VI. Správa o XVI. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

O starostlivej organizačnej príprave XVI. MMO najlepšie svedčí skutočnosť, že už počas XV. MMO v júli 1973 v Moskve dostali vedúci zúčastnených delegácií od vedenia delegácie NDR jej rámcový program a organizačný poriadok súťaže. Samotný priebeh XVI. MMO len potvrdil neobyčajnú pozornosť, ktorú súdruhovia z NDR jej organizácii venovali. Poriadateľmi súťaže, ktorá sa konala od 4. do 17. júla 1974 boli Ministerstvo školstva NDR, Matematická spoločnosť NDR (Mathematische Gesellschaft der DDR) a Ústredný výbor FDJ (mládežnícka organizácia NDR). Vlastná súťaž sa konala v krajskom meste Erfurte na juhozápade NDR a záver so slávnostným vyhlásením výsledkov bol v hlavnom meste NDR – Berlíne.

Nielen veľmi dobrou organizáciou, ale aj počtom zúčastnených krajín patrila XVI. MMO medzi najvydarenejšie z doterajších medzinárodných stretnutí mladých matematických nádejí. K družstvám 16 krajín, ktoré sa zúčastnili XV. MMO v Moskve pribudli ako noví účastníci MMO družstvá USA a Vietnamskej demokratickej republiky. Na XVI. MMO do NDR vyslalo teda svoje družstvá týchto 18 krajín: Rakúsko (A), Bulharsko (BG), Kuba (C), ČSSR

(CS), NDR (DDR), Francúzsko (F), Veľká Británia (GB), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Poľsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Fínsko (SF), ZSSR (SU), USA (USA), Vietnamská demokratická republika (VN), a Juhoslávia (YU). S výnimkou Kuby (7 žiakov) a VDR (5 žiakov) boli všetky družstvá osemčlenné, ako to stanovoval organizačný poriadok súťaže. Celkem na XVI. MMO súťažilo teda 140 žiakov.

Predsedom organizačného výboru olympiády bol pracovník Ministerstva školstva NDR, tajomník ústredného výboru olympiád mladých matematikov NDR a člen predsedníctva Matematickej spoločnosti NDR s. *Herbert Titze* a jeho zástupcom s. *Gerhard Kleinfeld*, pracovník odboru školstva rady kraja v Lipsku.

Prezidentom medzinárodnej jury súťaže, ktorú tvorili vedúci jednotlivých delegácií zúčastnených krajín, bol *prof. dr. Wolfgang Engel*, predseda Matematickej spoločnosti NDR a riaditeľ sekcie matematiky na univerzite v Rostocku. Jeho zástupcom bol *prof. dr. Helmut Bausch*, vedúci oddelenia matematiky a prírodných vied na Ingenieurhochschule Berlín-Wartenberg a predseda ústredného výboru olympiád mladých matematikov NDR.

Vedúci delegácií sa schádzali do Erfurtu vo štvrtok 4. 7. 1974. Hneď po príchode na železničnú stanicu či letisko ich organizátori odviezli do neďalekého Weimaru (23 km), strediska nemeckej klasiky a humanistických tradícií, kde boli ubytovaní v hoteli Elephant. Na zoznamovacej večeri v reštaurácii hotela sa stretávali väčšinou starí známi z predchádzajúcich MMO.

Jury pracovala v priestoroch Hochschule für Architektur und Bauwesen vo Weimare. Na prvom zasadnutí v piatok 5. 7. prezident jury *prof. dr. Engel* privítal vedúcich delegácií zúčastnených krajín, najmä tých, ktoré sa MO zúčastňovali po prvý raz (VDR a USA), zaželal im úspešnú prácu a príjemný pobyt v NDR a informoval, že na XVI. MMO bolo pozvané tiež Taliansko, ktoré aj prisľúbilo účasť, ale v poslednej chvíli sa ospravedlnilo. Členov jury v krátkom prejave pozdravil tiež prorektor Hochschule für Architektur und Bauwesen *prof. dr. Fritsch.* V pracovnej časti 1. zasadnutia podal *prof. dr. Engel* krátke vysvetlenie k programu XVI. MMO, predstavil svojich spolupracovníkov z NDR – členov komisie pre úlohy, prekladateľov a ďalších a prečítal text telegramu, ktorý účastníkom XVI. MMO poslal *I. S. Petrakov* (ZSSR) – účastník všetkých MMO od IV. po XV. a spoluautor úspešnej publikácie o MMO, známej aj u nás.

Členovia komisie pre úlohy (*prof. dr. G. Geise*, *prof. dr. U. Pirl* a *doc. dr. L. Stammler*) vybrali z cca 50 navrhnutých úloh došlých do organizátormi stanoveného termínu (15. 4.) dva varianty po 6 úloh, ktorých texty s riešeniami dostali vedúci delegácií vo štvrtok (4. 7.) popoludní. Pri výbere vychádzali z toho, aby každý variant obsahoval úlohy z rôznych oblastí matematiky, ktoré by boli pôvodné a pokiaľ možno rôznej obťažnosti. Do prvého variantu zaradili pomerne jednoduchý hlavolam (USA), zaujímavú úlohu na odhad nekonečného súčtu (PL), netradičnú úlohu o mnohočlenoch s celočíselnými koeficientami (S), veľmi peknú dôkazovú úlohu na odhad minima istej konečnej množiny reálnych čísel (SU), obťažne formulovateľnú úlohu na dôkaz existencie zhodných trojuholníkov v istom nekonečnom systéme trojuholníkov se spoločnou opísanou kružnicou (GB) a úlohu zo školskej teórie čísel využívajúcu určité prvky kombinatoriky (R). Druhý variant obsahoval dôkazovú úlohu zo školskej teórie čísel tradičného charakteru (PL), úlohu na najdenie množiny hodnôt istej homogénnej funkcie štyroch reálných premenných (NL), dôkaz identity založený na použití trigonometrických funkcií (C), pomerne jednoduchú úlohu z klasickej planimetrie (SF), zaujímavú a nie veľmi náročnú úlohu na pokrytie (BG) a konečne veľmi peknú, ale značne náročnú úlohu kombinatorického charakteru (SU).

Základom pre diskusiu mal byť prvý navrhnutý variant. Už v úvode diskusie upozornil však vedúci poľskej delegácie *prof. Mąkowski* na to, že do neho zaradená poľská úloha bola medzičasom publikovaná v Gardnerovej knihe, ktorej preklad vyšiel v ZSSR. Na sobotňajšom zasadnutí jury (6. 7.) prečítal vedúci maďarskej delegácie *prof. Hódi* text úlohy z maďarskej olympiády, ktorá bola v podstate zovšeobecnením sovietskej úlohy z prvého variantu. Vzhľadom na požiadavku pôvodnosti bolo preto nutné poľskú a sovietskú úlohu z prvého variantu vynechať. Keďže viacerí vedúci delegácií namietali proti zaradeniu britskej úlohy, ktorá sa im zdala príliš obťažná a náročná na hodnotenie riešení a väčšina členov jury sa napokon vyslovila za jej nahradenie fínskou úlohou z druhého variantu, bol po doplnení tohto výberu bulharskou a holandskou úlohou z druhého variantu na záver sobotného predpoludňajšieho zasadnutia jury jednomyseľne prijatý nižšie uvedený komplex súťažných úloh.

