24. ročník matematické olympiády

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. pp. 133–153.

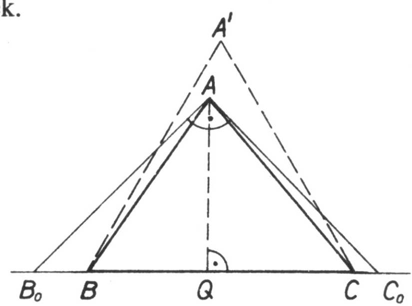
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404662

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

A – III – 1

Je-li **T** ostroúhlý trojúhelník o obsahu 1, pak existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož obsah nepřevyšuje $\sqrt{3}$ a který trojúhelník **T** obsahuje. Dokažte.

Řešení. Nechť ABC je daný trojúhelník **T** s obsahem $P = 1$ a BC je jeho největší strana. Označme Q patu výšky příslušné vrcholu A, v její délku. Tato výška je zřejmě nejmenší z výšek.



Obr. 38

Rozlišujeme tyto případy:

a) $\sphericalangle BAQ \leqq 45°$, $\sphericalangle CAQ \leqq 45°$ (obr. 38). Pak pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník AB_0C_0 s nejmenší výškou $v = AQ$ obsahuje trojúhelník **T** a o jeho obsahu P_1 platí

$$P_1 = v^2 .$$

Strana BC je největší stranou $\triangle ABC$, a proto výška v není větší než výška rovnostranného trojúhelníku $A'BC$, tj.

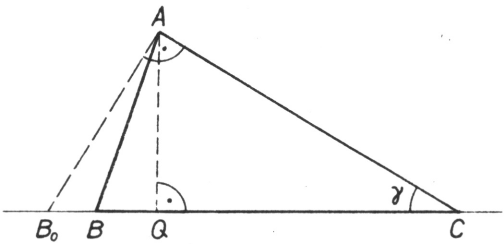
$$v \leqq \tfrac{1}{2}BC\sqrt{3},$$

tedy

$$P_1 = v^2 \leqq \left(\tfrac{1}{2}BC \, . \, v\right)\sqrt{3},$$

tj. skutečně

$$P_1 \leqq \sqrt{3}.$$



Obr. 39

b) Jeden z úhlů $\sphericalangle BAQ$, $\sphericalangle CAQ$ je větší než 45°, např. (obr. 39)

$$\sphericalangle CAQ > 45^\circ.$$

Pak je

$$\sphericalangle BAQ < 45^\circ.$$

Označme B_0 průsečík kolmice k AC v bodě A s přímkou BC. Trojúhelník B_0AC je pravoúhlý, obsahuje **T** a o jeho obsahu P_1 platí

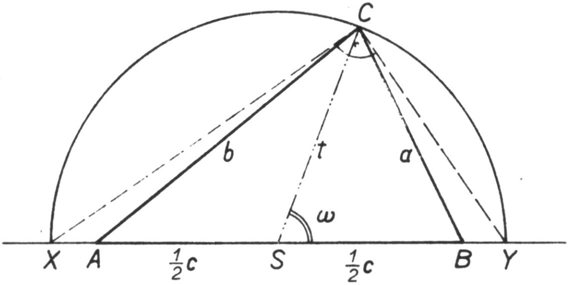
$$P_1 = \frac{P_1}{P} = \frac{B_0C}{BC} \leqq \frac{B_0C}{AC} = \frac{1}{\cos\gamma} \leqq \sqrt{2} < \sqrt{3},$$

neboť $\sphericalangle B_0CA = \gamma < 45^\circ$.

Tím je úloha rozřešena.

