23. ročník matematické olympiády

III. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 23. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976. pp. 89–162.

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE A I. KOLA

A – I – 1

Buďte x_1, x_2, x_3 tři kladná čísla. Buďte y_1, y_2, y_3 tři kladná čísla, která leží mezi největším a nejmenším z čísel x_1, x_2, x_3 a nechť platí

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq y_1 + y_2 + y_3 \,. \tag{1}$$

Dokažte, že pak je

$$x_1 x_2 x_3 \leqq y_1 y_2 y_3 \,, \tag{2}$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \leqq y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 \,. \tag{3}$$

KOMENTÁŘ

Podmínky (1), (2), (3) se týkají tzv. elementárních symetrických funkcí proměnných x_i, resp. y_i. Označme:

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \,, \qquad \sigma_1 = y_1 + y_2 + y_3 \,,$$

$$s_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \,, \qquad \sigma_2 = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 \,,$$

$$s_3 = x_1 x_2 x_3 \,, \qquad \sigma_3 = y_1 y_2 y_3 \,.$$

Symetrie těchto funkcí umožňuje zvolit označení tak, aby platilo

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3\,, \qquad y_1 \leqq y_2 \leqq y_3\,, \tag{4}$$

takže z předpokladů úlohy

$$x_1 \leqq y_1\,, \qquad y_3 \leqq x_3\,. \tag{5}$$

Volbu označení můžeme považovat za *první impuls* pro řešení úlohy.

Druhým impulsem je zjištění, že stačí dokázat tvrzení pro případ, že v (1) nastane rovnost: snadno se ověří, že vždy existují kladná čísla y'_1, y'_2, y'_3 tak, že $y'_1 \leqq y'_2 \leqq y'_3$, dále

$$x_1 \leqq y'_1\,, \qquad y'_3 \leqq x_3\,,$$

a konečně

$$y'_i \leqq y_i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

a přitom

$$x_1 + x_2 + x_3 = y'_1 + y'_2 + y'_3\,.$$

Dokážeme-li nerovnosti (2) a (3) pro y'_1, y'_2, y'_3, pak (2) a (3) platí tím spíše pro y_1, y_2, y_3.

Třetím impulsem, který ulehčí řešení, je zavedení polynomických funkcí

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)$$

a

$$g(t) = (t - y_1)(t - y_2)(t - y_3)\,.$$

Po vynásobení totiž dostaneme

$$f(t) = t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 ,$$

$$g(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 .$$

Dvojího vyjádření funkcí $f(t)$ a $g(t)$ užijeme při dosazení $t = x_1$ a $t = x_3$. Je totiž

$$f(x_1) = f(x_3) = 0 , \tag{6a}$$

zatímco z (5) vyplývá

$$g(x_3) \geqq 0 , \tag{6b}$$

$$g(x_1) \leqq 0 . \tag{6c}$$

Nyní je již vše připraveno k důkazu. Předpokládejme, že v (1) nastane rovnost. Odečteme $f(t)$ a $g(t)$: výsledná funkce $r(t)$ je lineární (nebo konstantní):

$$r(t) = (s_2 - \sigma_2)\, t - (s_3 - \sigma_3) . \tag{6d}$$

Máme dokázat, že

$$s_2 \leqq \sigma_2 ,$$

$$s_3 \leqq \sigma_3 .$$

Dosadíme-li do $r(t)$ jednak $t = x_1$, jednak $t = x_3$, dostáváme podle (6a) až (6c)

$$r(x_1) \geqq 0 , \qquad r(x_3) \leqq 0$$

neboli

$$(s_2 - \sigma_2)\, x_1 - (s_3 - \sigma_3) \geqq 0 .$$

$$(s_2 - \sigma_2)\, x_3 - (s_3 - \sigma_3) \leqq 0 . \tag{7}$$

Tyto nerovnosti dávají po odečtení

$$(s_2 - \sigma_2)(x_3 - x_1) \leqq 0 .$$

Je-li $x_3 > x_1$ (vždycky je $x_3 \geqq x_1$), dostáváme

$$s_2 \leqq \sigma_2$$

a z první z nerovností (7)

$$s_3 \leqq \sigma_3 ,$$

jak jsme měli dokázat. Případ $x_3 = x_1$ v tomto studiu k cíli nevede, ale vrátíme-li se na začátek úvahy, zjistíme, že z (5) a (4) pak vyplývá rovnost všech čísel x_i a y_i, takže $s_2 = \sigma_2$ a $s_3 = \sigma_3$. Řešení je úplné.

A – I – 2

Jsou-li dána libovolná čtyři různá reálná čísla, lze označit vždy jedno z nich x a ostatní tři pak y, z, w tak, aby platila nerovnost

$$|x^3 - x^2(y + z + w)| < |x(yz + zw + wy) - yzw| ; \quad (8)$$

dokažte.

KOMENTÁŘ

Snad nejpřirozenější je důkaz nepřímý. Jsou-li daná čísla ve vzestupném uspořádání

$$a < b < c < d , \quad (9)$$

pak zvolíme-li kterékoli z nich za x, neplatí nerovnost (8), ale její negace; platí tedy zároveň (9) a nerovnosti

$$a^2|a - b - c - d| \geqq |abc + abd + acd - bcd|, \quad (10a)$$

$$b^2|b - a - c - d| \geqq |abc + abd + bcd - acd|, \quad (10b)$$

$$c^2|c - a - b - d| \geqq |abc + acd + bcd - abd|, \quad (10c)$$

$$d^2|d - a - b - c| \geqq |abd + acd + bcd - abc|. \quad (10d)$$

Ze systému nerovností (9) a (10) máme odvodit spor.

Protože podle (9) je $(b - a)(b - c)(b - d) > 0$, je

$$b^2(b - a - c - d) + (abc + abd + bcd - acd) > 0. \quad (11)$$

Spojením (10b) a (11) dostaneme

$$b - a - c - d > 0. \quad (12)$$

Obdobně je podle (9) $(c - a)(c - b)(c - d) < 0$, a tedy

$$c^2(c - a - b - d) + (abc + acd + bcd - abd) < 0. \quad (13)$$

Spojením (10c) a (13) dostaneme

$$c - a - b - d < 0. \quad (14)$$

Z (12) a (14) odvodíme

$$b - c > a + d, \qquad b - c > -(a + d),$$

tj.

$$b - c > |a + d| \geqq 0.$$

Avšak nerovnost $b - c > 0$ je ve sporu s (9).