Formulácii textov úloh v rokovacich jazykoch (nemčina, ruština, angličtina, francúzština), ktorá patrí už tradične k najnáročnejším povinnostiam jury, boli venované dve zasadnutia jury: v sobotu 6. 7. popoludní a v nedeľu 7. 7. predpoludním. Pri nej bol podstatne zmenený najmä pôvodný text americkej úlohy. Na záver nedeľného predpoludňajšieho zasadnutia schválila jury jednomyseľne návrh vedúceho československej delegácie na rozdelenie úloh pre oba súťažné dni ako aj maximálne počty bodov za úplné riešenie jednotlivých úloh. Na riešenie každej trojice úloh boli stanovené 4 hodiny čistého času.

S históriou a pamätihodnosťami Weimaru sa členovia jury zoznámili v piatok 5. 7. popoludní počas prednášky doplnenej premietaním diapozitívov v Goetheho múzeu a počas prechádzok po meste vo voľnom čase. V piatok 5. 7. večer podávala pre členov jury a organizátorov XVI. MMO večeru Mathematische Gesellschaft der DDR. Prehovoril na nej predseda spoločnosti *prof. dr. Engel* a za zahraničných hostí vedúci sov. delegácie *doc. Skvorcov.*

Nedeľňajšieho zasadnutia jury sa zúčastnili už aj zástupcovia vedúcich delegácií, ktorí mali svoje družstvá priviesť do Erfurtu najneskoršie v sobotu 6. 7. Žiaci boli ubytovaní v modernom internáte Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer v Erfurte, zatiaľ čo zástupcovia vedúcich delegácií sa ubytovali spoločne se svojimi vedúcimi vo Weimare. O žiakov jednotlivých družstev sa po celý čas pobytu v NDR starali okrem tlmočníkov aj nemeckí sprievodcovia — členovia FDJ.

Na vedúcich delegácií a ich zástupcov čakala v nedeľu popoludní náročná úloha prekladu textov úloh do materčiny žiakov a ich príprava na rozmnoženie. Po prvý raz na MMO bola pri rozmnožení textov úloh použitá moderná technika (xerox).

Slávnostné otvorenie XVI. MMO sa uskutočnilo v pondelok 8. 7. ráno v aule Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer v Erfurte. Prezident jury *prof. Engel* na ňom v krátkom prejave privítal nám. min. školstva NDR *Wernera Engsta* a ďalších čestných hostí, vedúcich delegácií zúčastnených krajín a najmä účastníkov súťaže, ktorým zaželal veľa úspechov pri riešení súťažných úloh.

V dvoch štvorhodinových klauzúrach čakali na nich nasledujúce úlohy:

PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE — 8. JÚLA 1974

1. Traja hráči A, B a C hrajú hru, pri ktorej používajú tri hracie karty. Na každej z týchto kariet je napísané celé číslo: na prvej p, na druhej q, na tretej r, pričom platí $0 < p < q < r$. Pri každom kole hry sa karty zamiešajú a každý hráč dostane jednu z nich. Potom kartu vráti a dostane za ňu toľko guličiek, koľko udáva na nej napísané číslo.

Hra trvala N kol, $N \geqq 2$. Na konci hry mal hráč A celkom 20 guličiek, hráč B 10 a hráč C 9 guličiek.

Ak viete, že v poslednom kole hráč B dostal r guličiek, určite, ktorý z hráčov dostal v prvom kole q guličiek. (USA, 5 bodov)

2. Označme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch A, B, C v uvedenom poradí α, β, γ.

Dokážte, že nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby na úsečke AB existoval bod D tak, že dĺžka úsečky CD

je geometrickým priemerom dĺžek AD a BD je splnenie nerovnosti

$$\sin \alpha \sin \beta \leqq \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma .$$

(Fínsko, 6 bodov)

3. Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

deliteľné číslom 5. (Rumunsko, 8 bodov)

DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE — 9. JÚLA 1974

4. Rozdeľme šachovnicu pozostávajúcu z 8×8 polí na p neprekrývajúcich sa pravouhlých rovnobežníkov. Uvažujme o všetkých takýchto rozdeleniach šachovnice, pre ktoré platia nasledujúce podmienky:

a) Každý z pravouhlých rovnobežníkov pozostáva z celých polí a obsahuje bielych polí práve toľko ako čiernych.

b) Ak a_i znamená počet bielych polí na i-tom rovnobežníku, potom platí: $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Nájdite najväčšie číslo p, pre ktoré je také rozdelenie šachovnice možné. Pre toto p určite všetky postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_p$, pre ktoré možno také rozdelenie šachovnice realizovať. (Bulharsko, 6 bodov)

5. Určite množinu hodnôt, ktoré môže nadobúdať súčet

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

keď a, b, c, d sú ľubovoľné kladné reálne čísla. (Holandsko, 7 bodov)

6. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami, ktorý nie je identicky rovný konštante, a nech $n(P)$ je počet všetkých navzájem rôznych celých čísel k, pre ktoré platí: $[P(k)]^2 = 1$.

Dokážte, že

$$n(P) - \deg(P) \leqq 2,$$

kde $\deg(P)$ znamená stupeň mnohočlena P. (Švédsko, 8 bodov)

V zátvorke za textom úlohy je uvedené, ktorá krajina úlohu navrhla a maximálny počet bodov, ktorý bolo možné získať za úplné riešenie úlohy. Tieto údaje však žiakom pri súťaži oznámené neboli. Počas súťaže boli žiaci rozdelení do 8 učební, v každej z nich bol najviac jeden príslušník každého družstva. Po oba súťažné dni najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov mohli žiaci predkladať písomné otázky na prípadné nejasnosti v textoch. Na tieto otázky po predchádzajúcom prerokovaní v jury písomne odpovedali vedúci delegácií.

Vedúci delegácií a ich zástupcovia sa mohli po otvorení súťaže 8. 7. počas krátkej autokarovej exkurzie aspoň čiastočne zoznámiť s dejiskom XVI. MMO, dvestotisícovým krajským mestom Erfurtom, miestom tradičných medzinárodných výstav kvetov. Po nej sa v hoteli Erfurter Hof zúčastnili na obede, ktorý pri príležitosti XVI. MMO podával predseda rady kraja Erfurt s. *Gothe*. Po návratu do Weimaru už na nich v Hochschule für Architektur und

Bauwesen, kde mala každá delegácia k dispozícii jednu učebnu, čakali riešenia prvých troch úloh, aby začali s ich korektúrami a hodnotením. Tejto práci, ku ktorej sa v utorok 9. 7. pridružili korektúry a hodnotenie riešení ďalšej trojice úloh ako aj koordinácia hodnotení, sa venovali až do štvrtku 11. 7. večer. Počas korektúr a koordinácie sa jury zišla na jednom spoločnom zasadnutí s koordinátormi (9. 7. večer), na ktorom sa ujasnili niektoré kritériá hodnotenia riešení.

