23. ročník matematické olympiády

V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

A – III – 1

Je daná postupnosť kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ s touto vlastnosťou: Pre každé $n \geqq 2$ platí

$$a_{n+1} \,.\, a_{n-1} \geqq a_n^2 \,. \tag{1}$$

Označme

$$b_n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \,. \tag{2}$$

Potom platí pre každé $n \geqq 2$:

$$b_{n+1} \,.\, b_{n-1} \geqq b_n^2 \,; \tag{3}$$

dokážte.

RIEŠENIE

Tvrdenie dokážeme metódou matematickej indukcie.

1. Pre $n = 2$ z (1) dostaneme

$$a_3 \,.\, a_1 \geqq a_2^2 \,. \tag{4}$$

Keďže čísla a_i, $i = 1, 2, 3$ sú všetky kladné, dostaneme vynásobením nerovnosti (4) číslom a_2: $a_1 a_2 a_3 \geqq a_2^3$, z čoho po odmocnení máme

$$(a_1 a_2 a_3)^{1/3} \geqq a_2 . \tag{5}$$

Ak nerovnosť (5) vynásobíme číslom a_1 a použijeme (2) pre $n = 1, 2, 3$, dostaneme

$$b_1 . b_3 \geqq b_2^2 ,$$

čím sme dokázali platnosť (3) pre $n = 2$.

2. Nech teraz (3) platí pre nejaké prirodzené číslo $k \geqq 2$, t. j.

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^{1/(k+1)} . \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{1/(k-1)} \geqq \left(\prod_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/k} . \tag{6}$$

Z nerovnosti (6) po umocnení na $k(k-1)(k+1)$ vzhľadom na to, že na oboch stranách sú kladné čísla, dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^{k(k-1)} . \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{k(k+1)} \geqq \left(\prod_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{k^2-1} \tag{7}$$

Z nerovnosti (7) jednoduchou úpravou dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{2k^2} . (a_k . a_{k+1})^{k^2-k} \geqq \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{2k^2-2} . a_k^{2k^2-2} ,$$

z čoho po vydelení číslom $\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right)^{2k^2-2}$ a vynásobení $a_k^{2-k^2+k}$ vyplýva

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{2} . a_{k+1}^{k^2-k} \geqq a_k^{k^2+k} . \tag{8}$$

Ak nerovnosť (8) vynásobíme číslom $a_{k+2}^{k^2+k}$, dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^2 . a_{k+1}^{k^2-k} . a_{k+2}^{k^2+k} \geqq (a_k . a_{k+2})^{k^2+k},$$

z čoho vyplýva, ak použijeme (1) pre $n = k + 1$:

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^2 . a_{k+1}^{k^2-k} . a_{k+2}^{k^2+k} \geqq (a_{k+1})^{2k^2+2k}. \tag{9}$$

Nerovnosť (9) možno upraviť na tvar

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^2 . (a_{k+2})^{(k+1)^2-(k+1)} \geqq (a_{k+1})^{(k+1)^2+(k+1)-2},$$

z čoho po vynásobení číslom $\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{2(k+1)^2-2}$ a jednoduchej úprave máme

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{2(k+1)^2} . (a_{k+1} . a_{k+2})^{(k+1)^2-(k+1)} \geqq$$

$$\geqq \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{2(k+1)^2-2} . (a_{k+1})^{2(k+1)^2-2}.$$

Z toho po vydelení číslom $\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{k^2+3k}$ a jednoduchej úprave dostaneme

$$\left(\prod_{i=1}^{k+2} a_i\right)^{k(k+1)} . \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{(k+1)(k+2)} \geqq \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^{2k(k+2)}.$$

Z poslednej nerovnosti po umocnení na $1/k(k+1)(k+2)$ vzhľadom na (2) dostávame

$$b_{k+2} . b_k \geqq b_{k+1}^2.$$

Tým sme dokázali, že (3) platí pre $n = k + 1$.

Vzhľadom na 1. a 2. platí nerovnosť (3) pre každé prirodzené číslo n ako sme mali dokázať.

