27. ročník matematické olympiády

II. Prípravné úlohy I. kolaII. Preparatory problems of the 1st round

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 32–52.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404700

KATEGÓRIA A

A — P — 1

Súčin n po sebe idúcich kladných nepárnych čísel násobený 2^{n-1} je deliteľný číslom $n!$. Dokážte.

Riešenie. Nech k je nepárne kladné číslo a n je prirodzené číslo. Označíme

$$c_{k,n} = \frac{k.(k+2). \ldots .[k+2(n-1)].2^{n-1}}{n!}.$$

Máme dokázať, že $c_{k,n}$ je celé číslo.

Pre $k = 1$ ľahkým výpočtom dostávame

$$c_{1,n} = \frac{1.3. \ldots .(2n-1).2^{n-1}}{n!} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} =$$

$$= \binom{2n-1}{n-1}.$$

Vieme, že číslo $\binom{2n-1}{n-1}$ je celé.

Ďalej dokazujeme matematickou indukciou podľa k. Predpokladáme, že platí indukčný predpoklad $\mathbf{P}_k$: „pre každé prirodzené n, číslo $c_{k,n}$ je celé". Chceme dokázať $\mathbf{P}_{k+2}$, t.j. že $c_{k+2,n}$ je celé pre ľubovoľné prirodzené číslo n.

Tvrdenie $\mathbf{P}_{k+2}$ dokážeme matematickou indukciou podľa n. Pre $n = 1$ je číslo

$$c_{k+2,1} = \frac{k+2}{1!} . 2^0 = k + 2$$

celé.

Predpokladajme, že $c_{k+2,n}$ je celé. Ukážeme, že aj číslo $c_{k+2,n+1}$ je celé. Využijeme k tomu takúto úpravu:

$$c_{k+2,n+1} = \frac{(k+2). \ldots .[k+2+2(n-1)].(k+2+2n).2^n}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(k+2). \ldots .[k+2+2(n-1)].k.2^n}{(n+1)!} +$$

$$+ \frac{(k+2). \ldots .[k+2+2(n-1)].(2+2n).2^n}{(n+1)!} =$$

$$= c_{k,n+1} + 4 . c_{k+2,n} .$$

Keďže predpokladáme, že $c_{k+2,n}$ je celé číslo, podľa $\mathbf{P}_k$ je $c_{k,n+1}$ celé, tak aj $c_{k+2,n+1}$ je celé číslo. To sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Dokážeme matematickou indukciou podľa $m = n + k$, že číslo $c_{k,n}$ je celé. Pre $m = 1 + 1$ je tvrdenie zrejmé. Predpokladáme, že $c_{k,n}$ je celé pre každú dvojicu čísel k, n takú, že $k + n < m$. Dokážeme, že $c_{l,p}$ je celé pre l, p také, že $l + p = m$. Pre $p = 1$ je tvrdenie triviálne, lebo

$$c_{l,1} = l\,.$$

Podobne pre $l = 1$ je tvrdenie triviálne, lebo

$$c_{l,p} = \binom{2p-1}{p-1}.$$

Pre $p > 1$, $l > 1$ rovnakou úpravou ako vyššie dostávame

$$c_{l,p} = c_{l-2,p} + 4c_{l,p-1}\,.$$

Keďže $l - 2 + p < m$, $l + p - 1 < m$, tak podľa indukčného predpokladu čísla $c_{l-2,p}$ a $c_{l,p-1}$ sú celé. Odtiaľ vyplýva, že aj číslo $c_{l,p}$ je celé.

A — P — 2

Ak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú reálne čísla, potom

$$n(c_1^2 + \ldots + c_n^2) \geqq (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^2\,.$$

Dokážte!