Už pri svojom príchode do Weimaru dostali vedúci delegácií presný časový plán koordinácie jednotlivých úloh, ktorý sa dôsledne dodržiaval. Riešenia každej úlohy koordinovala trojica matematikov NDR (1 — *dr. Bartschová, dr. Rehm, Schiemann*; 2 — *doc. dr. Schröder, dr. Sommerfeld, dr. Noacková*; 3 — *dr. Lüders, dr. Harnau, dr. Riedewald*; 4 — *dr. Drews, Germer, dr. Kummer*; 5 — *dr. Seifert, prof. dr. Wintgen, dr. Küchler*; 6 — *dr. Zacharias, doc. dr. Rosenbaum, dr. Schwarz*), medzi ktorými boli aj dvaja úspešní účastníci predchádzajúcich MMO. Riešenia žiakov družstva NDR — ako je to už v prípade družstva poriadajúcej krajiny tradičné — koordinovali vedúci delegácií tých krajín, ktoré navrhli úlohy.

Pri koordinácii hodnotení sa nevyskytli žiadné vážnejšie nedorozumenia, takže jury mala pri svojom záverečnom zasadnutí, ktoré sa konalo v piatok 12. 7. predpoludním, uľahčenú úlohu. Najskôr jednomyseľne súhlasila, aby sa v prípade jedného rumunského žiaka, ktorý mal v čase súťaže už viac než 20 rokov, urobila výnimka a aby bol ponechaný v súťaži, keď vedenie rumunskej delegácie ubezpečilo, že je žiakom strednej školy. Potom hlavní koordinátori jednotlivých úloh stručne zhodnotili dosiahnuté výsledky. Stanovenie hraníc dosiahnutých bodov pre udelenie cien uľahčilo tentoraz ustanovenie organizačného poriadku, podľa ktorého nemal počet odmenených v zásade prekročiť polovicu všetkých účastníkov a počty prvých, druhých a tretích cien mali byť, pokiaľ možno, v pomere 1 : 2 : 3. Vychádzajúc z tohto ustanovenia rozhodla jury o hraniciach cien takto: I. cena od 40 do 38 bodov, II. cena od 37 do 30 bodov a III. cena od 29 do 23 bodov. Znamenalo to, že 10 žiakov dostane I., 24 II. a 37 III. cenu, čo je spolu 71 odmenených zo 140 účastníkov XVI. MMO.

Napokon jury prerokovala 4 návrhy na udelenie diplomov za originálne a zvlášť elegantné riešenia. Jeden z nich (jednému z maďarských žiakov za riešenie 2. úlohy) zamietla a ostatné tri (jednému žiakovi z družstva Švédska za riešenie 5. úlohy a po jednom žiakovi z družstiev USA a Maďarska za riešenie 6. úlohy) schválila.

V záverečnom slove poďakoval prezident jury *prof. dr. Engel* za konštruktívnu spoluprácu všetkým členom jury a informoval, že zatiaľ nie je doriešená otázka usporiadateľa XVII. MMO. Podľa vyjadrenia vedúcich bulharskej a mongolskej delegácie sa môže konať v ich krajinách, v Mongolsku však až od 15. 7. 1975, pretože Mongolská ľudová republika slávi 11. 7. svoj štátny sviatok.

V závere zasadnutia sa prihlásil o slovo vedúci rakúskej delegácie *prof. Mühlgassner.* V mene zahraničných delegácií poďakoval usporiadateľom za výbornú organizáciu olympiády a za veľmi dobré podmienky, ktoré NDR vytvorila jej účastníkom. Potom z poverenia ministerstva školstva svojej krajiny oznámil, že Rakúsko je ochotné usporiadať XVIII. MMO v roku 1976. Pozval všetky krajiny zúčastnené na XVI. MMO, aby sa na nej zúčastnili a požiadal vedúcich delegácií, aby ho informovali o stanovisku svojich krajín k tomuto pozvaniu.

Žiaci od svojho príchodu do Erfurtu (6. 7.) do otvorenia súťaže sa mali možnosť zoznámiť s pamätihodnosťami mesta. Navštívili o. i. aj svetoznámu medzinárodnú výstavu kvetov, ktorá sa v tomto starobylom centre Durínska každoročne koná. Popoludnie prvého dňa súťaže strávili na športoviskách študentského domova, v ktorom boli ubytovaní a po druhej klauzúre pre nich usporiadatelia zorganizovali mládežnícku zábavu, na ktorú okrem výbornej hudby zabezpečili aj dostatočný počet dievčat z erfurtských stredných škôl. Medzi účastníkmi XVI. MMO boli totiž len 2 dievčatá: *Sarah Maria Duyos* z Kuby a naša *Alena Vencovská.*

Kým sa vedúci delegácií a ich zástupcovia vo Weimare plne zamestnávali korektúrami, hodnotením a koordináciou riešení, absolvovali žiaci dve celodenné autokarové exkurzie do okolia Erfurtu. V stredu 10. 7. navštívili známe stredisko zimných športov Oberhof v Durínskom lese a dejisko nedávnych majstrovstiev sveta v športovej streľbe v Suhle. Vo štvrtok 11. 7. si mali možnosť pozrieť Eisenach a hrad Wartburg. Vo štvrtok večer sa v internáte po prvý raz od súťaže stretli so svojimi vedúcimi, aby sa dozvedeli niektoré podrobnosti o programe ďalšieho pobytu v NDR a hlavne uspokojili svoju zvedavosť na výsledky, ktoré pri riešení úloh dosiahli. Veľa sa hovorilo tiež o smutne známej histórii

Buchenwaldu, ktorý sa chystali účastníci XVI. MMO navštíviť nasledujúceho dňa popoludní.

Počas záverečného zasadnutia jury si žiaci prehliadli Weimar, kde navštívili múzea v domoch Goetheho a Schillera i ďalšie pamätihodnosti. Popoludní 12. 7. sa uskutočnila spoločná exkurzia všetkých účastníkov XVI. MMO na nedaleký Ettersberg a do múzea na mieste niekdajšieho koncentračného tábora Buchenwald, v ktorom fašistické jednotky SS počas 2. svetovej vojny povraždili 56 000 ľudí, príslušníkov takmer všetkých európskych národov. Po prehliadke múzea položili jednotlivé delegácie kytice kvetov k pylónu svojho národa na Ceste národov v Národnom pamätníku v Buchenwalde a poklonili sa pamiatke tých, ktorí zahynuli v boji proti fašizmu pre lepšiu budúcnosť dnešnej mladej generácie a celého ľudstva.

V sobotu 13. 7. ráno sa účastníci XVI. MMO rozlúčili s Durínskom a rýchlikom odcestovali do Berlína, kde sa žiaci ubytovali vo vysokoškolskom internáte Humboldtovej univerzity a vedúci delegácií so svojimi zástupcami v hoteli Berolina v strede mesta. Krátko po príchode do Berlína čakala v prístave v Treptovskom parku na účastníkov XVI. MMO loď Fridrich Wolf zo známej „Weisse Flotte“, na ktorej podnikli vyhliadkovú plavbu po Spréve a priľahlých jazerách. Požitok z plavby trvajúcej celé popoludnie kazilo daždivé počasie, tak typické v júli 1974 nielen pre Berlín a NDR.