Obdobně jako (12) a (14) lze odvodit z nerovností $(a-b)(a-c)(a-d)<0$ a $(d-a)(d-b)(d-c)>0$ nerovnosti

$$b+c+d-a>0 \quad \text{a} \quad d-a-b-c>0\,, \qquad (15)$$

kterých však nelze využít k odvození sporu.

Odvodí-li řešitel všechny čtyři nerovnosti (12), (14) a (15), záleží na jeho kombinačních schopnostech, aby vyhledal ty dvě z nich, které vedou ke sporu.

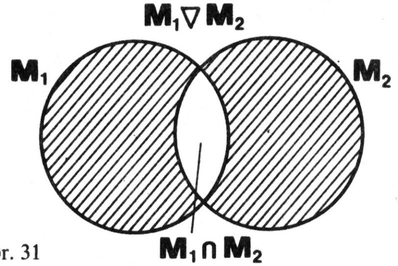
A–I–3

Je daná konečná množina $\mathscr{X}$, označme $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ dve jej ľubovolné neprázdne podmnožiny, s_{12}, d_{12} nech sú počty prvkov množín $\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$, $(\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2) \setminus (\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2)$ a prehlásme číslo $\dfrac{d_{12}}{s_{12}}$ vzdialenosťou množín $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$. Dokážte, že pre túto vzdialenosť platí trojuholníková nerovnosť.

KOMENTÁR

Táto úloha poskytuje niekoľko príležitostí k rozšíreniu znalostí žiakov v množinovej tématike. Číslo d_{12} je zrejme počet prvkov tzv. *symetrického* rozdielu množín $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$: označme ho $\mathscr{M}_1 \nabla \mathscr{M}_2$. Pomocou Vennovho diagramu (obr. 31), kde $\mathscr{M}_1 \nabla \mathscr{M}_2$ je vyšrafovaný, ľahko odvodíme:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_1 \nabla \mathscr{M}_2 &= (\mathscr{M}_1 \setminus \mathscr{M}_2) \cup (\mathscr{M}_2 \setminus \mathscr{M}_1) = \\ &= \{x \in \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2;\ (x \in \mathscr{M}_1 \wedge x \notin \mathscr{M}_2) \vee \\ &\qquad \vee (x \notin \mathscr{M}_1 \wedge x \in \mathscr{M}_2)\}\,.\end{aligned}$$



Obr. 31

V potenčnej množine $\mathscr{P}^{\mathscr{X}}$ konečnej množiny $\mathscr{X}$, ktorá je tiež konečná*), zavedieme podľa textu úlohy vzdialenosť

$$\varrho(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \frac{d_{12}}{s_{12}} \quad \text{pre} \quad \mathscr{M}_1 \neq \emptyset \vee \mathscr{M}_2 \neq \emptyset$$

a $\varrho(\emptyset, \emptyset) = 0$.

Zrejme je

$$\forall \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2 \in \mathscr{P}^{\mathscr{X}};\ \varrho(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \geqq 0\,;$$

$$\forall \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2 \in \mathscr{P}^{\mathscr{X}};\ \varrho(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = \varrho(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_1)\,;$$

$$\forall \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2 \in \mathscr{P}^{\mathscr{X}};\ \varrho(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_2\,.$$

Ak dokážeme, že pre vzdialenosť ϱ platí ešte neostrá trojuholníková nerovnosť, bude dokázané, že štruktúra $(\mathscr{P}^{\mathscr{X}}, \varrho)$ je metrický priestor a zobrazenie $\mathscr{P}^{\mathscr{X}} \times \mathscr{P}^{\mathscr{X}} \to \mathscr{R}$, tj. $[\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2] \to \varrho(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$ je metrika.

Pretože riešiteľom sú najbližšie operácie $\cap$, $\cup$, vyjadríme d_{12} pomocou p_{12}, s_{12}; z definície operácie ∇ vidno, že

---

*) Potenčná množina $\mathscr{P}^{\mathscr{X}}$ je množina všetkých podmnožín základnej množiny $\mathscr{X}$ včítane množiny $\emptyset$. Ak má $\mathscr{X}$ n prvkov, má $\mathscr{P}^{\mathscr{X}}$ 2^n prvkov.

$$d_{12} = s_{12} - p_{12},$$

a teda

$$\frac{d_{12}}{s_{12}} = 1 - \frac{p_{12}}{s_{12}}.$$

Teda máme dokázať, že pre všetky trojice $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3 \in \mathscr{P}^{\mathfrak{X}}$ platí nerovnosť

$$\Delta = \left(1 - \frac{p_{12}}{s_{12}}\right) + \left(1 - \frac{p_{23}}{s_{23}}\right) - \left(1 - \frac{p_{31}}{s_{31}}\right) \geqq 0,$$

čili

$$\Delta = \frac{1}{s_{12}s_{23}s_{31}} \cdot$$

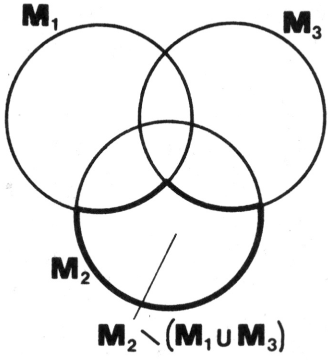
$$\cdot \left(s_{12}s_{23}s_{31} - p_{12}s_{23}s_{31} - p_{23}s_{12}s_{31} + p_{31}s_{12}s_{23}\right) =$$

$$= \frac{\delta}{s_{12}s_{23}s_{31}} \geqq 0. \tag{16}$$

Z (16) plynie, že $\Delta \geqq 0$ práve vtedy ak $\delta \geqq 0$. Sústredíme sa na dokázanie nerovnosti $\delta \geqq 0$.