Riešenie. Riešenie bezprostredne vyplýva z identity

$$\begin{aligned}(c_1 + \ldots + c_n)^2 &= \\ = n(c_1^2 + \ldots + c_n^2) &- (c_1 - c_2)^2 - (c_1 - c_3)^2 - \ldots \\ \ldots - (c_1 - c_n)^2 &- (c_2 - c_3)^2 - \ldots - (c_2 - c_n)^2 - \\ &\vdots \\ &- (c_{n-1} - c_n)^2\,.\end{aligned}$$

Uvedená nerovnosť je špeciálnym prípadom tzv. Čebyševovej nerovnosti, pozri knižku A. Kufner: *Nerovnosti a odhady*, str. 31 (39. zväzok ŠMM).

A — P — 3

Ak p a q sú nezáporné čísla, tak platí

$$p^2 q \leqq \tfrac{4}{27}(p+q)^3; \tag{1}$$

rovnosť nastane práve vtedy, keď $p = 2q$. Dokážte.

Riešenie. Pre $q = 0$ tvrdenie platí.

Ak $q > 0$, tak nerovnosť (1) je ekvivalentná nerovnosti

$$x^2 \leqq \tfrac{4}{27}(x+1)^3, \tag{2}$$

kde $x = \dfrac{p}{q}$. Nerovnosť (2) je zase ekvivalentná nerovnosti

$$27x^2 \leqq 4(x+1)^3.$$

Túto možno jednoduchým výpočtom upraviť na tvar

$$0 \leqq (x-2)^2 . (4x+1) . \tag{3}$$

Táto nerovnosť platí pre každé x nezáporné, a teda (1) platí pre každé p, q nezáporné. Rovnosť v (3) nastáva práve vtedy, keď $x = 2$. Teda v (1) nastáva rovnosť práve vtedy, keď $p = 2q$.

A — P — 4

Trojuholník má obsah 32 cm², súčet veľkosti jeho dvoch strán je 16 cm. Určte veľkosť tretej strany.

Riešenie. Pretože o trojuholníku sú uvedené len dva údaje, nie je zdanlivo veľkosť tretej strany určená jednoznačne. Pokúsme sa určiť aký môže byť obsah P trojuholníka ABC s veľkosťami strán $a = BC$, $c = AB$, ak je $a + c = 16$ cm. Dostaneme

$$P \leqq \tfrac{1}{2}ac,$$

pričom rovnosť nastáva práve keď $AB \perp BC$. Z Cauchyho nerovnosti $\sqrt{ac} \leqq \frac{1}{2}(a + c)$ máme ďalej

$$\tfrac{1}{2}ac \leqq \tfrac{1}{8}(a + c)^2 = \tfrac{1}{8}(16\text{ cm})^2 = 32\text{ cm}^2,$$

pričom rovnosť nastáva práve keď $a = c$. Zistili sme teda, že podmienkam úlohy vyhovuje jediný trojuholník, a to pravouhlý s odvesnami dĺžky 8 cm. Dĺžka jeho prepony je určená jednoznačne, a to $b = 8\sqrt{2}$.

KATEGORIE B

B — P — 1

Funkce $x \to \operatorname{sign} x$ je definována na množině **R** všech reálných čísel takto: Je-li $x > 0$, je $\operatorname{sign} x = 1$, je-li $x = 0$, je $\operatorname{sign} x = 0$, je-li $x < 0$, je $\operatorname{sign} x = -1$.

Nalezněte všechny dvojice reálných čísel x, y, pro něž platí:

$$\operatorname{sign}(x + y) \geqq \operatorname{sign} x + \operatorname{sign} y\,.$$

Pro která x, y nastane rovnost?

Řešení. Je-li $x = 0$, je nerovnost zřejmě splněna se znaménkem rovnosti; je-li $y = 0$, rovněž, a je-li $x + y = 0$, také.