V nedeľu 14. 7. 1974 navštívili účastníci MMO neďaleké viac než stotisícové krajské mesto Potsdam, kde si prezreli niekdajší kráľovský letohrádok Sanssousi s rozľahlým parkom a historické miesto konania Postupimskej konferencie Cecilienhof.

Po pondelňajšom voľnom predpoludní (15. 7.) nasledovalo popoludní záverečné slávnostné zhromaždenie v Kongresovej hale na Alexandrovom námestí. V jeho úvode zaznelo Largo a Allegro z Händlovho Concerto grosso, op. 6. Po otváracom preslove predsedu organizačného výboru XVI. MMO *s. Titzeho* prehovorili prezident jury *prof. dr. Engel* a sekretár min. školstva NDR *s. Werner Lorenz*, ktorí po doznení 1. vety Beethovenovej Jenskej symfónie odovzdali diplomy odmeneným účastníkom XVI. MMO. V zastúpení súťažiacich žiakov poďakovala potom organizátorom olympiády za vytvorenie veľmi dobrých podmienok pre súťaž i bohatý spoločenský program členka čs. družstva *Alena Vencovská.* V mene zahraničných členov jury prehovoril vedúci bulharskej delegácie *dr. Čukanov*, ktorý taktiež vyzdvihol veľmi dobrú organizáciu olympiády a v závere pozval delegácie všetkých zúčastnených krajín na XVII. MMO, o mieste konania ktorej sa rozhodne medzi Bulharskom a Mongolskom pri vzájemnom rokovaní na úrovni ministrov školstva. Kuriozitou záverečné slávnosti bolo to, že na nej účinkoval ako klavírista *Wolfgang Burmeister*, úspešný účastník niekoľkých predchádzajúcich MMO, ktorý vysokoškolské štúdium matematiky absolvoval za tri roky a teraz pracuje ako učiteľ matematiky na Technische Universität v Drážďanoch.

V pondelok (15. 7.) večer sa opäť v Kongresovej hale konala záverečná spoločná večera, na ktorej prehovoril prezident jury *prof. dr. Engel.* Pred ňou, resp. počas nej, dostali všetci účastníci olympiády spomienkové darčeky od jej organizátorov. Celý večer sa niesol v radostnom a priateľskom ovzduší. Mladé matematické nádeje si vymieňali adresy a prísľuby ďalších vzájomných kontaktov.

Na rozdiel od predchádzajúcich MMO sa slávnostnou spoločnou večerou oficiálny program XVI. MMO neskončil. Na utorok 16. 7. dopoludnia naplánovali nemeckí hostitelia ešte návštevu berlínskej televíznej veže, aby účastníkom olympiády umožnili pohľad na hlavné mesto NDR z výšky 203 m a po nej autokarovú prehliadku Berlína. Počas nej navštívili o. i. pamätník padlých červenoarmejcov v Treptovskom parku a zoznámili sa s ďalšími pamätihodnosťami hlavného mesta hostiteľskej krajiny.

Posledným oficiálnym podujatím v rámci olympiády bol koktail, ktorý v utorok popoludní usporiadal v reštaurácii hotela Johannishof námestník ministra školstva NDR *s. Werner Engst*. Spolu s prezidentom jury *prof. dr. Engelom* zotrval počas neho v krátkom srdečnom rozhovore s vedením každej delegácie.

V utorok 16. 7. popoludní začali postupne odchádzať jednotlivé zahraničné delegácie do svojich domovov. Delegáciu ČSSR odvážala Vindobona z berlínskej stanice Ostbahnhof v stredu predpoludním. Jej členovia odchádzali zo susedného socialistického nemeckého štátu bohatši o mnohé dojmy a pekné zážitky a tí, ktorí majú ešte možnosť, plní predsavzatí urobiť všetko pre to, aby ich budúca cesta na MMO bola úspešnejšia.

XVI. MMO sa zapíše do histórie ako jedna z najlepšie organizačne pripravených po odbornej i spoločenskej stránke. Značnú pozornosť jej venovala i domáca tlač a ostatné masovokomunikačné prostriedky. Všetci organizátori na čele s prezidentom jury *prof. dr. Engelom* a predsedom org. výboru *s. Titzem* sa vyznačovali bezpríkladnou pozornosťou a starostlivosťou o to, aby všetko klapalo presne podľa vopred pripraveného plánu. Všetci účastníci olympiády sa na každom kroku presvedčovali o veľkej pozornosti, ktorú venuje NDR rozvoju školstva, vedy a techniky.

2. VÝSLEDKY SÚŤAŽE

Najdôležitejšou a zároveň najťažšou úlohou medzinárodnej jury MMO je každoročne výber súťažných úloh. S rastom počtu zúčastnených krajín narastá jej náročnosť hlavne preto, že sa zmenšuje prienik množín tých partií matematiky, ktoré sa vyučujú na stredných školách v zúčastnených krajinách. V návrhoch úloh, ktoré zaslali jednotlivé krajiny pre XVI. MMO bolo naviac málo vhodných úloh z geometrie. Po vynechání pekných a zaujímavých úloh, ktoré sa však v pripravenom návrhu ukázali ako neoriginálne, sa napokon zrodil nie celkom vyvážený výber, ktorý pozostával z 2 doslovne ľahkých úloh, z 1 pomerne nenáročnej úlohy klasického typu a z 3 úloh, ktoré sa všeobecne považovali za náročné. Chýbali úlohy stredne náročné, ako to ukázali aj účastníkmi dosiahnuté výsledky. Nasledujúca tabuľka ukazuje, koľko zo 140 účastníkov olympiády získalo ten-ktorý počet bodov za riešenie jednotlivých úloh:

Počet bodov	Úloha 1	Úloha 2	Úloha 3	Úloha 4	Úloha 5	Úloha 6
8	–	–	35	–	–	35
7	–	–	5	–	27	8
6	–	64	1	90	8	3
5	113	7	1	15	15	5
4	9	18	2	11	13	1
3	6	4	9	10	9	2
2	6	5	7	10	12	7
1	1	14	18	–	22	28
0	5	28	62	4	34	51

Ak vyjadríme pomer udelených bodov za riešenie jednotlivých úloh k celkovému počtu možných bodov, dostaneme nasledujúce čísla vyjadrujúce relatívnu úspešnosť účastníkov XVI. MMO pri riešení úloh: 1. 90,3 %, 2. 62,7 %, 3. 35,1 %, 4. 84,4 %, 5. 44,6 %, 6. 38,4 %. S jednotlivými úlohami si najlepšie poradili tieto družstvá: 1. bez straty bodu riešili CS, DDR, H, PL, SU, USA, VN a YU; 2. VN stratilo 1 bod, SU 2 body; 3. Rumunsko získalo 50 bodov zo 64 možných; 4. Švédsko a Juhoslávia získali po 47 bodov zo 48 možných; 5. ZSSR získalo 44 bodov z 56 možných a 6. USA získalo 58 bodov zo 64 možných.