Jiné řešení (podle *Stanislava Červinky*, studenta 3.c Akademického gymnázia v Praze 1). Označme (obr. 40) vrcholy daného trojúhelníka A, B, C tak, aby platilo

$$a \leqq c \quad \text{a} \quad b \leqq c\,. \tag{1}$$



Obr. 40

Dále označme S střed strany AB, $CS = t$, $\sphericalangle CSB = \omega$. Trojúhelník ABC je ostroúhlý, takže

$$2t > AB\,.$$

Na polopřímkách SA a SB vně úsečky AB tedy existují po řadě takové body X a Y, že

$$SX = SY = t\,.$$

Trojúhelník XYC obsahuje daný $\triangle ABC$. Dokážeme, že obsah $\triangle XYC$ nepřevyšuje $\sqrt{3}$.

Trojúhelník ABC má obsah 1, takže

$$1 = \tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}ct(\sin\omega + \sin(\pi - \omega)) = \tfrac{1}{2}ct\sin\omega\,. \tag{2}$$

Pro obsah trojúhelníku XYC platí

$$P = \tfrac{1}{2}t^2(\sin \omega + \sin (\pi - \omega) = t^2 \sin \omega\,,$$

tedy po přihlédnutí k rovnostem (2) máme

$$P = 2\,.\,\frac{t}{c}\,. \tag{3}$$

Podle známého vzorce pro velikost těžnice v trojúhelníku je

$$t = \tfrac{1}{2}\,.\,\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}\,,$$

takže z rovnosti (3) dostáváme

$$P = \sqrt{2\,.\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) - 1}\,.$$

Podle (1) je $\dfrac{a}{c} \leqq 1$ a $\dfrac{b}{c} \leqq 1$, a proto

$$P \leqq \sqrt{2(1 + 1) - 1}\,,$$

tj.

$$P \leqq \sqrt{3}\,.$$

Tím je tvrzení obsažené v textu dané úlohy zcela dokázáno.

A – III – 2

Dokažte, že soustava rovnic

$$[x]^2 + [y] = 0\,, \qquad 3x + y = 2 \tag{4}$$

má nekonečně mnoho řešení a že pro všechna její řešení platí

$$0 < x < 4\,, \qquad -9 \leqq y \leqq 1\,.$$

Přitom symbol $[\alpha]$ (celá část z α) značí celé číslo, pro které platí

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leqq \alpha .$$

Řešení. Z obou rovnic (4) vyloučíme y a dostaneme rovnici

$$[x]^2 + [2 - 3x] = 0 . \tag{5}$$

Pro celou část (funkci $[\alpha]$) použijeme vzorců:

Pro všechny reálná α a pro všechny celá k platí

$$[k + \alpha] = k + [\alpha] . \tag{6}$$

Pro všechna reálná β platí

$$[3\beta] = 3[\beta] + \varepsilon_1 , \tag{7}$$

kde $\varepsilon_1 = 0$ nebo 1 nebo 2.

Pro všechna reálná γ platí

$$[-\gamma] = -[\gamma] + \varepsilon_2 , \tag{8}$$

kde $\varepsilon_2 = -1$ nebo 0.

S použitím (6), (7), (8) vypočteme

$$[2 - 3x] = 2 + [-3x] = 2 + 3[-x] + \varepsilon_1 =$$
$$= 2 + 3(-[x] + \varepsilon_2) + \varepsilon_1 ,$$

tj.

$$[2 - 3x] = -3[x] + 2 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 . \tag{9}$$

Proměnná $2 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$ může nabýt hodnot

$$\varepsilon_3 = -1, 0, 1, 2, 3, 4 . \tag{10}$$

Spojením (5) a (9) dostaneme rovnici

$$[x]^2 - 3[x] + \varepsilon_3 = 0 . \tag{11}$$

Diskriminant rovnice (11) může nabýt vzhledem k (10) hodnot

$$\Delta = 13, 9, 5, 1, -3, -7 .$$

Protože kořen $[x]$ rovnice (11) musí být celé číslo, přicházejí v úvahu jen hodnoty $\Delta = 9; 1$, tj. $\varepsilon_3 = 0; 2$. Odpovídající kořeny $[x]$ obou rovnic (11) jsou (v odpovídajícím pořadí)

$$[x] = 0, 3, 1, 2 .$$

Z rovnice (9) vypočteme a zkouškou se přesvědčíme, že soustava (4) má tato řešení:

$$\tfrac{1}{3} < x \leqq \tfrac{2}{3}, \qquad x = 1 , \qquad x = 2 , \qquad \tfrac{10}{3} < x \leqq \tfrac{11}{3};$$

příslušná y se vypočtou z rovnice $3x + y = 2$.