V dalším proto budeme předpokládat, že $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $x + y \neq 0$. Utvořme tabulku možností ($+$ znamená kladný, $-$ záporný; $L - P$ je rozdíl levé a pravé strany nerovnosti :

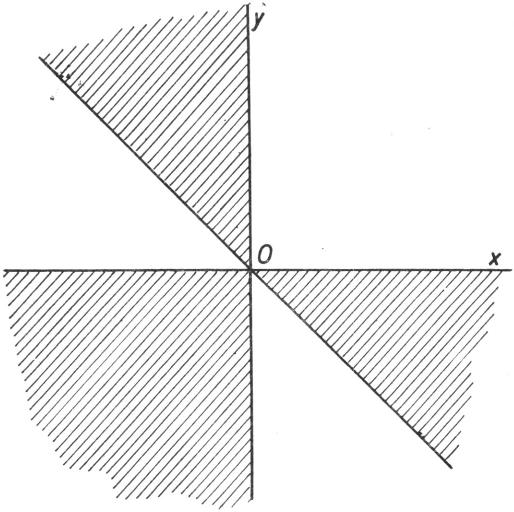
x	y	$x + y$	$L - P$
$+$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$-$	nelze
$+$	$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	nelze
$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$

Dostaneme, že řešením je (viz vyšrafované oblasti v obr. 1) sjednocení tří množin $\{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ x \leqq 0 \land y \leqq 0\} \cup \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ 0 \leqq -x \leqq y\} \cup \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ -x \leqq y \leqq 0\}$. Jejich grafem v rovině x, y jsou tři duté úhly se společným vrcholem (počátkem). Rovnost nastane, právě když $x = 0$ nebo $y = 0$ nebo $x + y = 0$, tj. leží-li odpovídající body na některém ramenu úhlů, popř. ve společném vrcholu.

B — P — 2

Plechový kryt má tvar kužeľa s polomerom základne r a výškou v. Bolo by možné z toho istého množstva rovnakého plechu zhotoviť iný kryt kužeľového tvaru s rovnakým objemom? Ak áno, koľko?

Řešení. Plechový kryt uvedený v úloze nechť má



Obr. 1

rozměry $r = a$, $v = b$. Jeho objem je tedy $V = \frac{1}{3}\pi a^2 b$ a obsah jeho pláště je $P = \pi a\sqrt{a^2 + b^2}$. Nechť jiný kryt o objemu V a s obsahem pláště P má rozměry $r = x$, $v = y$. Potom platí

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi a^2 b\,,$$

$$\pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi a\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Po úpravě dostáváme soustavu rovnic pro neznámé x, y:

$$x^2 y = a^2 b ,$$

$$x^4 + x^2 y^2 = a^4 + a^2 b^2 . \tag{1}$$

Dosadíme-li z rovnice (1) do rovnice (2) za y, bude pro neznámou x platit rovnice

$$x^6 - x^2(a^4 + a^2 b^2) + a^4 b^2 = 0 .$$

Levou stranu snadno upravíme na tvar

$$(x^2 - a^2)(x^4 + a^2 x^2 - a^2 b^2) = 0 .$$

Řešení $x = a$ známe, řešení $x = -a$ nemá význam. Řešme tedy rovnici

$$x^4 + a^2 x^2 - a^2 b^2 = 0 .$$

Pro x^2, kterou označíme t, dostáváme kvadratickou rovnici

$$t^2 + a^2 t - a^2 b^2 = 0$$

Protože záporné ani imaginární kořeny nepřicházejí v úvahu, zbývá jediné řešení

$$x = \sqrt{-\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{2} a \sqrt{a^2 + 4b^2}} .$$

Z rovnice (1) vypočteme

$$y = \frac{2ab}{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}} = \frac{a}{2b}\left(a + \sqrt{a^2 + 4b^2}\right) .$$

Zkouškou se přesvědčíme, že pro takto vypočtené hodnoty má kryt objem V a jeho plášť obsah P. Nyní je třeba ještě zjistit, zda takto vypočtená dvojice x, y je jiná než původní dvojice a, b. Předpokládejme tedy, že

$$a = \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 4b^2}}\,.$$

Odtud však snadno dostaneme, že $b = a\sqrt{2}$, a obráceně z rovnosti $b = a\sqrt{2}$ plyne uvedená rovnost a $a = x$.

Závěr. Má-li zhotovený kryt rozměry, pro něž platí $v = r\sqrt{2}$, pak žádný další kryt o objemu V z téhož množství plechu nelze vyrobit. Neplatí-li $v = r\sqrt{2}$, pak lze zhotovit právě jeden další takový kryt.