Za predpokladu, že riešitelia sú zoznámení zo symetrickým rozdielom dvoch množín a s pojmom metrického priestoru (to však nie je nevyhnuteľne nutné), môžu sa dopracovať nerovnosti $\delta \geqq 0$ samostatne. Pre zjednodušenie ďalšieho postupu snáď ešte doporučíme, aby použili indukciu, tým sa vyhnú zdĺhavým výpočtom.

Indukcia môže postupovať s rastúcim počtom prvkov



Obr. 32

množiny $\mathscr{M}_2 \setminus (\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_3)$, ktorá je na obr. 32 hrubo ohraničená.

Predpokladajme, že pre množiny $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3$ platí nerovnosť $\delta \geqq 0$ a nahraďme množinu $\mathscr{M}_2$ množinou $\mathscr{M}_2'$ tak, že k množine $\mathscr{M}_2 \setminus (\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_3)$ pridáme ďalší prvok. Číslo δ' príslušné množinám $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3$ dostaneme tak, že čísla $s_{12}, s_{23}, \ldots$ nahradíme podľa tabuľky:

s_{12}	s_{23}	s_{31}	p_{12}	p_{23}	p_{31}
$s_{12} + 1$	$s_{23} + 1$	s_{31}	p_{12}	p_{23}	p_{31}

Dostane sa tak

$$\delta' = \delta + s_{23}s_{31} + s_{12}s_{31} +$$
$$+ (s_{31} + p_{31}s_{23} + p_{31}s_{12} + p_{31}) - p_{12}s_{31} - p_{23}s_{31} ,$$

tj.

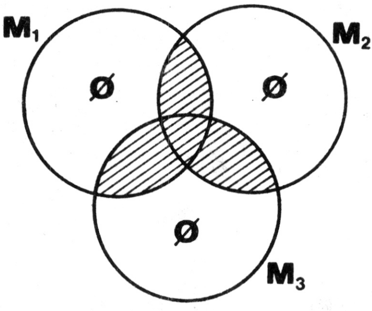
$$\delta' \geqq \delta + s_{31}(s_{23} - p_{23}) + s_{31}(s_{12} - p_{12}) \geqq \delta ,$$

pretože $s_{23} - p_{23} \geqq 0$, $s_{12} - p_{12} \geqq 0$. Na tieto odhady môžu riešitelia prísť sami, ak budú skúmať vyjadrenie δ' pomocou δ.

Indukcia bude prevedená, ak platí $\delta \geqq 0$ pre $\mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3) = \emptyset$. Nerovnosť $\delta \geqq 0$ dokážeme pre prípad $\mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_3) = \emptyset$ indukciou pre rastúci počet prvkov množiny $\mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_1)$. Ak sa prevedie indukčný krok, potom záleží iba na tom, či nerovnosť $\delta \geqq 0$ platí v prípadě $\mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_1) = \emptyset$. Toto však dokážeme tretiou indukciou, a to pre rastúci počet prvkov množiny $\mathcal{M}_1 \setminus (\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3)$. Nakoniec teda musíme zistiť, či nerovnosť $\delta \geqq 0$ platí v prípade

$$\mathcal{M}_1 \setminus (\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3) = \mathcal{M}_2 \setminus (\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_1) =$$
$$= \mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = \emptyset.$$

To je ale evidentné (pozri obr. 33), tu je $s_{12} = s_{23} = s_{31} = s$. Označme p počet prvkov množiny $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$. Potom z (16) plynie $\delta = 2s^2(p_{31} - p)$, a teda $\delta \geqq 0$. Tým je veta z úlohy A – I – 3 dokázaná.



Obr. 33

A – I – 4

Zistite všetky reálne α z intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$, pre ktoré platí

$$\frac{\sin^2\alpha\,(6 - \sin^2\alpha) - 1}{\sin 2\alpha \cos\alpha} \leqq \frac{7}{12}.$$

KOMENTÁŘ

Úloha připomíná staré časy, kdy jádrem středoškolské matematiky bylo řešení rovnic všeho druhu a jejich soustav ve vyumělkovaných úlohách, jejichž řešení vyžadovalo naučených triků. I když je úloha A – I – 4 formulována jako nerovnost, vznikla z rovnice, v níž koeficienty jsou voleny tak, aby vyšly kořeny racionální a aby se řešitel vyhnul komplikacím – např. rovnici 4. stupně, kterou by neuměl řešit. Ale snad neškodí, když se v olympiádě vyskytne jedna uhlazená úloha z dob verneovek.

Je samozřejmým nápadem použít „substituce“ $\sin\alpha = x$; tím se rovnice, která měla lehký goniometrický nádech, převede na úlohu algebraickou, zvláště když si všimneme výhodné okolnosti, že

$$\sin 2\alpha \cos\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha = 2x(1 - x^2).$$

Protože je $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, je $x \in (0, 1)$; to má za následek nerovnost $2x(1 - x^2) > 0$, a tím ulehčení dalšího postupu.

Danou nerovnici znásobíme *kladným* číslem $2x(1 - x^2)$; po úpravě vyjde

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 \geqq 0. \tag{17}$$

Zabývejme se nejprve rovnicí

$$6x^4 - 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0\,; \tag{18}$$

její řešení nám umožní rozložit polynom na levé straně v součin tzv. *kořenových činitelů.*

Koeficienty při x^4, x^0 a x^3, x jsou čísla s týmiž absolutními hodnotami; rovnice (18) je tzv. *poloreciproká*; víme, že její kořeny (čtyři) jsou po dvou převrácená čísla až na znamení. Použijeme známé úpravy (triku) a sdružíme členy takto:

$$(6x^4 + 6) + (-7x^3 + 7x) - 36x^2 = 0\,. \tag{19}$$

Rovnici (19) dělíme x^2 (tím neztrácíme žádný kořen, neboť rovnice (19) nemá kořen $x = 0$); vyjde