Jiné řešení (podle *Jana Kratochvíla*, studenta třídy 1.a gymnázia v Pardubicích).

a) Řešením rovnice (5) je zřejmě každé číslo x, pro které platí

$$[x] = 0 \quad \text{a zároveň} \quad [2 - 3x] = 0 ,$$

tj.

$$0 \leqq x < 1 \quad \text{a zároveň} \quad 0 \leqq 2 - 3x < 1 ,$$

odkud plyne

$$x \in (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\rangle .$$

Příslušné y se vypočte z druhé rovnice soustavy (4); dostáváme tak, že

$$y = 2 - 3x\,.$$

Řešením soustavy (4) je tedy každá dvojice čísel x, y, kde

$$x \in \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\rangle \text{ a } y = 2 - 3x\,.$$

Tím jsme dokázali, že soustava (4) má nekonečně mnoho řešení.

b) Dále je třeba dokázat, že žádná dvojice čísel x, y, která nesplňuje zároveň nerovnosti

$$x > 0\,, \tag{12}$$

$$x < 4\,, \tag{13}$$

$$y \geqq -9\,, \tag{14}$$

$$y \leqq 1\,, \tag{15}$$

není řešením soustavy (4). Důkaz provedeme nepřímo.

α) Předpokládejme, že soustava (4) má řešení x, y, kde $x \leqq 0$. Potom z druhé rovnice soustavy (4) plyne, že $y \geqq 2$, tj. $[y] \geqq 2$. Platí tedy

$$[x]^2 + [y] \geqq 2\,,$$

což je spor s první rovnicí soustavy (4), tj. platí nerovnost (12).

β) Předpokládejme, že existuje takové řešení x, y soustavy (4), že $x \geqq 4$. Položme

$$x = [x] + \varphi\,, \qquad y = [y] + \psi\,,$$

kde

$$0 \leqq \varphi < 1\,, \qquad 0 \leqq \psi < 1\,. \tag{16}$$

Ze soustavy (4) pak dostáváme

$$[y] = -[x]^2,$$
$$3[x] + 3\varphi + [y] + \psi = 2,$$

odkud plyne

$$3\varphi + \psi = 2 + [x]([x] - 3). \tag{17}$$

Z předpokladu $x \geqq 4$ plyne, že $[x] \geqq 4$, takže

$$[x]([x] - 3) \geqq 4.$$

Pak z rovnice (17) dostáváme

$$3\varphi + \psi \geqq 6,$$

což je ve sporu s nerovnostmi (16). Platí tedy (13).

γ) Předpokládejme, že soustava (4) má takové řešení x, y, že $y < -9$. Potom $[y] \leqq -10$. Podle první rovnice soustavy (4) je tedy $[x]^2 \geqq 10$, tj.

