rovný k, a to v týchto prípadoch:

a) U je priamka mimobežná s q,
b) U je rovina rôznobežná s q.

Matematická analýza (zostavil *dr. J. Jarník, CSc.*, MÚ ČSAV Praha):

1. Nech $0 < a < b$ sú reálne čísla, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 2, 3, \ldots$.

Nájdite číslo c také, že platí $x_{2n} > c > x_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, a dokážte, že platí:

Ak je $d \neq c$, potom existuje prirodzené číslo $p$také, že

$$|x_p - c| < |d - c|.$$

2. Nech postupnosť $\{x_n\}$ kladných čísel je rastúca a nie je ohraničená. Označme $s_n = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dokážte, že postupnosť $\{s_n\}$ je taktiež rastúca a nie je ohraničená. Zostane toto tvrdenie správne aj v prípade, keď vynecháme predpoklad, že čísla x_n sú kladné?

3. Nech $a_0 > 1$, $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dokážte: Postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca a pre všetky prirodzené n platí $a_n > 1$. Ak je $c > 1$, potom existuje také prirodzené číslo p, že platí $a_p < c$ (a teda $a_n < c$ pre všetky prirodzené čísla $n \geqq p$).

Vyšetrite tiež prípad $0 < a_0 \leqq 1$.

4. Nech $\{a_n\}$ je klesajúca postupnosť nezáporných čísel. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dokážte, že postupnosť $\{s_n\}$ je ohraničená práve vtedy, keď je ohraničená postupnosť $\{t_n\}$. Nájdite príklad, ktorý ukáže, že tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, ak vynecháme predpoklad, že postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca.

5. Určte všetky funkcie f, g definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x, y rovnosti

$$f(x - y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) .$$

6. Nech n je prirodzené číslo, a, b reálne čísla. Určte všetky funkcie f definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x rovnici

$$af(x^n) + f(-x^n) = bx .$$

7. Nech f je zobrazenie eukleidovského priestoru do seba.

Dokážte: Ak je f izometria, ktorá nemá pevný bod, potom ani zložené zobrazenie $f \bigcirc f$ (t.j. zobrazenie g, ktoré priraďuje každému bodu A bod $g(A) = f(f(A))$), nemá pevný bod.

Poznámka: Zobrazenie F eukleidovského priestoru do seba sa volá izometriou, ak zachováva vzdialenosť bodov, t.j. ak A, B sú ľubovoľné dva body priestoru, je vzdialenosť bodov $F(A)$, $F(B)$ rovná vzdialenosti bodov A, B.

Nech F je zobrazenie množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{M}$. Prvok $x \in \mathbf{M}$ sa nazýva pevným bodom zobrazenia F, ak platí $F(x) = x$.

8. Nech $\mathbf{M}$ je neprázdna množina funkcií f tvaru $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, ktorá má tieto vlastnosti:

a) Ak $f \in \mathbf{M}$, $g \in \mathbf{M}$, potom $g \bigcirc f \in \mathbf{M}$ kde $h = g \bigcirc f$ je funkcia definovaná vzťahom $h(x) = g(f(x))$.

b) Ak $f \in \mathbf{M}$, potom $f_{-1} \in \mathbf{M}$, kde f_{-1} je funkcia definovaná vzťahom $f_{-1}(x) = y$, kde $x = f(y)$.

c) Ak $f \in \mathbf{M}$, potom existuje pevný bod zobrazenia f, t.j. reálne číslo x_f také, že platí $f(x_f) = x_f$.

Dokážte, že existuje také reálne číslo t, že platí $f(t) = t$ pre všetky funkcie $f \in \mathbf{M}$.

Udajte príklady množiny $\mathbf{M}$ obsahujúcej: a) konečne mnoho, b) nekonečne mnoho prvkov.

Kombinatorika (zostavil *RNDr. F. Zítek, CSc.*, MÚ ČSAV Praha):

O konečnej postupnosti celých čísel tvaru

$$c_0 = 0,\ c_1, c_2, \ldots, c_n = c \tag{1}$$

budeme hovoriť, že má dĺžku n a končí číslom c.

Hovoríme, že postupnosť (1) je málo rastúca, ak pre $j = 1, 2, \ldots, n$ platí $0 \leqq c_j - c_{j-1} \leqq 1$. Postupnosť (1) nazveme alternatívnou, ak pre $j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$|c_j - c_{j-1}| = 1$. Ktoré postupnosti sú zároveň málo rastúce aj alternatívne?

1. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y)$ (n prirodzené, y celé) všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y. Vyšetrite vlastnosti funkcií p_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n(y)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y. Vyšetrite vlastnosti funkcií π_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ je $c_j \leqq b$ (b celé).

4. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $c_j \leqq kj$ ($k \geqq 0$ reálne).

5. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n^*(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ platí $c_j < kj$ ($k > 0$ reálne).

6. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y, a, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $a \leqq c_j \leqq b$ (a, b celé).

7. Odvoďte vzorec pre počet $p_n^*(y, k)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $c_j \leqq kj$ ($k > 0$ reálne).

8. Pri pokladni kina s jednotným vstupným 5 Kčs

stojí N záujemcov, z ktorých p platí päťkorunou, ostatných $d = N - p$ desaťkorunou.

Koľkými rôznymi spôsobmi možno usporiadať frontu N kupujúcich tak, aby pokladník, ktorý na začiatku predaja nemá v pokladni žiadne peniaze, mohol každému kupujúcemu s desaťkorunou ihneď vydať naspäť?

Ako sa tento počet zmení, ak pokladník má na začiatku v pokladni k päťkorún? (Predpokladáme samozrejme, že nikto nekupuje viac než jeden lístok.)

Školská teória čísel (zostavil *dr. Š. Sakáloš*, PFUK Bratislava):

1. Napíšte za sebou všetky čísla od 100 do 999. Vznikne tak dekadický zápis nejakého čísla N.

a) Dokážte, že N nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.

b) Dokážte, že N nie je prvočíslo.

c) Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27 000.

d) Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27 027 000.

e) Dokážte, že N nie je (vyššou než prvou) mocninou žiadneho prirodzeného čísla.

2. Nájdite najväčšie prirodzené číslo x, také, že

$$x^{x^{x}} < 4^{4^{4^{4}}}.$$

3. Akým najväčším číslom možno krátiť zlomok

$$\frac{7^{3000} - 3^{3000}}{5^{3000}}?$$

4. Dokážte, že existuje $3 . 10^9$ za sebou nasledujúcich zložených prirodzených čísel menších než $10^{10^{10}}$.

5. Dokážte, že číslo

$$1001^{4000} + 4 . 1000^{1000}$$

je zložené.

6. Dokážte, že kvadratická rovnica

$$8^{8^8} x^2 + 10^{10^{10}} x + 9^{9^9} = 0$$

má dva reálne rôzne korene, ktoré sú iracionálne.

7.a) Dokážte, že exponent čísla 2 v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $n - k$, kde k je počet jednotiek v dvojkovom zápise čísla n.

b) Dokážte, že exponent prvočísla p v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $\frac{n - k}{p - 1}$, kde k je ciferný súčet v p-adickom zápise čísla n.