27. ročník matematické olympiády

VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 128–139.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404704

VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z

Téměř všechny krajské výbory MO pořádají ve svých krajích třetí kola soutěže pro vybrané účastníky kategorie Z. ÚV MO nemá úplnou evidenci těchto akcí, zejména pokud jde o soutěžní úlohy, jejich hodnocení a výsledky. Uveřejňujeme proto texty úloh z některých krajů, které mají jednak dokumentární cenu, jednak jsou přínosem k úlohovému materiálu vhodnému pro kroužky olympioniků, mladých matematiků apod.*) Statistické přehledy, které jsou neúplné, do ročníkové brožury nezařaďujeme.

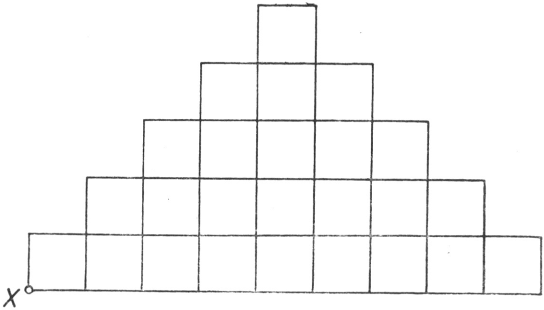
Středočeský kraj

1. Mnohoúhelník, který se skládá ze 25 čtverců o straně 7 mm, rozdělte přímkou procházející bodem X na dva obrazce o stejném obsahu (obr. 31).

---

*) Texty úloh jsou originální, bez úprav, tak jak nám je zaslaly KV MO.

2. Ve dvou nádobách (označme je A a B) máme dva lihové roztoky. V nádobě A jsou dva litry lihu 60procentního, v nádobě B 3 litry lihu 80procentního. Z nádoby B do A přelijeme 1 litr tekutiny, důkladně promícháme a pak přelijeme 1 litr tekutiny z nádoby A do B.



Obr. **31**

Vypočtěte, kolikaprocentní líh je v nádobách A a B po obou přelitích.

3. Tři manželské páry váží dohromady 438 kg. Každý z mužů, Karel, Jiří a Pavel, má manželku vždy o 6 kg lehčí, než je sám. Jména manželek jsou Blanka, Olga a Věra. Určete manželské páry a váhu všech šesti osob, víme-li, že Blanka váží o 9 kg méně než Jiří, který s Olgou dohromady váží 153 kg. Olga a Karel váží dohromady 150 kg. Váha každého je vyjádřena celým číslem.

4. Na přímce p leží body A, B, C, D tak, že pro velikosti úseček jimi určených platí: $|AB| = 1$ cm, $|AD| =$

$= 4$ cm, $|CD| = 2$ cm. Vypočtěte délku úsečky BC.

5. V rovině je dána přímka p a body A, B, které leží uvnitř opačných polorovin vyťatých přímkou p. Na přímce p sestrojte body X, Y, tak, aby trojúhelník AXY byl rovnoramenný s rameny XA, XY a aby přímka BX půlila úhel AXY.

Jihočeský kraj

1. A. Oddělení závodu odevzdávalo 1716 výrobků. Na základě stanoveného plánu výroby má být výroba zvýšena o 30 %. Zlepšovacími návrhy byl výrobní čas zkrácen z 25 minut na 16,5 min., ale bylo nutno zmenšit počet pracovníků ze 16 na 14. Podaří se takto splnit plánované zvýšení výroby?

1. B. V prodejně prodávali známky 60, 40 a 30haléřové. Celkem prodali 500 známek za 218 Kčs, přičemž počet známek za 60 hal. je k počtu známek za 40 hal. v poměru 3 : 8. Kolik kterých známek bylo prodáno? Proveďte zkoušku.