$$x \geqq 4 \quad \text{nebo} \quad x < -3.$$

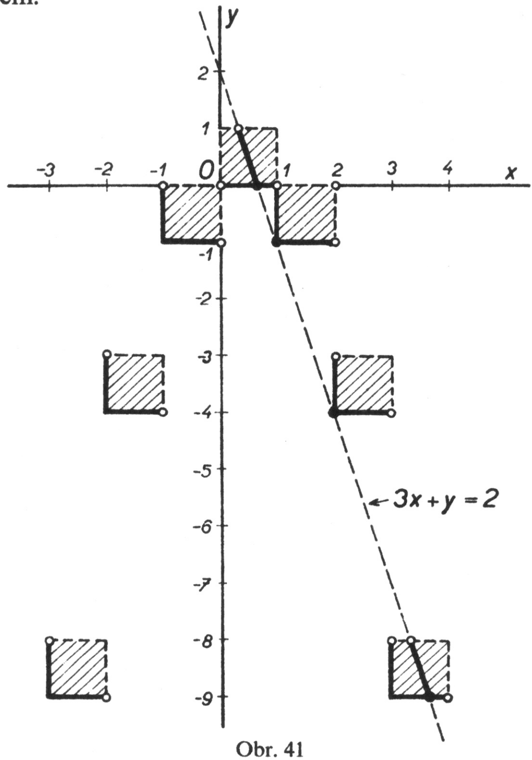
Tyto nerovnosti jsou však ve sporu s dokázanými nerovnostmi (12) a (13), takže platí (14).

δ) Předpokládejme, že existuje takové řešení x, y soustavy (4), pro které platí $y > 1$. Pak ovšem $[y] \geqq 1$. Samozřejmě $[x]^2 \geqq 0$, takže

$$[x]^2 + [y] \geqq 1,$$

což je spor s první rovnicí soustavy (4). Platí tedy nerovnost (15).

Poznámka. Při řešení úlohy **A – III – 2** lze s výhodou užít grafického znázornění. Sestrojíme graf první rovnice (4); je to sjednocení polouzavřených čtverců, k nimž náleží vždy levý dolní vrchol a polouzavřené strany levá a dolní (viz obr. 41). Tlustě vytažené části přímky $3x + y = 2$ jsou grafickým znázorněním všech řešení dané soustavy (4). Intuitivně zjištěný výsledek je ovšem nutno zkontrolovat výpočtem.



Obr. 41

Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$x_1(x_6 + x_2) = x_3 + x_5\,, \tag{18}$$

$$x_2(x_1 + x_3) = x_4 + x_6\,, \tag{19}$$

$$x_3(x_2 + x_4) = x_5 + x_1\,, \tag{20}$$

$$x_4(x_3 + x_5) = x_6 + x_2\,, \tag{21}$$

$$x_5(x_4 + x_6) = x_1 + x_3\,, \tag{22}$$

$$x_6(x_5 + x_1) = x_2 + x_4 \tag{23}$$

s neznámymi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Riešenie. Nech usporiadaná šestica čísel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ je riešením sústavy (18)–(23). Potom zrejme tiež každá cyklická permutácia čísel tejto šestice danej sústave vyhovuje.

Sčítaním všetkých rovníc danej sústavy dostaneme

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_1 = \\ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

čiže

$$x_2(x_1 + x_3) + x_4(x_3 + x_5) + x_6(x_5 + x_1) = \\ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\,. \tag{24}$$

Ak do (24) dosadíme z (19), (21), (23), dostaneme

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6\,. \tag{25}$$

Z rovností (18) a (21), (19) a (22), resp. (20) a (23), dostávame, že platí:

$$x_2 + x_6 \neq 0 \Leftrightarrow x_3 + x_5 \neq 0, \quad x_4 + x_6 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_3 \neq 0,$$
$$x_2 + x_4 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_5 \neq 0 \tag{26}$$

a taktiež

$$x_3 + x_5 \neq 0 \Rightarrow x_1 x_4 = 1, \qquad x_1 + x_3 \neq 0 \Rightarrow x_2 x_5 = 1,$$
$$x_1 + x_5 \neq 0 \Rightarrow x_3 x_6 = 1. \tag{27}$$

Z čoho vyplýva, že stačí uvažovať o následujúcich 4 prípadoch:

1. Všetky 3 súčty $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sú rôzne od nuly. Potom podľa (27) platí

$$x_1 x_4 = 1, \qquad x_2 x_5 = 1, \qquad x_3 x_6 = 1, \tag{28}$$

z čoho vyplýva, že $x_i \neq 0$ pre všetky $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ak z (28) dosadíme do (18)–(20) za x_2, x_4, x_6, máme

$$x_1\left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_5}\right) = x_3 + x_5,$$

$$\frac{1}{x_5}(x_1 + x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3\left(\frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_1}\right) = x_5 + x_1,$$

z čoho vyplýva:

$$x_1 = x_3 x_5, \qquad x_5 = x_1 x_3, \qquad x_3 = x_1 x_5. \tag{29}$$

Keďže $x_1x_3x_5 \neq 0$, dostaneme vynásobením rovností (29)

$$x_1x_3x_5 = 1\,, \tag{30}$$

z čoho vzhľadom na (29) máme

$$x_1^2 = 1\,, \qquad x_3^2 = 1\,, \qquad x_5^2 = 1$$

čiže

$$|x_1| = 1\,, \qquad |x_3| = 1\,, \qquad |x_5| = 1\,.$$

Z nášho predpokladu o súčtoch $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ vyplýva, že čísla x_1, x_3, x_5 musia byť rovnakých znamienok, z čoho vzhľadom na (30) máme

$$x_1 = x_3 = x_5 = 1 \tag{31}$$

a z (28) hneď dostávame

$$x_2 = x_4 = x_6 = 1\,. \tag{32}$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že (31), (32) dáva riešenie danej sústavy.

2. Práve jeden zo súčtov $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sa rovná nule. Nech platí napr.

$$x_1 + x_3 = 0\,, \qquad x_3 + x_5 \neq 0\,, \qquad x_5 + x_1 \neq 0\,.$$

Potom z (26) a (27) máme

$$x_4 + x_6 = 0\,, \qquad x_1x_4 = 1\,, \qquad x_3x_6 = 1\,,$$

z čoho $x_3 = -x_1$, $x_6 = -x_4$, a teda $x_3x_4 = -1$. Z (25) máme $x_5 = x_2$. V uvažovanom prípade teda platí

$$x_3 = -x_1\,, \qquad x_4 = \frac{1}{x_1}\,, \qquad x_5 = x_2\,, \qquad x_6 = -\frac{1}{x_1}\,, \tag{33}$$

pričom z (18), (20), resp. (21), (23) pre x_1, x_2 po dosadení zo (33) dostaneme

$$\begin{aligned} -1 + x_1x_2 &= -x_1 + x_2\,, \\ -x_1x_2 - 1 &= x_2 + x_1 \end{aligned}$$

a sčítaním oboch rovností dostávame $x_2 = -1$ pri *ľubovoľnom* $x_1 = p \neq 0$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že v tomto prípade sústave (18)–(23) vyhovuje šestica čísel

$$x_1 = p,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = -p,\quad x_4 = \frac{1}{p},\quad x_5 = -1,\quad x_6 = -\frac{1}{p},$$

pričom p je ľubovoľné číslo rôzne od $0, -1, 1$. Posledné dve čísla musíme vylúčiť preto, lebo podľa predpokladu $x_3 + x_5 = -p - 1 \neq 0$, $x_5 + x_1 = -1 + p \neq 0$.

3. Práve dva zo súčtov $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sú rovné nule. Nech teda

$$x_1 + x_3 = 0\,, \qquad x_3 + x_5 = 0\,, \qquad x_5 + x_1 \neq 0\,.$$

Podľa (26) a (27) potom platí

$$x_4 + x_6 = 0\,, \qquad x_2 + x_6 = 0\,, \qquad x_3x_6 = 1$$

a vzhľadom na (25) dostávame

$$x_2 = x_1,\quad x_3 = -x_1,\quad x_4 = x_1,\quad x_5 = x_1,\quad x_6 = -\frac{1}{x_1}, \tag{34}$$

ale tiež $x_2 = -x_6 = \dfrac{1}{x_1}$, z čoho hneď máme $x_1^2 = 1$.