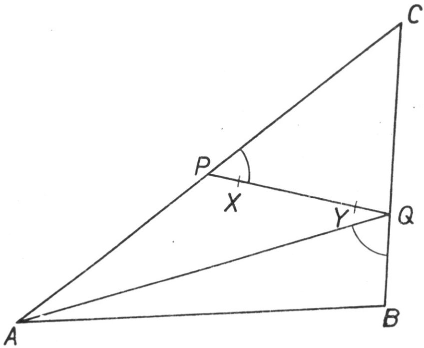
B — P — 3

Je-li trojúhelník $\mathbf{T}_1$ celý obsažen v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, pak platí:

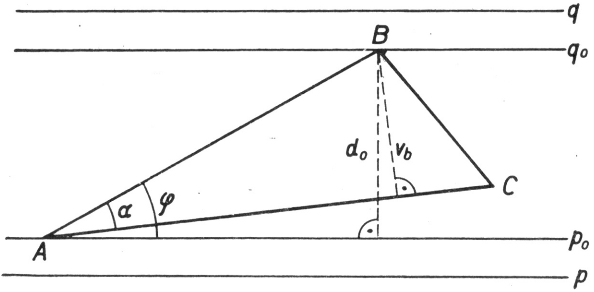
1. délka největší strany trojúhelníka $\mathbf{T}_1$ je menší nebo rovna délce největší strany trojúhelníka $\mathbf{T}_2$;
2. délka nejmenší výšky trojúhelníka $\mathbf{T}_1$ je menší nebo rovna délce nejmenší výšky trojúhelníka $\mathbf{T}_2$.

Řešení. 1. Nechť XY je největší strana trojúhelníka $\mathbf{T}_1$. Leží-li X, Y v jedné straně trojúhelníka $\mathbf{T}_2$, je $|XY| \leqq m$, kde m označuje délku největší strany trojúhelníka $\mathbf{T}_2$. Nejsou-li body X, Y v jedné straně (obr. 2) trojúhelníka $\mathbf{T}_2$ s vrcholy A, B, C, nechť P, Q jsou body, v nichž přímka XY protíná hranici. Nechť např. P je na straně AC, Q na straně BC. Alespoň jeden z úhlů CPQ, CQP je ostrý; nechť pro určitost $\sphericalangle CPQ < \pi/2$. Pak $|PQ| \leqq |AQ|$. Protože platí $\sphericalangle AQC \leqq \pi/2$ nebo $\sphericalangle AQB \leqq \pi/2$, je v prvním případě $|AQ| \leqq |AC|$, v druhém $|AQ| \leqq |AB|$, tedy vždy $|AQ| \leqq m$. Celkem proto $|XY| \leqq |PQ| \leqq |AQ| \leqq m$, jak jsme měli dokázat.

2. Nejprve ukážeme, že délka nejmenší výšky trojúhelníka **T** je rovna minimální šířce pásu mezi dvěma rovnoběžkami, který trojúhelník **T** obsahuje. Nechť p, q jsou (obr. 3) rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d, nechť trojúhelník $\mathbf{T} = ABC$ s nejmenší výškou velikosti v_0 je celý obsažen v pásu mezi p a q. Označme p_0 rovno-



Obr. 2



Obr. 3

běžku s p tím vrcholem trojúhelníka **T**, který je k p_0 nejblíže, například bodem A. Obdobně nechť q_0 je rovnoběžka s q_0 tím vrcholem, který je ke q nejblíže (tento vrchol je jiný než A; proč?). Nechť je to například vrchol B. Označme ještě π^+ (popř. $\varkappa^+$) poloroviny s hranicí p_0 (popř. q_0) obsahující q_0 (popř. p_0). Vzdálenost d_0 rovnoběžek p_0, q_0 splňuje $d_0 \leqq d$. Ta polorovina s hranicí AB, která obsahuje bod C, má jako průnik alespoň s jednou z polorovin π^+, $\varkappa^+$ dutý úhel, o jehož velikosti Φ platí $\Phi \leqq \pi/2$. Je-li vrchol tohoto úhlu bod A, platí o úhlu α trojúhelníka **T** při vrcholu A, že $\alpha \leqq \Phi$. Je proto $d_0 = |AB| \sin \Phi$, $v_b = |AB| \sin \alpha$, kde v_b je velikost výšky trojúhelníka **T** z vrcholu B. Celkem tedy