2. A. Čtverec $ABCD$ kotálejte po polopřímce AB, až vrchol A znovu padne na uvedenou polopřímku.

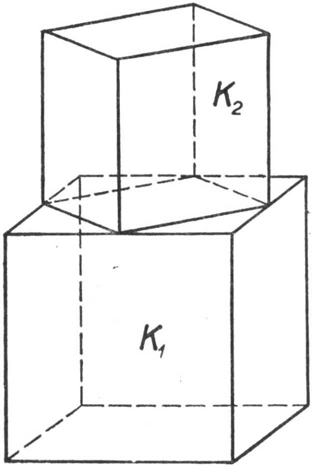
a) Narýsujte a popište.

b) Narýsujte dráhu, kterou při kotálení vykoná vrchol A.

c) Vypočtěte obsah P útvaru, který je vymezen drahou vrcholu A a příslušnou částí polopřímky AB, je-li strana čtverce $|AB| = a$.

d) Vypočtěte délku dráhy vrcholu A, je-li strana čtverce $|AB| = 10$ cm.

2. B. Narýsuj trojúhelník ABC, jsou-li dány: $b = 54$ mm, $c = 96$ mm, součet vnitřních úhlů beta a gama je $112{,}5°$. Rýsuj bez použití úhloměru, aniž bys počítal úhel alfa.



Obr. 32

3. A. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, jehož rozměry $|AB| : |AD| : |AE|$ jsou v postupném poměru $4 : 3 : 8$. Kvádr je rozříznut rovinou, která prochází hranami AE a CG. Plocha řezu má obsah $P = 1440$ cm^2. Urči objem kvádru.

3. B. Na krychli o hraně a cm je postavena druhá menší krychle, jak ukazuje obrázek (obr. 32).

a) Urči objem vzniklého tělesa.

b) Urči povrch vzniklého tělesa.

c) Narýsuj síť tělesa pro $a = 4$ cm.

Západočeský kraj

1. Automobilový silniční okruh měří 21 km a automobilista jej projíždí čtyřikrát průměrnou rychlostí 60 km/h. Od místa startu S současně s ním vyjede v témže směru cyklista, který jede rychlostí 15 km/h.

a) Určete místo a dobu, kdy dojde k 1., 2. a 3. setkání.

b) Po 18 km měl cyklista defekt a zdržel se opravou 2 minuty. Dále pak jel zvýšenou rychlostí a s automobilistou se setkal v místě původně předpokládaného 3. setkání. Jakou zvýšenou rychlostí musel cyklista jet?

2. Napište za sebou bez mezer trojnásobky všech přirozených čísel od 1 do 1000. Dostanete tak číslo 3691215....

a) Kolik cifer má toto číslo?

b) Která cifra stojí na tisícím místě sledu (počítáno od počáteční cifry)?

3. a) Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, je-li dána délka jeho těžnice $t_c = 4$ cm a velikost úhlu $\omega = 15°$, který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB$.

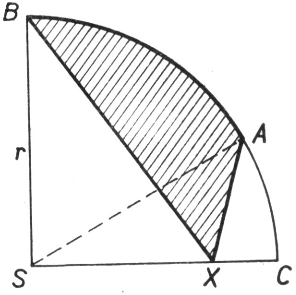
b) Předpokládejte, že velikost úhlu ω je proměnná, a určete, pro které hodnoty ω má úloha řešení.

4. Je dán čtvrtkruh BSC o poloměru $r = |SB| = |SC|$. Bod A je takový bod oblouku BC, pro který platí

$\sphericalangle ASB = 60°$; X je libovolný bod úsečky SC (viz obr. 33).

a) Vyjádřete obsah P plochy omezené úsečkami BX, AX a obloukem AB pomocí délky $x = |SX|$.

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu x je obsah P roven polovině obsahu čtvrtkruhu BSC, porovnejte tuto hodnotu x s délkou oblouku BC.



Obr. 33

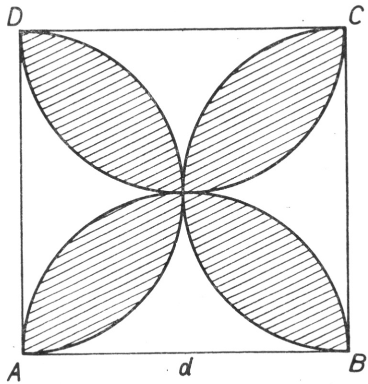
Severočeský kraj

1. Podél přímé železniční trati vede silnice, po níž jel cyklista rychlostí 18 km/h. Cyklistu dostihl po trati jedoucí vlak a předjel jej. Cyklista odhadl, že od okamžiku, kdy jej míjela lokomotiva, do okamžiku, kdy kolem něho projel konec vlaku, uplynulo asi 5,5 vteřiny. Potom však musel vlak na trati zastavit; cyklista jej dostihl a podél celého stojícího vlaku přejel za 19 vteřin. Vypočtěte přibližnou rychlost jedoucího vlaku.