Celkové výsledky jednotlivých družstiev ukazuje nasledujúca tabuľka:

Krajina	Počet získaných cien				Diplomy	Súčet bodov	Neofic. poradie	Body a neofic. por. na XV. MMO	Pozn.
	I.	II.	III.	Spolu					
A	1	1	4	6	–	212	6.	144–8.	
BG	–	1	4	5	–	171	11.	96–12.–13.	
C	–	–	–	–	–	65	17.	42–16.	7 ž.
CS	–	–	2	2	–	158	12.	149–7.	
DDR	–	5	2	7	–	236	4.	188–3.	
F	1	1	3	5	–	194	8.	153–6.	
GB	–	1	3	4	–	188	9.	164–5.	
H	1	3	3	7	1	237	3.	215–2.	
M	–	–	–	–	–	60	18.	65–15.	
NL	–	–	1	1	–	112	15.	96–12.–13.	
PL	–	–	2	2	–	138	14.	174–4.	
R	1	1	3	5	–	199	7.	141–9.	
S	1	1	–	2	1	187	10.	99–11.	
SF	–	–	1	1	–	111	16.	86–14.	
SU	2	3	2	7	–	256	1.	254–1.	

USA	–	5	3	8	1	243	2.	na MMO po 1. raz	
VN	1	1	2	4	–	146	13.	len 5 žiakov na MMO po 1. raz	
YU	2	1	2	5	–	216	5.	137 – 10.	

Veľkým prínosom sa ukázali byť družstvá krajín, ktoré sa MMO zúčastnili po prvý raz. Družstvo USA sa vklínilo medzi už tradične najlepšie družstvá ZSSR, Maďarska a NDR a bolo jediným družstvom, ktorého všetci členovia získali cenu. Výsledky, ktoré dosiahlo nekompletné družstvo VDR, boli pre všetkých nečakaným prekvapením. V porovnaní s minulým rokom sa značne zlepšili najmä družstvá Juhoslávie, Rakúska, Švédska, Bulharska a čiastočne i družstvo Rumunska. Francúzske družstvo potvrdilo, že jeho vlaňajší výsledok nebol náhodný. Nečakane slabé výsledky dosiahlo družstvo Poľska a, žiaľ, aj ČSSR. Výsledky ostatných družstiev sú v zhode s doterajšími zvyklosťami s výnimkou snáď len Veľkej Británie, ktorej družstvo nekleslo pri svojich doterajších štartoch na MMO v neoficiálnom poradí pod šiestu priečku. Celkove možno povedať, že dosiahnuté výsledky sú vyrovnanejšie než na niekoľkých predchádzajúcich MMO a aj napriek trom pomerne náročným úlohám sa našlo až 6 žiakov, ktorí získali plný počet 40 bodov, a to po jednom z družstiev Rakúska, Francúzska, Maďarska, Rumunska, Švédska a ZSSR.

Pri rokovaní jury sa podarilo vytvoriť vďaka veľmi dobrému vedeniu zo strany jej prezidenta *prof. dr. Engela* i jeho zástupcu *prof. dr. Bauscha* konštruktívnu pracovnú atmosféru, na ktorú mala zrejme vplyv aj tá skutočnosť, že členavia jury boli väčšinou starí známi z predchádzajúcich MMO, ak to ukazuje nasledujúci prehľad:

Krajina	Vedúci delegácie – člen jury	Jeho zástupca
A	*Thomas Mühlgassner* Gymnázium Eisenstadt	*Wolfgang Ratzinger* Pädagogische Akademie Linz
BG	*Dr. Vladimír Čukanov* Akadémia vied Sofia	*Dimo Serafimov Angelov* Min. školstva Sofia
C	*Dr. Luis j. Davidson* Min. školstva Havana	*Felix Recio* Univerzita Havana
CS	*Doc. Dr. Jozef Moravčík, Csc.* VŠD Žilina	*Dr. Vlastimil Macháček* Ped. fakulta UK Praha
DDR	*Prof. Dr. Gustav Burosch* Univerzita Rostock	*Dr. Hans-Jürgen Sprengel* Pädag. Hochschule Potsdam
F	*Prof. Georges Glaeser* IREM Strasbourg	*Denis Gerll* Lycée Louis-le-Grand Paris
GB	*Robert Cranston Lyness* Min. školstva Londýn	*Dr. David Monk* Univerzita Edinburgh
H	*Endre Hódi* Ped. inštitút Budapešť	*Doc. Dr. István Reiman, CSc.* Techn. univerzita Budapešť
M	*Prof. Uršincerengin Sanžmjatav* Univerzita Ulánbátor	*Sagdarača Gombyn* Min. školstva Ulánbátor

NL	*Doc. Ary van Tooren* Univerzita Leiden	*Dr. Jan van de Craats* Univerzita Leiden
PL	*mgr. Andrzej Mąkowski* Univerzita Varšava	*Dr. Maciej Brynski* Univerzita Varšava
R	*Dr. Ion Cuculescu* Univerzita Bukurešť	*Constantin Ottescu* Liceul 21 Bukurešť
S	*Doc. Dr. Ake H. Samuelson* Univerzita Göteborg	*Stig Westlund* Stredná škola Halmstad
SF	*Matti Lehtinen* Univerzita Helsinki	*Jarmo Nyström* Stredná škola Pohjois-Tapiolan
SU	*Doc. Valentin A. Skvorcov* MGU Moskva	*Soňa I. Mojsejeva* Min. školstva Moskva
USA	*Prof. Dr. Samuel L. Greitzer* Rutgers University New Brunswick	*Cecil C. Rousseau* Memphis State University
VN	*Le Hai Chan* Min. školstva Hanoi	*Prof. Phan Duc Chinh* Univerzita Hanoi
YU	*Dr. Vladimír Mičić* Univerzita Belehrad	*Zoran Kadelburg* Matem. gymnázium Belehrad

3. K ČESKOSLOVENSKEJ ÚČASTI NA XVI. MMO

Družstvo ČSSR pre XVI. MMO vybralo predsedníctvo ÚV MO na záver týždenného sústredenia 10 žiakov, ktoré sa konalo v Prahe od 17. do 22. 6. 1974. Účastníci sústredenia boli vybraní na základe výsledkov III. a II. kola XXIII. ročníka MO a prípadnej predchádzajúcej účasti na MMO. Z účasti na sústredení sa ospravedlnili dvaja, do ktorých sa vkladali najväčšie nádeje: *Jaromír Šimša*, ktorý získal už na XIV. i XV. MMO tretiu cenu (pre účasť na sústredení maturantov odchádzajúcich na jeseň študovať do zahraničia) a *Pavel Ferst*, ktorý na XV. MMO získal dokonca II. cenu. Za nich bolo nutné povolať nahradníkov, medzi nimi i *Alenu Vencovskú*, ktorá sa napokon v Erfurte ukázala byť najlepšou členkou nášho družstva. Na základe poznatkov zo sústredenia ochudobneného o skúsených reprezentantov bolo do NDR vyslaných týchto 8 žiakov (v tabuľke sú zároveň uvedené výsledky, ktoré dosiahli na XVI. MMO):