$$d \geqq d_0 = |AB| \sin \Phi \geqq |AB| \sin \alpha \geqq v_b \geqq v_0 .$$

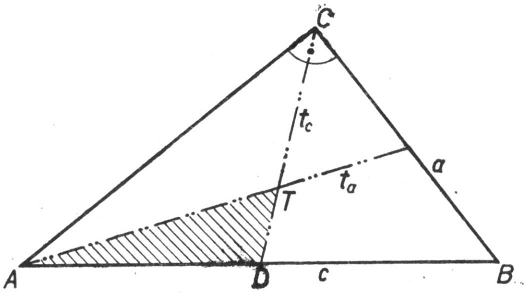
Přitom však existuje pás obsahující trojúhelník **T**, jehož šířka je rovna v_0. Je-li v_0 velikost výšky z vrcholu C, hraniční přímky pásu jsou přímky AB a rovnoběžka s ní bodem C.

Vlastní řešení. Existuje pás mezi rovnoběžkami, jehož šířka je rovna nejmenší výšce trojúhelníka $\mathbf{T}_2$ a který $\mathbf{T}_2$ obsahuje. Protože tento pás obsahuje i trojúhelník $\mathbf{T}_1$. plyne výsledek z předchozí věty.

B — P — 4

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána délka přepony a délka těžnice k jedné odvěsně. Uveďte podmínky řešitelnosti.

Řešení. Hledaný trojúhelník označme ABC; nechť jsou dány délka c přepony AB a délka t_a těžnice vycházející z vrcholu A. Označme (obr. 4) D střed přepony, T těžiště. Platí $|DC| = \frac{1}{2}c$, a dále $|AT| = \frac{2}{3}t_a$, $|DT| = \frac{1}{6}c$, $|AD| = \frac{1}{2}c$. Z daných délek c a t_a lze tedy sestrojit trojúhelník ADT, pokud ovšem je splněna



Obr. 4

trojúhelníková nerovnost $\frac{1}{2}c - \frac{1}{6}c < \frac{2}{3}t_a < \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}c$, což lze upravit na $c < 2t_a < 2c$.

K trojúhelníku ADT pak sestrojíme body C a B. Bude $|DC| = 3|DT| = |AD| = |DB|$, takže podle Thaletovy věty je výsledný trojúhelník skutečně pravoúhlý.

Závěr. Až na shodnost existuje právě jedno řešení, je-li $c < 2t_a < 2c$; jinak řešení neexistuje.

C — P — 1

Kolika způsoby je možné číslo 78 rozložit na součet tří přirozených čísel? Přitom dva rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců, tedy například rozklady $10 + 10 + 58$, $10 + 58 + 10$, $58 + 10 + 10$, považujeme za stejné.