2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou

AB, když jsou dané velikosti těžnic t_a, t_c. Proveďte diskusi řešitelnosti.

3. Písařka píše na psacím stroji těsně za sebou přirozená čísla 123456789101112 atd. bez mezer a čárek;



Obr. 34

celkem takto napsala 1000 číslic. Vypočítejte, kolik při tom napsala sedmiček.

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky d. Kolem středu každé jeho strany opište polokružnici, která prochází středem čtverce $ABCD$ (obr. 34). Kolik procent z obsahu čtverce tvoří obsah vyčárkovaného obrazce?

Severomoravský kraj

1. Najděte tři lichá čísla od 1 do 20, z nichž součet prvých dvou je o jedničku větší než číslo třetí a přitom

když přičteme k prvnímu z nich dvojnásobek druhého a trojnásobek třetího, dostaneme číslo 70. Která jsou to čísla?

2. Určete všechny hodnoty parametru t, pro které jsou čísla

$$a = 4t + 3$$

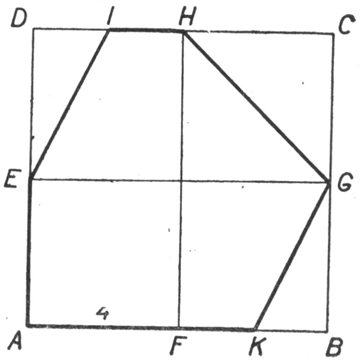
$$b = 3(1 - t)$$

$$c = 5t + 4$$

kladná. Ukažte pak, že existuje právě jedna hodnota parametru t taková, že lze ze tří úseček a, b, c sestrojit pravoúhlý trojúhelník s přeponou c.

Nakonec určete délky stran tohoto trojúhelníka, zvolíte-li za jednotku délky 17 mm, a proveďte jeho konstrukci!

3. Ve čtvercové síti (o straně 4 cm) katastrální mapy je zakreslen pozemek ve tvaru šestiúhelníka $AKGHIE$,



Obr. 35

kde K je střed úsečky FB a I je střed úsečky DH (obr. 35). Sestrojte obdélník se stranou o délce 4 cm tak, aby měl týž obsah jako daný šestiúhelník $AKGHIE$. Určete druhý rozměr obdélníka!

4. Dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a. Veďte rovinu procházející hranou BC tak, aby rozdělila krychli na dvě části, jejichž poměr objemů je 2 : 5. Kolika způsoby je to možné?
Vypočtěte velikost objemu každé z obou vzniklých částí! Jaký tvar a jakou velikost má vzniklý řez krychle, jejíž hrana a měří 9 cm? Proveďte též konstrukci.

Jihomoravský kraj

1. Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1 000 000, tj. vypočítejte součet
$a = 1 + 2 + 3 + \ldots + 999\,998 + 999\,999 +$
$+ 1\,000\,000.$
Sestavte vzorec pro součet n členů řady přirozených čísel. Ověřte platnost vzorce na zvoleném příkladě.

2. Vepište kružnici křivočarému útvaru, omezenému základnou AB obdélníka $ABCD$ ($|AB| = 12$ cm, $|BC| = 6$ cm) a dvěma navzájem se dotýkajícími shodnými čtvrtkružnicemi k_1 a k_2 o středech C a D.

Poznámka: Vypočítejte nejdříve poloměr kružnice křivočarému útvaru vepsané. Potom proveďte konstrukci.

3. Zpočátku jel parník rychlostí $v_1 = 23$ km/h. Když kapitán lodi zjistil, že parník urazil o $d = 24$ km méně

proti plánu, dal rozkaz zvýšit rychlost na $v_2 = 35$ km/h. Parník tak dojel do cíle včas. Vypočtěte dobu plavby a vzdálenost mezi oběma přístavy, jestliže střední rychlost plavby je $v_s = 27$ km/h.