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0\,.$$

Provedeme novou substituci

$$y = x - \frac{1}{x}\,; \tag{20}$$

z (20) dostaneme $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Po dosazení a úpravě nabude rovnice (19) podoby:

$$6y^2 - 7y - 24 = 0\,.$$

Známým způsobem rozložíme levou stranu v součin kořenových činitelů; pak přejdeme k nerovnici

$$(3y - 8)(2y + 3) \geqq 0\,. \qquad (21)$$

Připomínáme, že tento postup je přípustný, neboť jsme dříve dělili *kladným* číslem x^2; pomocí (20) se vrátíme k původní neznámé x; po vynásobení *kladným* číslem x^2 dostaneme

$$(3x^2 - 8x - 3)(2x^2 + 3x - 2) \geqq 0\,.$$

Rozložíme-li oba kvadratické trojčleny v kořenové činitele, vyjde konečně

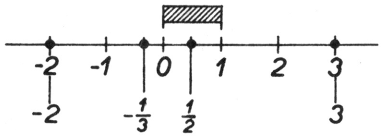
$$(x - 3)(3x + 1)(x + 2)(2x - 1) \geqq 0\,. \qquad (22)$$

Dva z činitelů (22) jsou tedy nezáporní, dva nekladní nebo jsou všichni čtyři nezáporní.

Pro zjednodušení práce se obrátíme ke geometrickému znázornění na číselné ose (obr. 34). Grafem nerovnic $x - 3 \geqq 0$, $x - 3 \leqq 0$ jsou dvě polopřímky s počátkem v bodě 3; obdobně je tomu u ostatních dvojčlenů. Protože řešení má padnout do intervalu $(0, 1)$, jde o polopřímky

$$x + 2 \geqq 0\,, \qquad 3x + 1 \geqq 0\,, \qquad x - 3 \leqq 0\,.$$

Čtvrtá polopřímka musí být podle předchozího $2x - 1 \leqq 0$. Pro řešení tedy dostáváme interval $(0, \frac{1}{2})$, který je průnikem intervalů $(0, 1)$ a $(-\infty, \frac{1}{2}\rangle$. *Možná* řešení jsou dána nerovnicemi



Obr. 34

$$0 < \sin\alpha \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad 0 < \alpha \leqq 30^\circ .$$

Obrácením postupu je třeba dokázat, že všechna tato čísla jsou skutečně řešením úlohy.

A – I – 5

V rovině je dána přímka p a uvnitř jedné poloroviny určené touto přímkou jsou dány dva různé body A, B. Dále je dán úhel velikosti α, kde $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, a úsečka velikosti d. Uvnitř poloroviny opačné k polorovině pA určete všechny body C takové, že $\sphericalangle ACB = \alpha$ a že průnik tohoto úhlu s přímkou p je úsečka délky d.

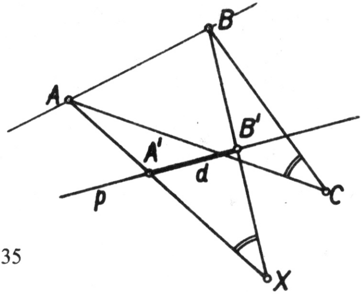
KOMENTÁŘ

Snad by se mohla dát na uváženou jiná textace úlohy:
Je dán trojúhelník ABC a přímka p jeho roviny, která odděluje body A, C i body B, C; dále je dáno kladné číslo d. Sestrojte všechny body X poloroviny pC, pro něž platí zároveň:

(I) $\sphericalangle AXB = \sphericalangle ACB$;

(II) úsečka $p \cap \triangle AXB$ má délku d.

Pokládejme tuto úlohu za podnět k tomu, abychom si zopakovali celkem klasické schéma postupu řešení konstrukční úlohy a matematické úlohy vůbec. *První* fáze je *rozbor* čili *analýza*, v kterém se snažíme odvodit nutné podmínky řešení s hlavním záměrem, abychom zachytili všechna řešení; *závěrem rozboru* je vyslovení *hypotézy*, tj. konstruk-



Obr. 35

čního předpisu, kterým se dostanou všechna řešení úlohy. *Druhou* fází je *zkouška* čili *kontrola*; tou se zjistí, která *z možných* řešení jsou skutečně řešeními úlohy. Vyskytují-li se v textu úlohy parametry, tj. jde-li o množinu úloh, provedeme její klasifikaci podle počtu řešení; tato fáze se tradičně nazývá *diskusí*.

Obr. 35 ukazuje situaci v konstrukční úloze A – I – 5. Úloha je polohová, má tři neznámé body, X, A', B'; bod X se sestrojí jako průsečík přímek AA', BB'. Polohová úloha s dvěma neznámými body se řeší tak, že se jeden z těchto bodů *eliminuje*. V našem případě použijeme k eliminaci bodu B' translace $\mathscr{T}$, která má velikost d, směr (p) a smysl takový, že převede B' v A'. Translace $\mathscr{T}$ převede bod B v bod D; přitom je zřejmě $\sphericalangle AA'D = \sphericalangle AXB = \sphericalangle ACB$, který je dán. Pro bod A' máme tedy dvě podmínky:

$$A' \in p\,; \qquad \sphericalangle AA'D = \sphericalangle ACB\,.$$

Bod A' vyjde tedy jako průsečík přímky p a oblouku a sestrojeného nad tětivou AD s obvodovým úhlem velikosti $\alpha = \sphericalangle ACB$. K bodu A' pak snadno sestrojíme bod B'. Užije se inverzní translace k translaci, jež převádí bod B v bod D.

Na tomto místě bychom mohli ukončit rozbor; doporučujeme však řešitelům, aby v rozboru, tj. ve vyhledávání nutných podmínek, ještě pokračovali, neboť tím si usnadní zkoušku a diskusi. Obecnější poučení zní: rozbor můžeme ukončit v podstatě kdekoli, ale tím zkomplikujeme zkoušku. Stručně: čím kratší a snazší je rozbor, tím delší a komplikovanější je zkouška.