Riešil *Jozef Širáň*,
4.b tr. gymnázia Jura Hronca, Bratislava

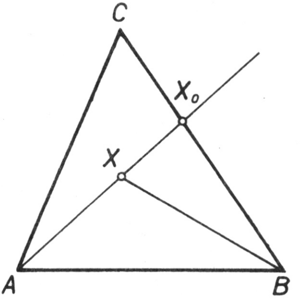
A – III – 2

Je daný trojuholník ABC. Pre každý bod X trojuholníka ABC označme $m(X)$ najmenšiu zo vzdialeností XA, XB, XC. Zostrojte všetky body X trojuholníka ABC, pre ktoré je $m(X)$ maximálna.

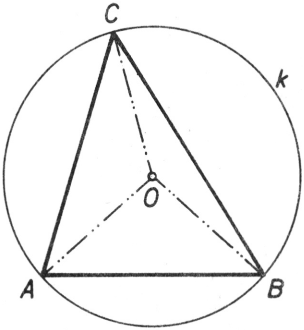
RIEŠENIE

Najskôr dokážeme pomocnú vetu: Pre každý bod $X \not\equiv C$ trojuholníka ABC platí: $AX + BX < AC + BC$.

Označme X_0 priesečník polpriamky AX s úsečkou BC v prípade, keď X je vnútorný bod trojuholníka ABC (pozri obr. 82). Zrejme platí: $AX_0 < AC + CX_0$. Z toho priamo



Obr. 82



Obr. 83

vyplýva: $AX_0 + BX_0 < AC + CX_0 + BX_0 = AC + BC$. Keďže $BX < XX_0 + BX_0$, je $AX + BX < AX + XX_0 + BX_0 = AX_0 + BX_0$. Z nerovností $AX + BX < AX_0 + BX_0$ a $AX_0 + BX_0 < AC + BC$ priamo vyplýva správnosť dokazovanej nerovnosti v prípade, keď X je vnútorným bodom trojuholníka ABC. Pre body X ležiace na obvode trojuholníka ABC je uvedená nerovnosť zrejme splnená.

1. Nech trojuholník ABC je ostrouhlý. Označme O stred jeho opísanej kružnice (pozri obr. 83). Nech pre bod $X \not\equiv O$ ležiaci napr. v trojuholníku AOC platí $AX \geqq r$ a súčasne $CX \geqq r$. Potom aj $AX + CX \geqq 2r = AO + CO$, čo je v spore s tvrdením pomocnej vety. Musí preto platiť buď $AX < r$ alebo $CX < r$. Pre bod O však platí $AO = BO = CO = r$. Je teda $m(O)$ maximálne.

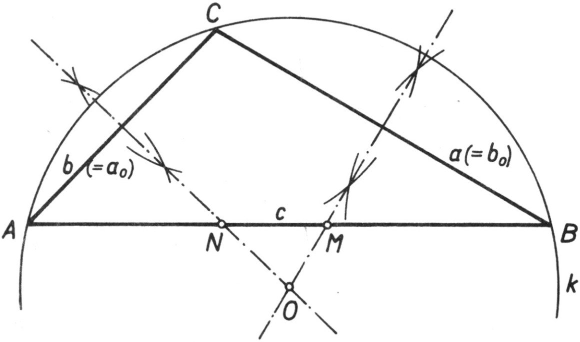
2. Nech trojuholník ABC je tupouhlý s tupým uhlom pri vrchole C (pozri obr. 84). Označme b_0 väčšiu zo strán a, b trojuholníka ABC. Označme M priesečník osi strany b_0 so stranou c. Pre tupouhlý trojuholník zrejme platí $AM = MC < MB$. Je teda $m(M) = AM = MC = d$. Na základe pomocnej vety dokážeme nepriamo, že pre ľubovoľný bod X $(X \not\equiv M)$ trojuholníka AMC platí $CX < d$ alebo $AX < d$.