4. V libovolném trojúhelníku ABC sestrojte osy o_1 a o_2 jeho vnitřních úhlů $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$. Průsečík těchto polopřímek označte P. Bodem P veďte přímku p rovnoběžnou s přímkou BC. Průsečík přímky p se stranou AB trojúhelníka ABC označte M, průsečík přímky p se stranou AC trojúhelníka ABC označte N. Dokažte, že pro velikosti úseček MN, MB a NC platí:

$$|MN| = |MB| + |NC| .$$

Bratislava

1. Do vrcholov pravidelného dvanásťuholníka sú vpísané celé čísla tak, že súčet ľubovoľných piatich vedľa seba stojacich čísel je rovnaký. Dokážte, že potom všetkých 12 čísel je rovných.

2. Číslo 9^{100} je 96ciferné.

a) Ukážte, že existuje prirodzené číslo $n < 100$ tak, že čísla 9^n a 9^{n+1} majú rovnaký počet cifier.

b) Existuje prirodzené číslo $n < 50$ tak, že čísla 9^n a 9^{n+1} majú rovnaký počet cifier.

3. Narysujte štvorec $ABCD$ o strane 10 cm a 4 kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 po rade so stredmi A, B, C, D (Stačí rysovať štvrťkružnice vo vnútri štvorca.) Označme po rade X, Y, Z, T tie priesečníky kružníc k_4 a k_3, k_4 a k_1, k_2 a k_1, k_2 a k_3, ktoré ležia vo vnútri štvorca.

a) Určte obsah štvoruholníka $XYZT$!

b) Určte obsah trojuholníka AXT!

4. V rovine sú dané dve rôzne priamky p, q a tri rôzne kružnice k_1, k_2, k_3 tak, že každá priamka sa dotýka všetkých troch kružníc. Pritom všetky tri kružnice ležia v tej istej polrovine určenej priamkou p i v tej istej polrovine určenej priamkou q. Potom stredy kružníc k_1, k_2, k_3 ležia na priamke. Dokážte.

Západoslovenský kraj

1. Autobusy miestnej dopravy premávajú po obojsmerovej trati medzi konečnými stanicami S a T vzdialenými 5 km. Po každom príchode na konečnú stanicu autobus tam stojí 5 minút. Autobus A začal premávať ráno o 5.00 hod, autobus B o 5.29 hod, obidva zo stanice S. Autobus B sa prvýkrát stretol s A, ktorý išiel (prvýkrát) z T do S, o 5.32 hod. (A a B majú rovnakú rýchlosť).

a) Vypočítajte priemernú rýchlosť autobusu na trati medzi S a T.

b) Koľkokrát sa autobusy A, B stretnú do 12.00 hod a v akých vzdialenostiach od stanice S?

2. Nech $p \,||\, q$ a $p \neq q$. Označme $v(X; Y)$ vzdialenosť objektov X, Y a $s(X)$ súčet vzdialeností bodu X od priamok p, q, teda $s(X) = v(X, p) + v(X, q)$.
Nájdite množinu M všetkých bodov M priestoru takých, že pre každý bod X priestoru platí $s(X) \geqq s(M)$.

3. Vo vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC zvoľte

ľubovoľný bod X. Označte A_1; B_1; C_1 stredy úsečiek AX; BX; CX a A_2; B_2; C_2 päty kolmíc zostrojených bodom X na strany AB; BC a CA.

a) Dokážte, že obvod šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ je $|BX| + |AX| + |CX|$.)

b) Vyjadrite obsah tohto šesťuholníka pomocou obsahu trojuholníka ABC.

4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme $c_1 = |AC_0|$; $c_2 = |BC_0|$, kde C_0 je päta výšky zostrojenej bodom C. Na kolmiciach v polrovine ABC zostrojte body P, Q tak, aby $|AP| = |BQ| = u$, kde $0 < u < |CC_0|$. Označme $P_1(Q_1)$ priesečník priamky AB s priamkou $p(q)$ idúcou bodom $P(Q)$ tak, že $p \parallel AC$ $(q \parallel BC)$ a P_2; Q_2 sú priesečníky priamky PQ so stranami AC; BC. Dokážte, že

$$\frac{S_{AP_2PP_1}}{S_{BQ_1QQ_2}} = \frac{c_1}{c_2}.$$