Řešení. Všechny uspořádané trojice přirozených čísel, jejichž součet je 78, dostaneme tímto způsobem: První číslo p zvolíme libovolně mezi 1 a 76, druhé číslo q můžeme zvolit libovolně mezi 1 a číslem $78 - p - 1$, třetí číslo je pak určeno jednoznačně, rovná se $78 - p - q$. Při pevně zvoleném p dostaneme $78 - p - 1$ takových trojic, a protože p probíhá přirozená čísla 1, 2, ..., 76, máme celkem $76 + 75 + \ldots + 1 = (76 + 1) + (75 + 2) + \ldots + (39 + 38) = 38 . 77 = 2\,926$ uspořádaných trojic přirozených čísel, jejichž součet je vždy 78. Každý rozklad v tři navzájem různé sčítance se vyskytuje mezi těmito trojicemi šestkrát, například rozklad $7 + 9 + 62$ se vyskytuje jako trojice (7, 9, 62), (7, 62, 9), (9, 7, 62), (9, 62, 7), (62, 7, 9), (62, 9, 7). Rozkladů, ve kterých jsou právě dva sčítance stejné, je celkem 37. Jsou to rozklady $1 + 1 + 76$, $2 + 2 + 74$, ..., $38 + 38 + 2$ s výjimkou rozkladu $26 + 26 + 26$. Každý takový rozklad se vyskytuje mezi našimi trojicemi třikrát, všimněme si třeba příkladu ze zadání úlohy. Pouze v rozkladu $26 + 26 + 26$ jsou všechny tři sčítance stejné. Označíme-li x počet rozkladů čísla 78 v tři navzájem různé sčítance, je $6x + 3.37 + 1 = 2926$, odkud plyne $x = 469$ a hledaný počet rozkladů je $x + 37 + 1 = 507$.

C — P — 2

Je-li přirozené číslo $n > 10$ druhou mocninou lichého čísla, pak je předposlední cifra dekadického zápisu čísla n číslo sudé. Dokažte.

Řešení. Číslo, jehož druhou mocninou je číslo n, napíšeme ve tvaru $10b + c$, kde b je číslo celé a číslo c je liché přirozené číslo menší než 10. Pak je $n = 100b^2 + 10.2bc + c^2$. Předposlední cifru tohoto čísla dostaneme tak, že k počtu desítek čísla c^2 přičteme počet jednotek čísla $2bc$ a z obdrženého součtu vezmeme poslední cifru. Protože číslo c může nabýt pouze hodnot 1, 3, 5, 7, 9, je počet desítek čísla c^2 vždy číslo sudé, číslo $2bc$ je rovněž sudé, a proto je i jejich součet a tím také jeho poslední cifra číslo sudé.

C — P — 3

Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S. Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k, jehož vrchol A leží na přímce p. Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.

Řešení. Předpokládejme, že jsme úlohu vyřešili. Potom je $|SA| = r\sqrt{2}$, bod A musí tedy nutně ležet na kružnici $k' = (S; r\sqrt{2})$. Kružnice k' protíná přímku p

právě ve dvou bodech, tím dostáváme dvě řešení. Každý z obdržených průsečíků můžeme totiž doplnit na čtverec opsaný kružnici k. Kdyby tato dvě řešení splynula, měl by čtverec opsaný kružnici k dva vrcholy na přímce p. Ta by tedy musela být buď jeho stranou, nebo jeho úhlopříčkou. Stranou nemůže být, protože se kružnice k nedotýká, a úhlopříčkou také nemůže být, protože neprochází středem kružnice k. Tím je dokázáno, že obdržená řešení jsou různá.

C — P — 4

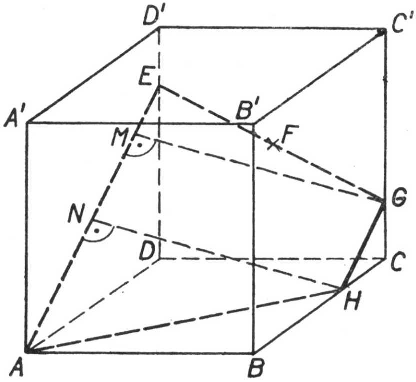
Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ s hranou délky $a = 3$ a body E a F určené podmínkami:

1. E je bodem úsečky DD' a $|ED'| = \frac{1}{4}|DD'|$,
2. bod F je průsečíkem úhlopříček stěny $DCC'D'$.

Vypočtěte obsah P části roviny AEF ohraničené průnikem této roviny se stěnami krychle.