Nech a_0 je menšia zo strán a, b trojuholníka ABC. Označme N priesečník osi strany a_0 so stranou c. Zrejme platí $a_0 \leqq b_0$.

a) Ak je $a_0 < b_0$, je zrejme tiež $CN < CM = d$ a bod N leží preto vo vnútri kružnice opísanej okolo bodu C s polomerom $CM = d$. Pre body X trojuholníka MNC rôzne od bodu C je teda $CX < d$. Na základe pomocnej vety vyššie použitým postupom ľahko dokážeme, že pre body X trojuholníka BNC platí buď $BX < d$ alebo $CX < d$. Maximálna je teda vzdialenosť $m(M)$.

b) Ak platí $a_0 = b_0 = a = b$, je trojuholník ABC rovnoramenný. V tomto prípade je $CM = CN$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade ľahko dokážeme, že funkcia $m(X)$ nadobúda maximum v dvoch bodoch: M a N.

3. Ak trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom



Obr. 84

pri vrchole C, bude $m(X)$ maximálne zrejme pre stred strany AB, ktorý bude stredom opísanej kružnice trojuholníka ABC.

Záver: Ak ABC je ostrouhlý alebo pravouhlý trojuholník, je hľadaný bod práve jeden – stred opísanej kružnice.

Ak trojuholník ABC je tupouhlý nerovnoramenný, je hľadaným bodom bod M, ktorého konštrukcia je popísaná v časti **2a**.

V prípade rovnoramenného tupouhlého trojuholníka sú hľadané body dva, M a N – ich konštrukcia je popísaná v časti **2b**.

Riešil *Ján Krajčík*,
3.b gymnázia Jura Hronca, Bratislava

A – III – 3

Nech pre každé prirodzené číslo m, ktoré je v dekadickom zápise aspoň dvojciferné a má číslice navzájom rôzne, znamená $f(m)$ súčet všetkých prirodzených čísel rôznych od m, ktoré z čísla m dostaneme zmenou poradia jeho číslic (napríklad $f(302) = 320 + 023 + 032 + 230 + 203 = 808$).

Nájdite všetky prirodzené čísla x, pre ktoré platí

$$f(x) = 138\,012\,. \qquad (1)$$

ŘEŠENÍ

Nejprve ukážeme, že číslo x splňující rovnici (1) musí být čtyřciferné. Pro dvojciferné číslo $x = 10x_1 + x_2$, $x_1 \neq x_2$, máme $f(x) = 10x_2 + x_1$, což nevyhovuje vztahu (1). Pro trojciferné číslo x s různými číslicemi lze $f(x)$ vyjádřit jako součet pěti přirozených čísel menších než 999. Je tedy $f(x) < 999 \,.\, 5 = 4\,995 < 138\,012$. Kdyby číslo x bylo pěticiferné nebo mělo ještě větší počet (navzájem různých) číslic, mohli bychom je vyjádřit jako součet aspoň 119 sčítanců ($5! - 1 = 119$), z nichž každý by byl aspoň 01 234. Měli bychom $f(x) \geqq 01\,234 \,.\, 119 = 146\,846 > 138\,012$.

Zbývá probrat čtyřciferná čísla x s navzájem různými číslicemi, jež vyhovují vztahu (1). Tuto část řešení provedeme způsobem, který použil *Ivo Semrád*, žák 4.b třídy gymnázia v Opavě.

Položme $x = 1\,000x_1 + 100x_2 + 10x_3 + x_4$. Je vidět, že

$$f(x) + x = 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \,.\, 1\,111 \,, \tag{2}$$

neboť mezi všemi permutacemi různých čísel x_1, x_2, x_3, x_4 je právě $(4 - 1)! = 6$ takových, které mají na témž místě totéž číslo.

Po dosazení do (2) dostáváme

$$138\,012 + x = 6\,666(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \,,$$

tj.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 + \frac{4\,692 + x}{6\,666} \,. \tag{3}$$

Číslo x je čtyřciferné, a proto čitatel na pravé straně rovnice (3) je menší než 15 000, takže tento zlomek je roven buď 1 nebo 2. V prvním případě

$$x' = 6\,666 - 4\,692 = 1\,974 \,,$$

v druhém případě

$$x'' = 2 \,.\, 6\,666 - 4\,692 = 8\,640\,.$$

Rovnici (3) vyhovuje pouze číslo 1 974. Číslo 8 640 rovnici (3) nevyhovuje, a proto není řešením dané úlohy.