Pre x_1 sú teda dve možnosti: $x_1 = -1$, $x_1 = 1$, z ktorej každej zodpovedá – vzhľadom na (34) – jedno riešenie danej sústavy:

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = -1\,,$$
$$x_4 = 1\,, \quad x_5 = 1\,, \quad x_6 = -1\,;$$

$$x_1 = -1\,, \quad x_2 = -1\,, \quad x_3 = 1\,,$$
$$x_4 = -1\,, \quad x_5 = -1\,, \quad x_6 = 1\,,$$

o čom sa ľahko presvedčíme dosadením. Druhé riešenie sa dostane z riešenia v prípade 2 pre $p = -1$, resp. pre $p = 1$.

4. Všetky tri súčty $x_1 + x_3$, $x_3 + x_5$, $x_5 + x_1$ sú rovné nule. Potom podľa (26) tiež $x_2 + x_4 = x_4 + x_6 = x_6 + x_2 = 0$ a vzhľadom na (25) v tomto prípade dostávame

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0\,,$$

čo zrejme danej sústave vyhovuje.

Záver. Všetky riešenia danej sústavy možno zhrnúť v nasledujúcej tabuľke ($p \neq 0$):

x_1	1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	1	-1	1	0
x_2	1	-1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	1	1	-1	0
x_3	1	$-p$	-1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	-1	1	1	0
x_4	1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	p	$-\frac{1}{p}$	-1	1	-1	1	0

x_5	1	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	p	$-\frac{1}{p}$	1	1	-1	0
x_6	1	$-\frac{1}{p}$	-1	$\frac{1}{p}$	$-p$	-1	p	-1	1	1	0

A–III–4

Najděte všechny takové hodnoty parametru p, aby rovnice

$$|x-2|+|y-3|+y=p \tag{35}$$

byla rovnicí nějaké polopřímky v rovině x, y.

Řešení. Všimněme si nejprve, že $|z| \geqq 0$ pro všechna z a rovnost nastává, právě když $z=0$, a dále že

$$|z|+z \geqq 0$$

pro všechna (reálná) z a rovnost nastává, právě když $z \leqq 0$.

Upravíme-li tedy rovnost (35) na tvar

$$|x-2|+|y-3|+y-3=p-3\,,$$

je levá strana vždy nezáporná a je rovna nule, právě když

$$x-2=0 \quad \text{a} \quad y-3 \leqq 0\,,$$

tj. pro

$$x=2 \quad \text{a} \quad y \leqq 3\,.$$

Proto dané rovnosti nevyhovuje žádný bod, je-li $p<3$, a pro $p=3$ je množina všech bodů vyhovujících rovnosti (35) zřejmě polopřímka.

Je-li $p > 3$, dostáváme již v polorovině $y \leqq 3$ množinu řešení tvaru $|x - 2| = p - 3$, tj. dvě různé polopřímky $x - 2 = \pm(p - 3)$.

Vyhovuje proto jen
$$p = 3 .$$

Jiné řešení. Útvar, pro jehož body je splněna daná rovnice, je symetrický podle přímky $x = 2$, což plyne z toho, že v rovnici (35) je x obsaženo jenom ve výrazu $|x - 2|$.

Rovnice (35) má být rovnicí nějaké polopřímky. Avšak jestliže polopřímka je souměrná podle nějaké osy, pak musí být podmnožinou této osy. Hledaná polopřímka je tedy podmnožinou přímky $x = 2$.

Dosadíme-li $x = 2$ do rovnice (35), dostaneme:
$$|y - 3| + y = p .$$

Rozlišme tyto možnosti:

I. Nechť $y \geqq 3$. Pak $y = \frac{1}{2}(p + 3)$.

II. Nechť $y \leqq 3$. Pak $3 - y + y = p$, tj. $0 . y = p - 3$.

Vyšetřme sjednocení množin nalezených v případech **I** a **II**:

A. Je-li $p > 3$, pak je rovnicí (35) za předpokladu $x = 2$ určena množina
$$\left\{\left[2, \frac{1}{2}(p + 3)\right]\right\} \cup \emptyset .$$

B. Je-li $p = 3$, pak je rovnicí (35) za předpokladu $x = 2$ určena množina
$$\{[2, 3]\} \cup \{[x, y]; x = 2 \wedge y \leqq 3\} = \{[x, y]; x = 2 \wedge y \leqq 3\} .$$

C. Je-li $p < 3$, pak je rovnicí (35) za předpokladu $x = 2$ určena množina

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset .$$

Polopřímku jsme obdrželi jenom v případě **B**, takže jsme dospěli k závěru, že množinou bodů vyhovujících rovnici (35) je polopřímka, právě když je $p = 3$.