Řešení. Část roviny, jejíž obsah máme určit, je lichoběžník $EAHG$ (obr. 5), protože přímky HG a AE jsou průsečnice téže roviny s rovnoběžnými stěnami krychle. Ze stejného důvodu jsou trojúhelníky ADE, HCG podobné, přičemž $|GC| = |ED'| = \frac{3}{4}$. Z podobnosti zmíněných trojúhelníků plyne $|HC| = 1$. Pomocí Pythagorovy věty můžeme již vypočíst všechny strany lichoběžníka $EAHG$. Dostaneme $|AH|^2 = 3^2 + 2^2$, $|EG|^2 = 3^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{45}{4}$, $|EA| = \frac{15}{4}$, $|HG| = \frac{5}{4}$. Veďme body G, H výšky lichoběžníka. Ty protínají základnu AE ve vnitřních bodech M, N, protože úhly AEG, HAE jsou ostré. Označme $|EM| = x$, $|AN| = y$

a výšku lichoběžníka v. Je $x + y + |MN| = x + y + |HG| = |AE|$, tj. $x + y = \frac{5}{2}$. Dále je $x^2 + v^2 = |EG|^2$, $y^2 + v^2 = |AH|^2$. Odečteme-li poslední dvě rovnice, můžeme vypočíst x, y, protože známe jejich



Obr. 5

součet. Dostaneme $x = \frac{9}{10}$, $y = \frac{8}{5}$ a pro výšku lichoběžníka pak $v = \frac{3}{5}\sqrt{29}$. Odtud pak snadno vypočteme obsah lichoběžníka: $P = \frac{3}{2}\sqrt{29}$, protože aritmetický průměr obou základen je $\frac{5}{2}$.

Z — P — 1

Napište za sebou bez mezer všechna sudá přirozená čísla. Dostanete tak sled číslic

24681012 . . . .

Která číslice stojí v tomto sledu na 1977. místě?

Řešení. Rozdělíme čísla daného sledu na skupiny čísel jednociferných, dvojciferných atd. Jednociferná sudá čísla jsou čtyři: 2, 4, 6, 8. Dvojciferná sudá čísla jsou z intervalu $\langle 10, 99 \rangle$. V tomto intervalu je $99 - 9 = 90$ čísel, z toho je polovina, tj. 45, sudých. Dále přikročíme k intervalu $\langle 100, 999 \rangle$, který obsahuje $\frac{1}{2}(999 - 99) = 450$ sudých trojciferných čísel. Dosavadní výsledek se dá stručně a přehledně zapsat tabulkou:

	Interval	Počet sudých čísel	Zaujmou míst
	$\langle 2, 9 \rangle$	4	4
	$\langle 10, 99 \rangle$	45	$2 . 45 = 90$
	$\langle 100, 999 \rangle$	450	$3 . 450 = 1350$
Celkem	$\langle 2, 999 \rangle$	499	1444

Do počtu 1977 zbývá ještě $1977 - 1444 = 533$ míst, tj. 133 úplných čtyřciferných sudých čísel, která počínají číslem 1000 a končí číslem 1264. Tato čísla obsadí celkem 1444 + 532 = 1976 míst. Na následujícím místě, v pořadí 1977. začíná sudé číslo 1266, a to cifrou 1.

Z — P — 2

Aritmetický průměr dvou kladných čísel je jejich poloviční součet. Harmonický průměr dvou kladných čísel je převrácené číslo k aritmetickému průměru převrácených čísel k oběma daným číslům.

a) Zvolte kladná čísla x, y (např. $x = 80$, $y = 20$), vypočtěte jejich aritmetický průměr a, harmonický průměr h a ověřte si, že platí

$$ah = xy\,.$$

b) Pokuste se dokázat tento vzorec obecně.

c) Nákladní vůz projel dvakrát tutéž trasu: poprvé rychlostí 40 km/h, po druhé rychlostí 60 km/h. Jaká je průměrná rychlost obou jízd: aritmetický průměr obou rychlostí, nebo jejich harmonický průměr?