Pro číslo 1 974 podle rovnosti (2) dostáváme, že

$$f(1\,974) = 6 \,.\, 21 \,.\, 1\,111 - 1\,974 = 138\,012\,.$$

Číslo 1 974 je tedy jediným řešením dané úlohy.

A – III – 4

Nech $\mathscr{M}$ je množina všetkých polynomických funkcií f stupňa najviac 3

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, \tag{1}$$

pre ktoré platí

$$\forall x \in \langle -1, 1 \rangle\,; \qquad |f(x)| \leqq 1\,.$$

Dokážte, že existuje kladné číslo k tak, že

$$\forall f \in \mathscr{M}\,; \qquad |a| \leqq k\,. \tag{2}$$

Určte najmenšie kladné číslo k tejto vlastnosti.

ŘEŠENÍ

Pro každou funkci $f \in \mathscr{M}$ platí:

$$|f(1)| = |a + b + c + d| \leqq 1\,, \tag{3}$$
$$|f(-1)| = |-a + b - c + d| \leqq 1\,, \tag{4}$$
$$|f(\tfrac{1}{2})| = |\tfrac{1}{8}a + \tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{2}c + d| \leqq 1\,, \tag{5}$$
$$|f(-\tfrac{1}{2})| = |-\tfrac{1}{8}a + \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{2}c + d| \leqq 1\,. \tag{6}$$

Dále budeme používat věty: Nechť x, y, z, v jsou libovolná reálná čísla. Jestliže $|x| \leqq z$ a zároveň $|y| \leqq v$, pak $|x + y| \leqq z + v$.

Z nerovností (3) a (4) plyne podle zmíněné věty:

$$2\,.\,|a + c| \leqq 2\,,$$

tj.

$$|a + c| \leqq 1\,. \tag{7}$$

Z nerovností (5) a (6) plyne:

$$2\,.\,|\tfrac{1}{8}a + \tfrac{1}{2}c| \leqq 2\,,$$
$$|\tfrac{1}{8}a + \tfrac{1}{2}c| \leqq 1\,,$$

neboli

$$|-\tfrac{1}{4}a - c| \leqq 2\,. \tag{8}$$

Z nerovností (7) a (8) opět podle zmíněné věty dostáváme

$$|a - \tfrac{1}{4}a| \leqq 3\,,$$

tj.

$$|a| \leqq 4\,.$$

Tím je dokázána *existence* čísla k, které má vlastnost (2).

Tuto vlastnost má každé číslo

$$k \geqq 4.$$

Nyní ukážeme, že nejmenší kladné číslo k požadované vlastnosti je $k = 4$. Je třeba dokázat, že množina $\mathcal{M}$ obsahuje aspoň jednu polynomickou funkci (1), jejíž koeficient $a = 4$.

Uvažujme mnohočlen

$$g(x) = 4x^3 - 3x.$$

Potom

$$g'(x) = 12x^2 - 3.$$

Mnohočlen $g(x)$ tedy může mít lokální extrém v bodech $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Platí

$$g''(x) = 24x,$$

takže $g''(\frac{1}{2}) = 12 > 0$ a $g''(-\frac{1}{2}) = -12 < 0$. V bodě $x_1 = \frac{1}{2}$ má mnohočlen $g(x)$ lokální minimum, v bodě $x_2 = -\frac{1}{2}$ lokální maximum.

Dále platí

$$g(\tfrac{1}{2}) = -1, \qquad g(-\tfrac{1}{2}) = 1,$$
$$g(1) = 1, \qquad g(-1) = -1.$$

Mnohočlen $g(x)$ nabývá v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ nejmenší hodnoty -1 v bodech $\frac{1}{2}$ a -1, největší hodnoty 1 v bodech $-\frac{1}{2}$ a 1. Tedy pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je $|g(x)| \leqq 1$, tj.

$$g \in \mathcal{M}.$$

Tím je dokázáno, že $k = 4$ je nejmenší číslo k, jež má vlastnost (2).