Řešil *Leszek Gajdzica*, 4.d, gymnázium s polským jaz. vyučovacím, Český Těšín

A – III – 5

Najděte množinu vrcholů A všech rovnoramenných trojúhelníků ABC s hlavním vrcholem B, jejichž strana BC je obsažena v daném čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

Řešení. Vyšetřováním speciálních poloh trojúhelníků ABC lze očekávat, že hledaná množina $\mathbf{M}$ je sjednocení $\mathbf{S}$ čtyř (uzavřených) kruhů $\mathbf{K}(P_i;\ a\sqrt{2})$, kde a je délka strany daného čtverce, s výjimkou čtyř bodů hranice $\mathbf{S}$, které leží na úhlopříčkách čtverce (obr. 42).

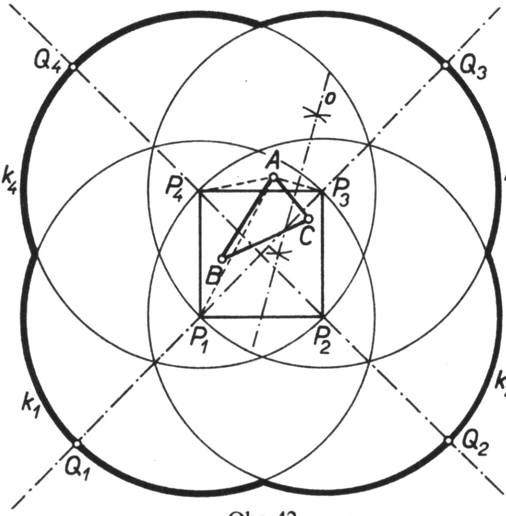
Dokážeme nejprve, že každý bod A vyhovující úloze leží v $\mathbf{S}$. Je-li $\triangle ABC$ trojúhelník vyhovující úloze, je

$$AB = BC \leqq BP_k ,$$

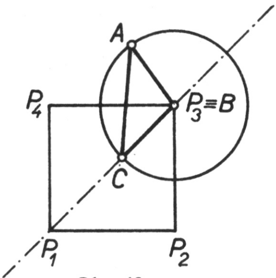
kde P_k je takový vrchol čtverce, který je od B nejvzdálenější (obr. 42). Proto bod B leží v téže polorovině vyťaté osou o úsečky AP_k jako bod A. Tedy přímka o má neprázdný průnik s daným čtvercem. Proto existuje vrchol čtverce P_j v té polorovině podle o, která obsahuje A, a tedy

$$AP_j \leqq P_jP_k \leqq a\sqrt{2} .$$

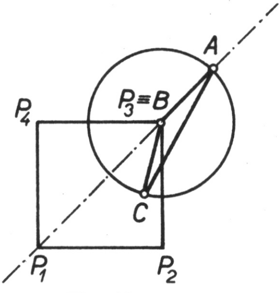
Nechť $A \in \mathbf{K}(P_i; a\sqrt{2})$ a $A \neq Q_i$. Uvažujme nejprve, že $A \notin P_iQ_i$.



Obr. 42



Obr. 43



Obr. 44

Kružnice $k(P_i, P_iA$ má pak ve čtverci (obr. 43) společný bod C s přímkou P_iQ_i. Zvolíme-li $B = P_i$, pak body A, B, C

tvoří vrcholy trojúhelníku vyhovujícího úloze. Leží-li bod A (obr. 44) na přímce P_iQ_i a $A \neq P_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, pak kružnice $k(P_i, P_iA)$ má se čtvercem společný bod C ležící mimo přímku P_iQ_i. Pak opět $B = P_i$ vede k řešení úlohy. Je-li $A = P_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, pak za B zvolíme střed čtverce.