Por. číslo	Priezvisko a meno	Trieda a škola	Počet bodov získaných za úlohu						
			1	2	3	4	5	6	Spolu
1.	*Balanda Lubomír*	3.b gymn. Český Těšín	5	4	0	6	1	0	16
2.	*Kindlmann Pavel*	4.a gymn. České Budějovice	5	6	3	6	2	1	23
3.	*Navrátil Jiří*	1.a gymn. Olomouc-Hejčín	5	6	0	2	5	0	18
4.	*Širáň Jozef*	4.b gymn. Bratislava, Novoh.	5	6	1	6	4	0	22
5.	*Trlifaj Jan*	4.d gymn. Pha 3, Sladkovsk.	5	6	0	6	0	1	18
6.	*Valášek Michael*	3.d gymn. Pha 2, W. Piecka	5	1	1	6	0	1	14
7.	*Vencovská Alena*	4. tr. gymn. Pha 1, Štěpánská	5	4	1	6	5	8	**29**
8.	*Voldřich Josef*	3. tr. gymn. Vimperk	5	6	0	6	0	1	18
Spolu			40	39	6	44	17	12	158

Ako vidno, naši žiaci si veľmi dobre poradili s 1. úlohou a s výnimkou víťaza XXIII. ročníka MO a najmladšieho člena čs. družstva *J. Navrátila* aj so 4. úlohou. Za veľmi dobrý možno považovať aj výsledok v 2. úlohe, ktorú neriešil s úspechom len *M. Valášek*. Katastrofálne sú však výsledky dosiahnuté vo všetkých troch tzv. ťažkých úlohách. Výnimku tvorí len jediná žena v čs. družstve *A. Vencovská*, ktorá veľmi vtipne riešila 6. úlohu (i keď s niektorými drobnými nepresnosťami) a pomerne úspešne aj 5. úlohu. Len to, že v 2. úlohe nedokázala postačujúcu podmienku, spôsobilo, že jej o vlások ušla II. cena. Ku jej cti slúži fakt, že maturovala v triede s humanitním zameraním a pokiaľ ide o matematiku, možno ju považovať do značnej miery za samouka. Ukázala, čo dokáže vytrvalosť a pevná vôľa, v čom môže opravdu slúžiť príkladom. Uspokojivý výsledok v 5. úlohe dosiahli ešte *J. Navrátil* a *J. Širáň*, ktorému ušla III. cena len o jediný bod. *P. Kindelmannovi*, jedinému z našich žiakov, ktorý sa zúčastňoval MMO po druhý raz, umožnili zopakovať vlaňajší úspech a získať opäť III. cenu pokusy o využitie binomickej vety pri riešení 3. úlohy.

Po spoločenskej stránke reprezentovali naši žiaci veľmi dobre. Tvorili stmelený kolektív s veľmi slušným vystupovaním. Neúspechy v súťaži ich viditeľne mrzeli a treba po pravde povedať, že i počas exkurzií sa zaoberali matematikou a riešením úloh. Po prvej klauzúre nešli na večeru dovtedy, kým sa im nepodarilo nájsť riešenie 3. úlohy (je uvedené nižšie), čo medzi drobničkami zo XVI. MMO zaznamenal aj Junge Welt. Úlohy, s ktorými si pri klauzúrach väčšina z nich neporadila, boli netradičné a pre našich stredoškolákov nezvyklé.

—

Ak chceme v budúcnosti dosahovať na MMO lepšie výsledky, bude treba po celý rok sa venovať príprave družstva.

Širší výber by mal byť známy už v septembri a s ním by bolo treba pracovať pravidelne, sústavne a cieľavedome po celý školský rok. Takto to robia dnes už prakticky vo všetkých krajinách, ktoré skončili na XVI. MMO v neoficiálnom poradí pred nami. Semináre poriadané v Prahe pre vybraných žiakov pražských škôl a týždenné sústredenie krátko pred odchodom na MMO k dobrej príprave rozhodne nepostačujú. Čas, prostriedky a energia venované systematickej príprave talentov by určite neboli samoúčelné.

Určitým prísľubom do budúcnosti sú 4 gymnázia so špeciálnymi matematickými triedami (po 2 v ČSR a SSR), ktoré sa od 1. 9. 1974 otvárajú z iniciatívy ÚV MO a predovšetkým jeho predsedu *doc. Vyšína, CSc.* Ani od nich však nemožno očakávať zázraky. Už aj preto nie, že pri najlepšej vôli nebudú môcť samotné podchytiť všetky matematické talenty.

4. RIEŠENIA SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Keďže z čísel p, q, r sa v každom kole každé vyskytuje práve raz, pre celkový počet rozdaných guličiek zrejme platí:

$$N(p + q + r) = 20 + 10 + 9 = 39 = 3 \, . \, 13 \, . \qquad (1)$$

Vzhľadom na to, že $N \geqq 2$ a pre navzájom rôzne prirodzené čísla p, q, r určite platí: $p + q + r \geqq 6$, vyplýva z (1):

$$N = 3 \, , \qquad p + q + r = 13 \, .$$

Keďže hráč B v treťom kole získal r guličiek a za celú hru len 10 guličiek (menej než 13), musel v prvom i druhom kole získať po p guličiek. Hráč A mohol v treťom kole získať najviac q guličiek a keďže jeho celkový zisk bol 20 guličiek (viac než 13), musel v prvom i druhom kole získať po r guličiek. Z toho vyplýva, že q guličiek v prvom kole získal hráč C.

Na základe vyššie vykonanej úvahy môžeme naviac určiť i číselné hodnoty p, q, r, pretože platí: $2p + r = 10$ (zisk hráče B) a buď $2r + p = 20$, $3q = 9$, alebo $2r + q = 20$, $2q + p = 9$. V prvom prípade dostávame $q = 3$, $p + r = 10$, $r - p = 10$ čiže $q = 3$, $r = 10$, $p = 0$, čo podmienkám úlohy nevyhovuje. V druhom prípade $r = 10 - 2p \leqq 8$, $q = 2 . (10 - r) \geqq 4$, $p = 9 - 2q \leqq 1$, z čoho hneď máme $p = 1$, $r = 8$, $q = 4$. Zisk guličiek jednotlivými hráčmi vo všetkých 3 kolách udáva teda nasledujúca tabuľka:

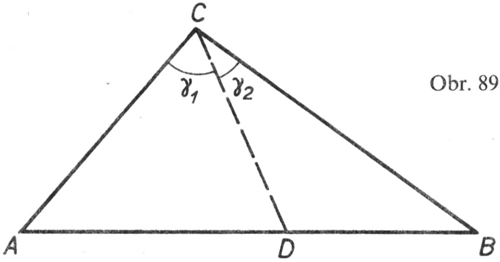
Kolo / Hráč	1.	2.	3.	$\sum$
A	8	8	4	20
B	1	1	8	10
C	4	4	1	9

Záver. V prvom kole získal q guličiek hráč C.

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Obr. 89. Nech vo vnútri úsečky AB existuje bod D tak, že platí:

$$CD^2 = DA . DB . \tag{1}$$



Obr. 89

Označme $\sphericalangle ACD = \gamma_1$, $\sphericalangle BCD = \gamma_2$. Platí zrejme $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. Pre trojuholníky ADC, BDC zo sínusovej vety vyplýva:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{CD}{AD} \sin \gamma_1 \,, \\ \sin \beta &= \frac{CD}{BD} \sin \gamma_2 \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Priamo z (1) a (2) dostaneme

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{CD^2}{AD \,.\, BD} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)]$$

čiže

$$\sin \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2}(\cos \delta - \cos \gamma) \,, \tag{3}$$

kde $0 \leqq |\gamma_1 - \gamma_2| = \delta < \gamma$. Zrejme vždy $\cos \delta \leqq 1$ a z (3) máme

$$\sin \alpha \sin \beta \leqq \tfrac{1}{2}(1 - \cos \gamma) = \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma \,, \tag{4}$$

čo sme mali dokázať.