Řešil *Jiří Navrátil*,
žák 1.a gymnázia v Olomouci-Hejčíně

A – III – 5

Je dána kružnice a do ní je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$ takový, že

$$AB = BC\,, \qquad CD = DE\,, \qquad EF = FA\,. \tag{1}$$

Dokažte, že obsah trojúhelníka ACE není větší než obsah trojúhelníka BDF. Kdy platí rovnost?

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$AB \leqq CD \leqq EF\,. \tag{2}$$

Trojúhelník ACE otočme kolem středu S kružnice k tak, aby $A \to B$ (viz obr. 85); otočený trojúhelník označme $A'C'E'$. Pak $CE \parallel A'E'$, neboť vzdálenost otočených vrcholů

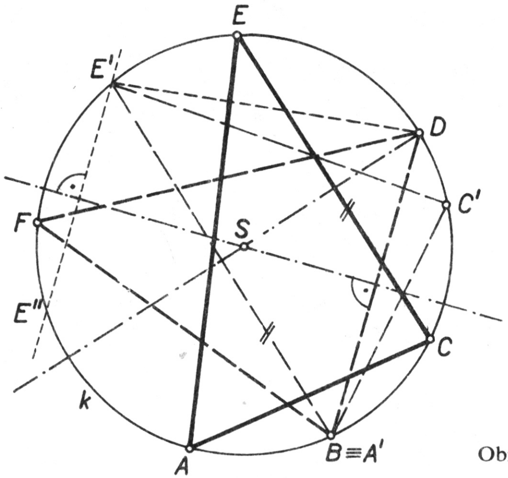
$$EE' = AA' = AB\,;$$

podle zadání

$$AB = BC = A'C\,,$$

takže

$$A'C = EE'\,.$$



Obr. 85

Protože tyto shodné úsečky jsou v jedné polorovině vyťaté přímkou CE, je $A'CEE'$ rovnoramenný lichoběžník.

Přímka SD je tedy osou tětiv CE i $A'E'$. Je patrno, že pro obsahy trojúhelníků ACE, $A'C'E'$, $A'DE'$ platí

$$P_{ACE} = P_{A'C'E'} \leqq P_{A'DE'} \,. \tag{3}$$

Trojúhelníky $A'C'E'$ a $A'DE'$ mají totiž společnou stranu $A'E'$ a výška příslušná k této straně je v $\triangle A'C'E'$ menší nebo rovna výšce na tuto stranu v $\triangle A'DE'$.

Nyní sestrojme bod E'' souměrně sdružený s bodem E' dle osy úsečky $A'D$. Nad tětivou DE' jsou dvě tětivy $E'E$ a ED. Nyní jsou opět nad tětivou $A'E''$ dvě tětivy, přičemž $AA' = EE'$. Ze shodnosti vyplývá, že i $AE'' = DE$. Podle (1) a (2) dostáváme $AE'' \leqq AF$. Protože však z předpokladu (2) vyplývá, že $EE' = AB \leqq EF$, lze vzhledem k tomu, že body E', E'' a F leží v téže polorovině určené přímkou AE, vyslovit závěr, že v případě $E' = E''$ je $F = E' = E''$, v případě $E' \neq E''$ leží bod F na oblouku kružnice k určeném body E'', E' a neobsahujícím bod A. V tomto případě je $E''E' \parallel A'D$.

Výška $\triangle A'DE'$ na stranu $A'D$ je tedy menší nebo rovna výšce $\triangle A'DF$ na stranu $A'D$. Tedy pro obsahy trojúhelníků $A'DE'$, $A'DF$ a BDF platí

$$P_{A'DE'} \leqq P_{A'DF} = P_{BDF} \,. \tag{4}$$

Z nerovností (3) a (4) vyplývá, že

$$P_{ACE} \leqq P_{BDF} \,. \tag{5}$$

Z postupu je patrno, že rovnost v (5) nastane, právě když bude

$$C' = D \quad \text{a} \quad E' = F \,,$$

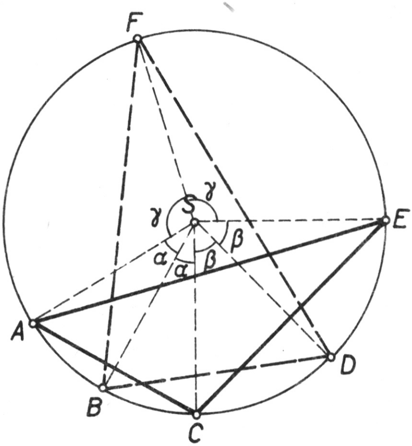
tedy půjde-li o pravidelný šestiúhelník.