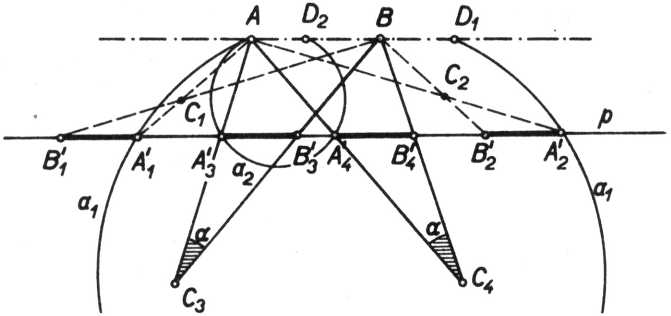
Pokračováním rozboru zjistíme tyto dvě další *nutné* podmínky:

přímky AA', BB' musí být různoběžné
(aby vznikl bod C);
polopřímky $A'A$, $B'B$ se nesmějí protnout
(aby bod C neležel v polorovině pA). (23)

Je celkem zřejmé, že bod C, který byl sestrojen popsaným způsobem jako průsečík přímek AA', BB', je řešením úlohy.

Stanovit podmínky řešitelnosti je úkol velmi komplikovaný; úloha má totiž *pět* parametrů: např. velikost úhlu, který svírají přímky p, AB, vzdálenosti QA, QB (kde Q je průsečík p, AB) a konečně čísla α, d. Proto diskusi omezte na určení maximálního počtu řešení a na sestrojení jednoho případu, kdy úloha má maximální počet řešení.

I. Na obr. 36a je znázorněna situace, kdy $AB \parallel p$. Translace $\mathcal{T}$ má dánu jen velikost (d) a směr (p); proto může mít dvojí smysl. A tak dostaneme dva body D_1, D_2. Nad každou z tětiv AD_1, AD_2 lze sice sestrojit dva oblouky a s obvodovým úhlem velikosti α, ale vždy jen jeden leží v polorovině ABp. Dostaneme tedy nejvýše čtyři body A', k nim čtyři body B' a nejvýše čtyři body C. (Lze však dokázat, že jsou

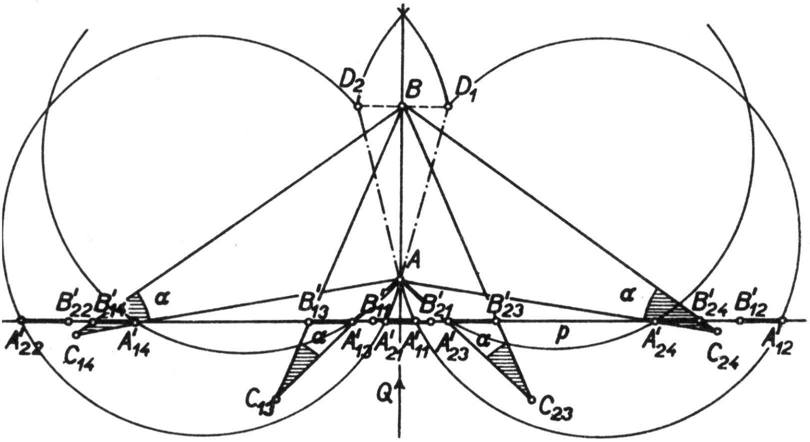


Obr. 36a

nejvýše dvě řešení – viz obr. 36a; jsou to body C_3, C_4.)

II. Na obr. 36b je znázorněna situace, kdy je $AB \nparallel p$; je zvoleno $AB \perp p$ a označení bodů A, B je takové, že platí

$$QA < QB \tag{24}$$



Obr. 36b

(Q je průsečík přímek p, AB). Dostaneme opět dva body D_1, D_2 a čtyři oblouky a_1, a_2, a_3, a_4 nad tětivami AD_1, AD_2 s obvodovým úhlem velikosti α. Každý z oblouků a_1, a_2, a_3, a_4 protne v tomto případě přímku p; dostaneme tedy osm bodů A', označených A'_{11} až A'_{24} a k nim osm bodů B'_{11} až B'_{24}, tj. osm dvojic $A'B'$. K řešení nevedou ty dvojice, v nichž každý z bodů A', B' leží na jiné polopřímce s počátkem Q a dále ty dvojice, pro které platí $QB' < QA'$; v obou případech totiž není splněna druhá podmínka (23). Zbývají tedy nejvýše čtyři řešení; na obr. 36b jsou to řešení C_{14}, C_{13}, C_{23}, C_{24}.

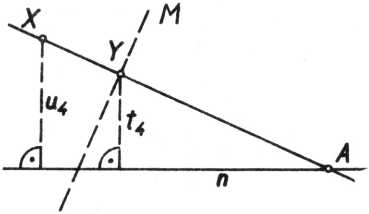
A–I–6

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Je-li X libovolný bod prostoru, označme $d(X)$ součet druhých mocnin všech čtyř vzdáleností bodu X od stěn daného čtyřstěnu. Dokažte, že minimum funkce $d(X)$ lze vyjádřit jako funkci výšek daného čtyřstěnu.

Odvoďte příslušný vzorec.

KOMENTÁŘ

I. Geometrický názor může řešitelům napovědět domněnku, že funkce $d(X)$ *může nabýt minima jen pro některý bod X v čtyřstěnu $ABCD$*. Při důkazu této domněnky budeme hledat ke každému bodu X *vnějšku* čtyřstěnu $ABCD$ bod Y čtyřstěnu $ABCD$ tak, aby platilo $d(Y) < d(X)$. Jestliže X nenáleží čtyřstěnu $ABCD$, pak nenáleží aspoň jednomu z poloprostorů $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$; nechť je např.



Obr. 37

$X \notin BCDA$. Úsečka AX má pak s rovinou BCD společný jediný bod Y. Označme po řadě u_1, u_2, u_3, u_4 (t_1, t_2, t_3, t_4) vzdálenosti bodu X (Y) od rovin BCD, ACD, ABD, ABC.

Zřejmě je $t_1 = 0$, a proto

$$u_1 > t_1 . \tag{25}$$

Na obr. 37 je situace v rovině $\varrho \perp ABC$ vedené přímkou AX: m je průsečnice rovin ϱ, BCD, n je průsečnice rovin ϱ, ABC. Protože Y leží mezi body A, X, je

$$u_4 \geqq t_4 \tag{26}$$

(bod X může ležet i na přímce n). Spojíme-li (25), (26) a dvě další obdobné nerovnosti, dostaneme

$$d(X) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \geqq t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = d(Y) .$$

Tím je domněnka dokázána.