Nech obrátene platí (4), t. j.

$$\cos\gamma < 2\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma \leqq 1\,,$$

pretože $\sin\alpha\sin\beta > 0$. Vzhľadom na to, že funkcia $\cos x$ je v intervale $\langle 0;\ \pi\rangle$ spojitá, existuje aspoň jedna hodnota $\delta \in \langle 0;\ \gamma)$ tak, že platí:

$$2\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma = \cos\delta\,. \tag{5}$$

Rozdelme uhol γ na uhly γ_1, γ_2 tak, aby platilo $|\gamma_1 - \gamma_2| = \delta$, t. j. buď $\gamma_1 - \gamma_2 = \delta$ alebo $\gamma_2 - \gamma_1 = \delta$. V prvom prípade

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta)\,, \qquad \gamma_2 = \tfrac{1}{2}(\gamma - \delta)\,,$$

pričom $\frac{1}{2}\gamma \leqq \gamma_1 < \gamma$, $0 < \gamma_2 \leqq \frac{1}{2}\gamma$. V druhom prípade

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\gamma - \delta)\,, \qquad \gamma_2 = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta)\,,$$

pričom $0 < \gamma_1 \leqq \frac{1}{2}\gamma$, $\frac{1}{2}\gamma \leqq \gamma_2 < \gamma$.

Ak označíme D priesečník úsečky AB so spoločným ramenom uhlov γ_1, γ_2, potom z (2) a (5) dostávame

$$\frac{CD^2}{AD\,.\,BD} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2} = 1\,.$$

čím sme dokázali, že vo vnútri úsečky AB existuje bod D s požadovanou vlastnosťou.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Označme pri danom prirodzenom n daný súčet A_n. Zrejme platí:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} = 2^{-3/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (2^{3/2})^{2k+1} .$$

Podľa binomickej vety platí

$$(2^{3/2} + 1)^{2n+1} = \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} (2^{3/2})^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (2^{3/2})^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (2^{3/2})^{2k} =$$

$$= 2^{3/2} A_n + B_n ,$$

kde

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (2^{3/2})^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{3k}$$

je pri každom prirodzenom n zrejme celé číslo.

Analogicky použitím binomickej vety dostaneme

$$(2^{3/2} - 1)^{2n+1} = 2^{3/2} A_n - B_n . \tag{1}$$

Vynásobením rovnosti (1) a rovnosti

$$(2^{3/2} + 1)^{2n+1} = 2^{3/2} A_n + B_n$$

dostaneme

$$2^3 A_n^2 - B_n^2 = (2^3 - 1)^{2n+1} . \tag{2}$$

Použitím kongruencií mod 5 sa rovnosť (2) redukuje na rovnosť

$$3A_n^2 - B_n^2 \equiv 2(-1)^n \pmod 5 .$$

Keďže $0^2 \equiv 0 \pmod 5$, $1^2 \equiv 4^2 \equiv 1 \pmod 5$, $2^2 \equiv 3^2 \equiv -1 \pmod 5$, nebude pre žiadne n $B_n^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$, čo znamená, že $3A_n^2 \not\equiv 0 \pmod 5$ a teda $A_n \not\equiv 0 \pmod 5$ platí pri každom prirodzenom n, čo sme mali dokázať.

Iné riešenie: Zrejme platí:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(5+3)^k \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 3^k \pmod 5 .$$

Označme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 3^k = \frac{(\sqrt{3}+1)^{2n+1} + (\sqrt{3}-1)^{2n+1}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(4+2\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} .$$

Keďže čísla $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$ vyhovujú rovnici

$$x^2 - 8x + 4 = 0 ,$$

platí zrejme rekurentný vzťah

$$S_{n+2} = 8S_{n+1} - 4S_n \tag{3}$$

pre každé celé číslo $n \geqq 0$. Z (3) hneď dostaneme

$$S_{n+2} \equiv S_n - 2S_{n+1} \pmod 5 . \tag{4}$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že platí:

$$S_0 \equiv 1 \pmod 5 , \qquad S_1 \equiv 1 \pmod 5 . \tag{5}$$

Z (5) a (4) postupne dostaneme

$$
\begin{aligned}
S_2 &\equiv 1 - 2.1 \equiv 4 \pmod 5, & S_3 &\equiv 1 - 2.4 \equiv 3 \pmod 5, \\
S_4 &\equiv 4 - 2.3 \equiv 3 \pmod 5, & S_5 &\equiv 3 - 2.3 \equiv 2 \pmod 5, \\
S_6 &\equiv 3 - 2.2 \equiv 4 \pmod 5, & S_7 &\equiv 2 - 2.4 \equiv 4 \pmod 5, \\
S_8 &\equiv 4 - 2.4 \equiv 1 \pmod 5, & S_9 &\equiv 4 - 2.1 \equiv 2 \pmod 5, \\
S_{10} &\equiv 1 - 2.2 \equiv 2 \pmod 5, & S_{11} &\equiv 2 - 2.2 \equiv 3 \pmod 5, \\
S_{12} &\equiv 2 - 2.3 \equiv 1 \pmod 5, & S_{13} &\equiv 3 - 2.1 \equiv 1 \pmod 5,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Zo (6) a (5) vzhľadom na (4) vyplýva, že pre všetky $k \geqq 0$ platí

$$S_{12+k} \equiv S_k \pmod 5.$$

Keďže $S_k \not\equiv 0 \pmod 5$ pre $k = 0, 1, \ldots, 11$, znamená to zároveň, že $S_k \equiv 0 \pmod 5$ pre všetky $k \geqq 0$ čiže $A_n \not\equiv 0 \pmod 5$ pre každé prirodzené číslo n, čo sme mali dokázať.

Pozn.: Týmto spôsobom riešil 3. úlohu najmladší člen čs. družstva *J. Navrátil*, žiaľ, až po súťaži.