Řešil *Josef Pavel*,
žák 1.a třídy gymnázia v Rychnově nad Kněžnou

DRUHÝ ZPŮSOB. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že daná kružnice má poloměr 1. Střed dané kružnice (obr. 86) označíme S. Dále zavedeme označení úhlů:

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \alpha \,, \qquad \sphericalangle CSD = \sphericalangle DSE = \beta \,,$$

$$\sphericalangle ESF = \sphericalangle FSA = \gamma \,.$$



Obr. 86

Zřejmě platí

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi\,,$$

neboli

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi\,.$$

Z toho plyne, že úhly α, β, γ leží v intervalu $(0, \pi)$.

Nyní vyjádříme obsahy trojúhelníků ACE a BDF pomocí α, β, γ:

$$P_{ACE} = \tfrac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) =$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) +$$

$$+ \sin(\gamma + \alpha)\cos(\gamma - \alpha)]\,,$$

$$P_{BDF} = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)]\,.$$

Tyto rovnosti platí pro každou polohu bodu S vzhledem k trojúhelníkům ACE a BDF.

Máme dokázat nerovnost:

$$\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)+$$
$$+\sin(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha)]\leqq$$
$$\leqq\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)]\,. \qquad (1)$$

Tuto nerovnost přepíšeme do tvaru:

$$\sin(\alpha+\beta)\,.\,[1-\cos(\alpha-\beta)]+$$
$$+\sin(\beta+\gamma)\,.\,[1-\cos(\beta-\gamma)]+$$
$$+\sin(\gamma+\alpha)\,.\,[1-\cos(\gamma-\alpha)]\geqq 0\,. \qquad (2)$$

Protože $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, platí

$$\sin(\alpha+\beta)>0\,, \qquad \sin(\beta+\gamma)>0\,, \qquad \sin(\gamma+\alpha)>0\,.$$

Výrazy v lomených závorkách na levé straně nerovnosti (2) jsou zřejmě nezáporné; to znamená, že nerovnost (2) a tedy také (1) je vždy splněna.

Rovnost v (2) a v (1) může nastat tehdy a jen tehdy, když platí

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\gamma)=\cos(\gamma-\alpha)=1\,.$$

Protože však $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, nastane rovnost právě když

$$\alpha=\beta=\gamma=\tfrac{1}{3}\pi\,,$$

tj. když šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

Řešil *Jiří Navrátil*,
žák 1.a třídy gymnázia v Olomouci-Hejčíně

A – III – 6

V rovině ϱ je dán jednotkový čtverec $\mathcal{Q}$. Označme $\mathcal{Q}_X$ čtverec, který vznikne otočením čtverce $\mathcal{Q}$ kolem bodu X roviny ϱ o pravý úhel v kladném smyslu. Určete množinu všech takových bodů X roviny ϱ, pro které je obsah sjednocení $\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_X$ roven nejvýše 1,5.

ŘEŠENÍ

Podmínka vyslovená v textu úlohy je ekvivalentní s podmínkou, že obsah $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X$ je aspoň 0,5; pro obsahy platí totiž – jak známo – vztah

$$\overline{\mathcal{Q}} + \overline{\mathcal{Q}}_X = \overline{\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X} + \overline{\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_X}\,.$$

Klíčem k řešení je věta: Nechť v rovině ϱ leží čtverce $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}'$, které nejsou totožné. Pak v rovině ϱ existuje takový bod X, že čtverec $\mathcal{Q}'$ je obrazem čtverce $\mathcal{Q}$ v otočení kolem bodu X o pravý úhel v kladném smyslu, právě když existuje rovnoběžné posunutí, které převádí čtverec $\mathcal{Q}$ ve čtverec $\mathcal{Q}'$. Tuto větu si jistě čtenář sám snadno dokáže.