II. Jako další impuls by snad bylo vhodné seznámit se s *Lagrangeovými identitami*. Můžeme uvést tyto tři tvary:

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (a\alpha + b\beta)^2 = (a\beta - b\alpha)^2 ;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 =$$
$$= (a\beta - b\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 ;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) -$$
$$- (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 =$$
$$= (a\beta - b\alpha)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (a\delta - d\alpha)^2 +$$
$$+ (b\gamma - c\beta)^2 + (b\delta - d\beta)^2 + (c\delta - d\gamma)^2 .$$

Z těchto tří speciálních případů, které se jednoduše ověří výpočtem, uhodnete jistě obecné znění Lagrangeovy identity (pro $2n$ proměnných):

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2) -$$
$$- (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n)^2 =$$
$$= \sum_{i,\,j = 1,\,\ldots,\,n,\, i<j} (a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)^2 .$$

Tato obecná formule se dá dokázat např. matematickou indukcí; pro $n = 2, 3$ má jednoduchý geometrický význam, pokládáme-li $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ za vektory dané souřadnicemi.

III. Označíme p_1, p_2, p_3, p_4 obsahy stěn tetraedru $ABCD$, v_1, v_2, v_3, v_4 k nim příslušné výšky, V objem tetraedru $ABCD$, X libovolný jeho bod a u_1, u_2, u_3, u_4 jeho vzdálenost od stěn tetraedru. Pak je

$$p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 + p_4u_4 = 3V. \qquad (27)$$

Podle Lagrangeovy identity je

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) -$$
$$- (p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 + p_4u_4)^2 =$$

$$= (p_1u_2 - p_2u_1)^2 + (p_1u_3 - p_3u_1)^2 + (p_1u_4 - p_4u_1)^2 +$$
$$+ (p_2u_3 - p_3u_2)^2 + (p_2u_4 - p_4u_2)^2 + (p_3u_4 - p_4u_3)^2 . \tag{28}$$

Vypočteme-li z této rovnice $d(X) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, vidíme, že $d(X)$ je minimální právě tehdy, jsou-li všechny členy na pravé straně rovnice (28) rovny nule. Pak je podle (27) a (28)

$$d(X_0) = \frac{9V^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2} . \tag{29}$$

Použijeme-li formule $p_i = \dfrac{3V}{v_i}$, dostaneme z (29)

$$d(X_0) = \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \frac{1}{v_4^2}\right)^{-1},$$

což je žádaný vzorec, který můžete na základě Lagrangeovy identity odvodit samostatně.

Vhodným úvodem do úlohy A – I – 6 je její rovinná varianta.

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE B I. KOLA

B–I–1

a) Dokážte, že následujúca úloha nie je riešiteľná: Máme zostrojiť dve také neprázdne podmnožiny $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ množiny $\mathscr{R}$ všetkých reálnych čísel, aby $\mathscr{R} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, aby aspoň jedna z množín $\mathscr{R} \setminus \mathscr{A}$, $\mathscr{R} \setminus \mathscr{B}$ nebola prázdna a aby pre ľubovolné čísla $a \in \mathscr{A}$, $a' \in \mathscr{A}$, $b \in \mathscr{B}$, $b' \in \mathscr{B}$ platilo

$$a + a' \in \mathscr{A}\,, \tag{1}$$

$$a + b \in \mathscr{B}\,, \tag{2}$$

$$b + b' \in \mathscr{A}\,. \tag{3}$$

b) Dokážte, že ak vo formulácii úlohy a) nahradíme množinu $\mathscr{R}$ množinou $\mathscr{C}$ všetkých celých čísel, potom existuje práve jedna dvojica množín $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ s požadovanými vlastnosťami. Nájdite ju.

KOMENTÁR

Text tejto úlohy, práve tak ako text úlohy B–I–3, je dosť dlhý a pomerne zložitý, je tu najlepšia príležitosť, aby sa riešitelia naučili pracovať s komplikovanejšími textami.

Odporúčame, aby začali s úlohou b) a aby si ju vyslovili úplne „inými slovami“ asi takto:

Množinu $\mathscr{C}$ všetkých celých čísel máme rozdeliť do dvoch neprázdnych podmnožín $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ tak, že nie je $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{C}$.

Pritom súčet dvoch čísel z tej istej podmnožiny ($\mathscr{A}$ alebo $\mathscr{B}$) má patriť do $\mathscr{A}$; súčet dvoch čísel z rôznych podmnožín ($\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$) má patriť do $\mathscr{B}$.

V texte úlohy sa nežiada, aby boli množiny $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ disjunktné, tj. aby „rozdelenie" $\mathscr{C} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ bol *rozklad*.

Druhé odporúčanie riešiteľom: „Nájdite jednu dvojicu $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ vyhovujúcu daným podmienkam." Bez veľkej námahy zistíte, že podmienkam vyhovuje dvojica množín $\mathscr{S}$ (všetkých párnych čísel) a $\mathscr{L}$ (všetkých nepárnych čísel). Naozaj je

$$\mathscr{S} \cup \mathscr{L} = \mathscr{C}, \qquad \mathscr{S} \neq \mathscr{C}, \qquad \mathscr{L} \neq \mathscr{C}$$

a

súčet dvoch párnych čísel je párne číslo, (1′)

súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo, (2′)

súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo. (3′)

Ak je pravdivá veta b), musí byť možné dokázať, že $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$, pretože úloha b) má jediné riešenie $\mathscr{A} = \mathscr{S}$, $\mathscr{B} = \mathscr{L}$. Tretí krok teda je: Dokážme nepriamo, že $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$, čiže rozdelenie na množiny $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ je rozklad množiny $\mathscr{C}$.

Predpokladajme, že existuje celé číslo $p \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ a zvolme ľubovolné číslo $x \in \mathscr{C}$. Môžu nastať dva prípady: buď $x - p \in \mathscr{A}$ alebo $x - p \in \mathscr{B}$.