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

Predovšetkým si treba uvedomiť, že

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = 32. \tag{1}$$

Z ostrej monotónnosti čísel a_i vyplýva ďalej, že musí byť $a_i \geqq i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, z čoho priamo máme

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \geqq \sum_{i=1}^{p} i = \frac{p(p+1)}{2}. \tag{2}$$

Z (1) a (2) dostávame nerovnosť

$$\frac{p(p+1)}{2} \leqq 32 \quad \text{čiže} \quad p(p+1) \leqq 64,$$

ktorej vyhovujú len tie prirodzené čísla p, pre ktoré platí:

$$p \leqq 7.$$

Pokúsime sa overiť existenciu rozkladu požadovaných vlastností pre najväčšie z nich, t. j. $p = 7$. Keďže $\sum_{i=1}^{7} i = 28$, je rozklad čísla 32 na 7 rôznych sčítancov s najväčším možným sčítancom

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 11. \tag{3}$$

Z neho postupným zmenšovaním najväčších sčítancov a zväčšovaním vhodných menších dostaneme všetky také rozklady čísla 32 na 7 sčítancov, ktoré vyhovujú požadovaným podmienkam:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10, \tag{4}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9, \tag{5}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9, \tag{6}$$

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8. \tag{7}$$

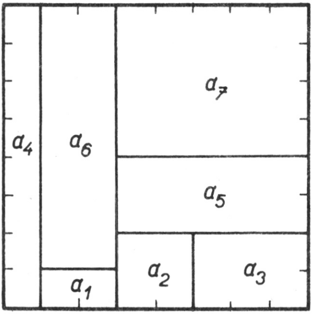
Rozklad šachovnice na 7 rovnobežníkov s počtom bielych polí podľa (3) neexistuje, pretože rovnobežník s 22 poliami by musel mať rozmery 1×22, resp. 2×11, čo na šachovnici s 8×8 poliami nie je možné. Rozklady šachovnice na rovnobežníky s počtom bielych polí podľa (4)–(7) sú na obr. 90–94.

Záver. Najväčším číslom p, pre ktoré je možné rozdelenie šachovnice požadovaných vlastností, je teda číslo 7 a daným podmienkam vyhovujú nasledujúce 7-členné postupnosti: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 1, 2, 3, 5, 6, 7,8. V obrázkoch 90–93 sú jednotlivé rovnobežníky označené tým členom príslušnej postupnosti, ktorý sa rovná počtu bielych polí v nich obsiahnutých.

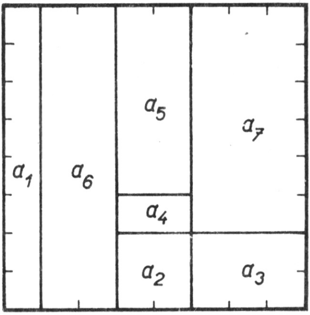
RIEŠENIE 5. ÚLOHY

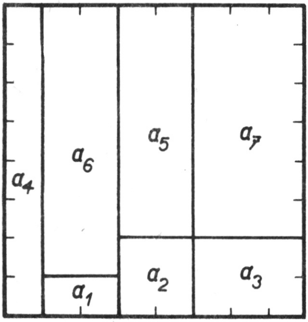
Pre každú štvoricu kladných reálnych čísel a, b, c, d zrejme platí

Obr. 90

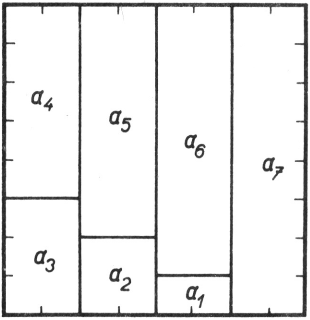


Obr. 91





Obr. 92



Obr. 93

$$1 = \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} +$$

$$+ \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} <$$

$$< \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} +$$

$$+ \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} = S <$$

$$< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2\,.$$

Tým sme ukázali, že všetky hodnoty súčtu S pre ľubovoľné štvorice a, b, c, d kladných reálnych čísel musia ležať v intervale $(1;\ 2)$.

Pokúsme sa ešte ukázať, že súčet S každé číslo $x \in (1;\ 2)$ skutočne pre nejakú štvoricu a, b, c, d nadobúda. Označme

$S(a, b, c, d)$ hodnotu daného súčtu pre štvoricu a, b, c, d. Ľahko sa vidí, že $S(ka, kb, kc, kd) = S(a, b, c, d)$ pre každé kladné reálne číslo k. Stačí preto uvažovať len o takých štvoriciach a, b, c, d, pre ktoré platí $a + b + c + d = 1$. Označme $a + c = u$, $b + d = v$, kde u, v sú také kladné reálne konštanty, pre ktoré platí $u + v = 1$. Pre také štvorice a, b, c, d kladných reálnych čísel je

$$S(a, b, c, d) = \frac{a}{a + v} + \frac{c}{c + v} + \frac{b}{b + u} + \frac{d}{d + u} =$$

$$= \frac{2ac + uv}{ac + uv + v^2} + \frac{2bd + uv}{bd + uv + u^2} =$$

$$= \frac{2ac + u - u^2}{ac + 1 - u} + \frac{2bd + v - v^2}{bd + 1 - v}.$$

Ak a, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla, pre ktoré $a + c = u$, kde u je pevné, potom $0 < ac < \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{4}$. Analogicky pre b, d, pre ktoré $b + d = v$ je $0 < bd < \left(\frac{b + d}{2}\right)^2 = \frac{v^2}{4}$. Zlomok $\frac{2ac + u - u^2}{ac + 1 - u} = S'_1(ac)$ je pri pevnom $u \in (0, 1)$ rastúcou funkciou ac, pretože $S'_1(ac) = \frac{(2 - u)(1 - u)}{(ac + 1 - u)^2} > 0$ a analogicky $S_2(bd) = \frac{2bd + v - v^2}{bd + 1 - v}$ pri pevnom v je rastúcou funkciou bd. Z toho vyplýva, že

$$u < S_1 \leqq \frac{2u}{2 - u}, \qquad v < S_2 \leqq \frac{2v}{2 - v}$$

a teda

$$1 = u + v < S \leqq \frac{2u}{2-u} + \frac{2v}{2-v} = \frac{4-4uv}{2+uv}.$$

Keďže zlomok $S_3(uv) = \dfrac{4-4uv}{2+uv}$ je spojitou klesajúcou funkciou uv:

$$S'_3(uv) \doteq -\frac{12}{(2+uv)^2} < 0 \quad \text{a} \quad \lim_{uv \to 0} \frac{4-4uv}{2+uv} = 2,$$

nadobúda súčet S všetky hodnoty z intervalu $(1, 2)$.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Ak má celočíselné korene len jedna z rovníc

$$P(x) = 1, \tag{1}$$

$$P(x) = -1, \tag{2}$$

potom zrejme je $n(P) \leqq \deg(P)$ a daná nerovnosť je splnená. Nech pre mnohočlen P súčasne existujú celočíselné korene rovnice (1) i rovnice (2). Nech k, m sú ľubovoľné celé čísla, pre ktoré platí $P(k) = 1$, $P(m) = -1$. Potom $P(k) - P(m) = 2$. Keďže $k - m$ delí celé číslo $P(k) - P(m)$, musí byť buď $|k - m| = 1$, alebo $|k - m| = 2$. To však znamená, že pre ľubovoľný nekonštantný mnohočlen P, pre ktorý majú obe rovnice (1), (2) celočíselné riešenie, je $n(P) \leqq 5$. Z toho vyplýva, že daná nerovnosť je splnená pre každý mnohočlen P, pre ktorý $\deg(P) \geqq 3$. Keďže pre mnohočlen 2. stupňa je $n(P) \leqq 4$ a pre mnohočlen 1. stupňa je $n(P) \leqq 2$, je daná nerovnosť splnená pre každý nekonštantný mnohočlen P, čo sme mali dokázať.

Pozn.: Uvedené riešenie vzniklo úpravou riešenia najúspešnejšej čs. účastníčky XVI. MMO *A. Vencovskej*.