Řešení. Slovní definice aritmetického průměru a a harmonického průměru h dvou kladných čísel x, y zapíšeme nejprve vzorci

$$a = \frac{1}{2}(x + y), \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \tag{1}$$

Výpočet se zlomky dá postupně tyto vztahy:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y + x}{xy} = \frac{x + y}{2xy}$$

a tedy

$$h = \frac{2xy}{x + y}. \tag{2}$$

Znásobením obou vzorců pro a, h dostaneme

$$ah = xy\,.$$

Numerické řešení předchází algebraickému výpočtu; je třeba dosadit též $x = y$.

c) *Za průměrnou rychlost* pokládáme tu stálou rychlost, kterou by řidič musel jet tam i zpět, aby celou cestu vykonal za stejnou dobu, jako ji vykonal při různých rychlostech.

Označí-li se rychlosti jízdy v km/h x (tam) a y (zpět), d délka trati v km, p průměrná rychlost, je

$$\frac{2d}{p} = \frac{d}{x} + \frac{d}{y}$$

čili

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Průměrná rychlost je tedy *harmonický* průměr obou rychlostí x, y. V numerickém příkladě

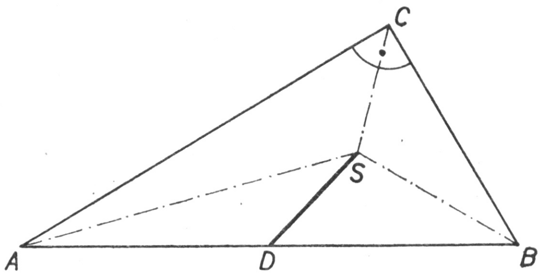
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{60}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{120} = \frac{1}{48}\,,$$

$p = 48$ (km/h). Aritmetický průměr obou rychlostí je

$$a = \tfrac{1}{2}(40 + 60) = 50\ (\mathrm{km/h})\,.$$

Z — P — 3

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Bod D je středem jeho přepony AB a bod S je středem jemu vepsané kružnice.



Obr. 6

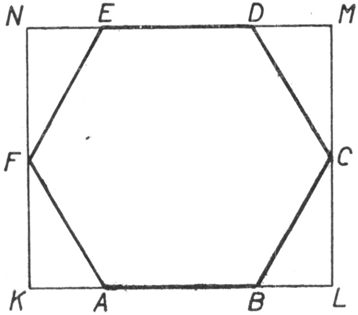
Dokažte: Jestliže $\sphericalangle BAC = 30°$, potom platí $|CS| = |DS|$.

Řešení (obr. 6). Protože je $|AB| = 2\,|BC|$ je $|BD| = |BC|$, a protože $\sphericalangle CBD = 60°$, je $\triangle BCD$ rovnostranný. Osa o úhlu $\sphericalangle CBD$ je také osou úsečky CD. Proto pro každý bod X osy o platí $|CX| = |DX|$. Jedním z těchto bodů X je i střed S kružnice vepsané $\triangle ABC$.

Z — P — 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte obdélník $KLMN$ tak, že úsečka AB je částí úsečky KL, úsečka ED je částí úsečky MN a body C, F leží po řadě uvnitř úseček LM a KN. Vypočtěte poměr obsahů obdélníka $KLMN$ a daného šestiúhelníka.

Řešení (obr. 7). Šestiúhelník se skládá ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, z nichž žádné dva se nepřekrývají; jeden z nich je $\triangle CDS$ (S je střed



Obr. 7

kružnice opsané šestiúhelníku $ABCDEF$). Obdélník $KLMN$ vznikne ze šestiúhelníka připojením čtyř pravoúhlých trojúhelníků AFK, BCL, CDM a EFN; z nich vždy dva skládají rovnostranný trojúhelník shodný s $\triangle CDS$. Shodnost čtyř připojených trojúhelníků se dokáže pomocí osových symetrií (není třeba vět o shodnosti trojúhelníků).

Šestiúhelník $ABCDEF$ se skládá z $2 . 6 = 12$ pravoúhlých trojúhelníků shodných s $\triangle CDM$, obdélník $KLMN$ se skládá z $12 + 4 = 16$ takových trojúhelníků. Poměr obsahů je tedy $16 : 12 = 4 : 3$.