Zvolme soustavu souřadnic tak, aby počátek byl střed čtverce $\mathcal{Q}$, strany obou čtverců $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}_X$ rovnoběžné s osami souřadnic. Vyšetřujme středy $[\xi, \eta]$ čtverců $\mathcal{Q}_X$ nejprve v prvním kvadrantu. Střed $[\xi, \eta]$ určitě náleží čtverci $\mathcal{Q}$, neboť jinak by bylo $\overline{\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X} < 0{,}5$ proti předpokladu. Je tedy

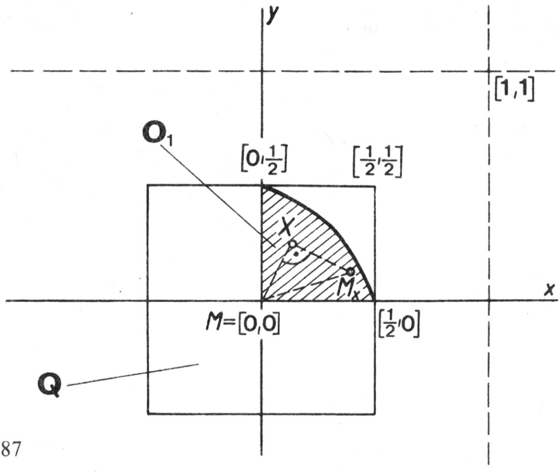
$$0 \leqq \xi \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad 0 \leqq \eta \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

Průnik $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_X$ je pravoúhelník o stranách $1 - \xi$, $1 - \eta$; je-li p jeho obsah, platí

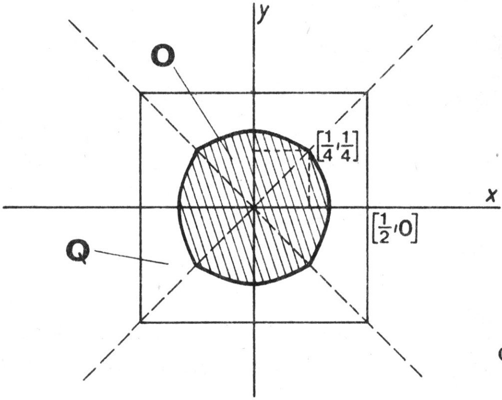
$$(1 - \xi)(1 - \eta) = p \qquad \left(\tfrac{1}{2} \leqq p \leqq 1\right). \tag{2}$$

Vztahy (1), (2) jsou analytickým vyjádřením oblouku rovnoosé hyperboly, která má střed v bodě $[1, 1]$, za asymptoty má přímky $\xi = 1$, $\eta = 1$, vrchol $[1 - \sqrt{p}, 1 - \sqrt{p}]$ a osy souřadnic protíná v bodech $[0, 1 - p]$, $[1 - \mathrm{p}, 0]$. Protože je $p \geqq \frac{1}{2}$, je $\sqrt{p} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $1 - \sqrt{p} \leqq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Probíhá-li číslo p interval $\langle\frac{1}{2}, 1\rangle$, pak oblouky hyperbol o analytickém vyjádření (1), (2) vyplní obrazec $\mathcal{O}_1$ vyšrafovaný na obr. 87. Z podmínek (1), (2) a výše uvedené věty vyplývá, že obrazec $\mathcal{O}_1$ je množinou středů všech čtverců $\mathcal{Q}_X$, jejichž středy leží v 1. kvadrantu.

Střed M_X čtverce $\mathcal{Q}_X$ vznikne ze středu M čtverce $\mathcal{Q}$ oto-



Obr. 87



Obr. 88

čením kolem bodu X o $90°$ v kladném smyslu. Proto vznikne bod X z bodu M_X otočením kolem středu M o $45°$ v kladném smyslu a zmenšením vzdáleností MM_X v poměru $\sqrt{2}:1$. Otočený a zmenšený sektor k sektoru $\mathcal{O}_1$ je naznačen na obr. šrafováním.

Ostatní kvadranty se doplní pomocí symetrií. Množinou všech bodů X, které mají vlastnost uvedenou v textu úlohy, je obrazec $\mathcal{O}$, jehož obvod je na obr. 88 vytažen tlustě.