Ak je $x - p \in \mathscr{A}$, je podľa (1) a (2) $x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, pretože $x = p + (x - p)$.

Ak je $x - p \in \mathscr{B}$, je podľa (2) a (3) $x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, pretože $x = p + (x - p)$.

Dokázali sme, že $\mathscr{C} \subset \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$, tj. $\mathscr{C} = \mathscr{A} = \mathscr{B}$, $\mathscr{C} \setminus \mathscr{A} = \mathscr{C} \setminus \mathscr{B} = \emptyset$, a to je spor s predpokladom.

Za štvrté dokážeme, že $\mathscr{A} = \mathscr{S}$. Nech y je ľubovolné párne číslo; pretože $y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y$, je $y \in \mathscr{A}$ buď podľa (1) alebo podľa (3) – číslo $\frac{1}{2}y$ je totiž celé. Tým je dokázaná inklúzia $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$. Miesto toho, aby sme dokazovali druhú inklúziu $\mathscr{A} \subset \mathscr{S}$ a z toho usúdili, že platí rovnosť $\mathscr{A} = \mathscr{S}$, dokážeme nepriamo, že $\mathscr{A}$ neobsahuje žiadne nepárne číslo. Pripusťme, že z_0 je nepárne číslo a že platí $z_0 \in \mathscr{A}$. Pre každé nepárne číslo z platí

$$z = z_0 + y\,, \tag{4}$$

kde y je vhodné párne číslo. Z (4) plynie podľa (1), že $z \in \mathscr{A}$, tj. $\mathscr{L} \subset \mathscr{A}$, tj. $\mathscr{C} = \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$, čo nemôže nastať, ako sme dokázali. Tým je úloha b) rozriešená.

Zostáva úloha a). Disjunktnosť množín $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ sa dokáže práve tak ako v úlohe b). Neexistencia takého rozkladu sa dokáže tým istým „trikom“, aký sme použili pri riešení úlohy b). Nech r je ľubovolné reálne číslo. Z rovnosti $r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r$ plynie $r \in \mathscr{A}$, keď $\frac{1}{2}r \in \mathscr{A}$ podľa (1) aj keď $\frac{1}{2}r \in \mathscr{B}$ podľa (3). Teda je $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}$, a teda $\mathscr{R} = \mathscr{A}$. Je ale

$$(\mathscr{B} \neq \emptyset \wedge \mathscr{A} = \mathscr{R}) \Rightarrow \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \neq \emptyset\,,$$

čo nie je možné. Tým je rozriešená i úloha a).

Úloha B – I – 1 je dosť ťažká. Aj keď tvrdenia a), b) nie sú príliš prekvapujúca, ich dôkaz má svoju hodnotu a určite stojí za to, aby sa úloha vyriešila.

B – I – 2

Označme pro přirozené číslo n a pro reálné číslo x

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{sign}(x - i).$$

Nechť je p dané kladné číslo. Najděte všechna přirozená čísla n taková, aby platilo

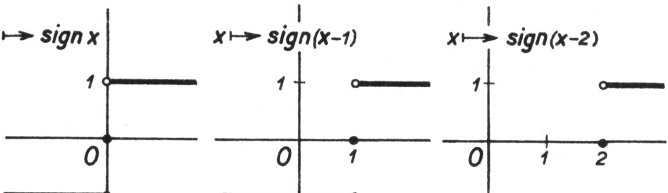
$$f_n(p) = 0.$$

(Poznámka. Funkce $x \mapsto \operatorname{sign} x$ je definována na množině $\mathscr{R}$ všech reálných čísel takto: Je-li $x > 0$, je $\operatorname{sign} x = 1$, je-li $x = 0$, je $\operatorname{sign} x = 0$, je-li $x < 0$, je $\operatorname{sign} x = -1$.)

KOMENTÁŘ

Pro řešení této úlohy by se mohl dát jediný pokyn: sestrojovat kartézské grafy funkcí. Funkce signum vnáší do soutěže – jak už jsme se zmínili v komentáři k přípravným úlohám – rozšíření tematiky o schodových funkcích.

Na obr. 38–40 jsou načrtnuty funkce $x \mapsto \operatorname{sign} x$,



Obr. 38 Obr. 39 Obr. 40

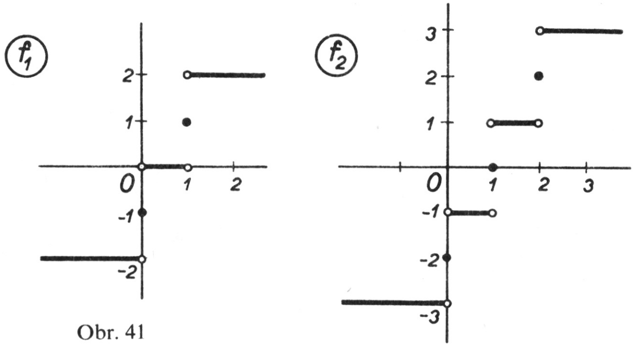
$x \mapsto \operatorname{sign}(x-1)$, $x \mapsto \operatorname{sign}(x-2)$; přitom jsme užili techniky:

● (plný kroužek) – bod náleží grafu;

○ (prázdný kroužek) – bod nenáleží grafu.

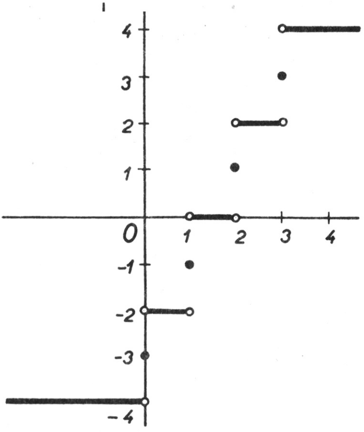
S pomocí těchto obrázků lze snadno popsat graf funkce $x \mapsto \operatorname{sign}(x-i)$, kde i je libovolné přirozené číslo.