A – III – 6

Nech $\mathbf{M}$ je množina usporiadaných dvojíc (x, y) reálnych čísel s týmito vlastnosťami:

1. Existuje dvojica $(a, b) \in \mathbf{M}$ taká, že $ab(a - b) \neq 0$.

2. Ak $(x_1, y_1) \in \mathbf{M}$, $(x_2, y_2) \in \mathbf{M}$ a c je reálne číslo, potom tiež $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbf{M}$, $(cx_1, cy_1) \in \mathbf{M}$, $(x_1x_2, y_1y_2) \in \mathbf{M}$.

Dokážte, že $\mathbf{M}$ obsahuje všetky usporiadané dvojice reálnych čísel.

Řešení.*) Považujme dvojice (x, y) za vektory v dvojrozměrném bodovém prostoru $\mathbf{R}_2$. Podle zadání $\mathbf{M}$ obsahuje alespoň jeden vektor (a, b) a dále, obsahuje-li vektory (x_1, y_1), (x_2, y_2), pak obsahuje také všechny jejich lineární kombinace.

Kromě vektoru (a, b) obsahuje $\mathbf{M}$ např. též vektor (a^2, b^2). Přitom podle podmínky 1. je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, takže vektory (a, b), (a^2, b^2) jsou lineárně nezávislé.

Vektorový prostor $\mathbf{R}_2$ je dvojrozměrný, proto každá dvojice jeho lineárně nezávislých vektorů tvoří jeho bázi. Protože $\mathbf{M}$ obsahuje oba vektory báze $\{(a, b), (a^2, b^2)\}$,

---

*) Toto řešení odměnil MÚ ČSAV v Praze za originalitu finanční částkou 500 Kčs.

obsahuje všechny jejich lineární kombinace, tj. $\mathbf{M}$ je množinou všech vektorů v $\mathbf{R}_2$.

To však znamená, že $\mathbf{M}$ obsahuje všechny uspořádané dvojice reálných čísel.

Řešil *Jiří Peňáz*, 3.b, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno

Jiné řešení. Nechť $(a, b) \in \mathbf{M}$ je taková uspořádaná dvojice, že $ab(a - b) \neq 0$. Taková dvojice podle vlastnosti 1 existuje.

Pak užijeme vlastnosti 2 pro $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = a$, $y_2 = b$. Dostáváme, že $(a^2, b^2) \in \mathbf{M}$.

Nechť (x, y) je libovolná uspořádaná dvojice reálných čísel. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} a^2c_1 + ac_2 &= x\,, \\ b^2c_1 + bc_2 &= y \end{aligned} \tag{36}$$

o neznámých c_1, c_2 má pak vždy právě jedno řešení*), neboť determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} a^2, & a \\ b^2, & b \end{vmatrix} = a^2b - ab^2 = ab(a - b) \neq 0\,.$$

Nechť (c_1, c_2) je řešení soustavy (36). Pak podle vlastnosti 2 platí

$$(a^2c_1,\ b^2c_1) \in \mathbf{M}\,,$$

$$(ac_2,\ bc_2) \in \mathbf{M}\,,$$

a tedy

$$(a^2c_1 + ac_2,\ b^2c_1 + bc_2) \in \mathbf{M}\,,$$

tj.

$$(x, y) \in \mathbf{M}\,.$$

---

*) K tomuto závěru se snadno dospěje i bez znalosti determinantů.

Platí tedy: Jestliže (x, y) je libovolná uspořádaná dvojice reálných čísel, pak $(x, y) \in \mathbf{M}$, což se mělo dokázat.

Řešil *Jiří Navrátil*, 2.a, gymnázium, Olomouc-Hejčín