Na obr. 41 jsou grafy funkcí f_1, f_2 (f_0 je funkce sign x –

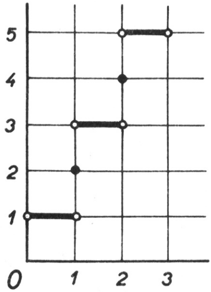


Obr. 41

viz obr. 38), tj. funkcí $x \mapsto \operatorname{sign} x + \operatorname{sign}(x-1)$ a $x \mapsto \operatorname{sign} x + \operatorname{sign}(x-1) + \operatorname{sign}(x-2)$. Tyto dva grafy reprezentují dva druhy funkcí f_n: pro n liché má tato funkce nekonečně mnoho nulových bodů, pro n sudé má jediný nulový bod. Tuto druhou domněnku potvrzuje i funkce f_0, první domněnku potvrzuje graf funkce f_3 na obr. 42. Matematickou indukcí pro sudá a pro lichá n se snadno dokáže (s pomocí grafů), že pro $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ jsou nulové body funkce f_{2k+1} všechna čísla otevřeného intervalu $(k, k+1)$, funkce f_{2k} má jediný nulový bod – číslo k.



Obr. 42



Obr. 43

Řešení úlohy je nejlépe znázornit opět grafem. Obr. 38 až 41 a příslušná úvaha nás přesvědčují, že ty části grafů funkcí $f_0, f_1, f_2, \ldots$, které náležejí ose x, jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je kladná poloosa x. Proto ke každému $p > 0$ existuje *jediné* přirozené číslo n takové, že $f_n(p) = 0$; dostáváme tedy funkci φ:

$$\varphi\colon \left(p \mapsto n;\ f_n(p) = 0\right).$$

Její graf je na obr. 43. Jeho popisem odpovíme na otázku úlohy.

Je-li p přirozené číslo, je $\varphi(p) = 2p$; není-li p přirozené číslo, je $\varphi(p) = 2[p] + 1$. Přitom [ ] značí funkci „celá část z“.

B – I – 3

Funkce f splňuje tyto podmínky:

1. je definována právě pro všechna reálná čísla $x \geqq 0$;
2. $f(nx) = f(x)$ pro všechna přirozená n a $x \geqq 0$;
3. $f(x + 1) = f(x)$ pro všechna $x \geqq 0$;
4. $f(0) \leqq 0$;
5. pro každou dvojici čísel $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ platí $f(x) + f(y) \geqq$ $\geqq f(x + y)$.

a) Dokažte, že pak pro každou trojici přirozených čísel k, l, m platí
$$f\left(k\frac{l}{m}\right) \geqq f(k) + f\left(\frac{l}{m}\right).$$

b) Ukažte na příkladě, že existuje funkce vyhovující podmínkám (1) až (5), která není identicky rovna nule v intervalu $\langle 0, \infty)$.

KOMENTÁŘ

Tato úloha je ukázkou problému, kdy několika funkčními rovnicemi či nerovnicemi je určena jistá množina (rodina) funkcí Σ. V našem případě máme dokázat, že každá funkce $f \in \Sigma$ má jistou vlastnost (úloha a)) a že $\Sigma \setminus (x \mapsto 0) \neq \emptyset$ (úloha b)).

Doporučujeme vypustit nejprve podmínky 3 až 5 a použít jen podmínek 1, 2. Z podmínky 2 dostaneme pro $x = 1$
$$\forall n \in \mathcal{N}: f(n) = f(1).^{*)}$$

---

*) $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}^+$ značí množinu všech přirozených, resp. kladných racionálních čísel.

Označíme $f(1) = a$ a dosadíme do podmínky 2 $n = m$, $x = \dfrac{1}{m}$; vyjde

$$\forall m \in \mathcal{N}: f\left(\frac{1}{m}\right) = a\,.$$

Dále dosadíme do podmínky 2 $n = l$, $x = \dfrac{1}{m}$; vyjde

$$\forall l, m \in \mathcal{N}: f\left(\frac{l}{m}\right) = f\left(l\,.\frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right) = a\,,$$

neboli

$$\forall x \in \mathcal{Q}^+: f(x) = a\,. \tag{5}$$

Dokazovaná nerovnost z úlohy a) pak zní podle (5)

$$a \geqq a + a\,,$$

neboli

$$a \leqq 0\,. \tag{6}$$

Kdybychom do textu úlohy k podmínkám 1, 2 připojili (6) místo podmínek 3, 4, 5, platilo by tvrzení z úlohy a). Žádaným příkladem funkce $f \in \Sigma$ je funkce Dirichletova δ, definovaná takto:

$$\delta:\ x \mapsto \left|\begin{array}{l} 0 \ \ \forall x \geqq 0 \ \text{racionální;} \\ 1 \ \ \forall x \geqq 0 \ \text{iracionální.} \end{array}\right.$$

Funkce δ splňuje i podmínky 3 až 5 z textu úlohy, jak se snadno přesvědčíme; při ověření podmínky 5 se proberou tři případy: x, y racionální, x, y iracionální, x racionální a y iracionální.

Vyjděme při dokazování vlastnosti a) z podmínek 3 až 5. Podle podmínky 3 je (pro $x = 0$) $f(0) = f(1) = a$. Podle podmínky 5 je (pro $x = 0$, $y = 1$) $2a \geqq a$, tj. $a \geqq 0$. Spojíme-li tuto nerovnost s podmínkou 4, dostaneme $a = 0$. Pak ovšem platí evidentně dokazovaný vztah

$$f\left(k \cdot \frac{l}{m}\right) \geqq f(k) + f\left(\frac{l}{m}\right),$$

a to dokonce se znakem rovnosti.

B–I–4

Určete množinu všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice x, y mají tu vlastnost, že existují celá čísla m, n taková, že platí

$$|x - 2m| + |y - 2n| \leqq 1 \leqq$$
$$\leqq |(x - 2m) + (y - 2n)| + |(x - 2m) - (y - 2n)|. \quad (7)$$

KOMENTÁŘ

Nejprve snad poradíme řešitelům, aby si text úlohy trochu přeformulovali: Zvolme bod se sudými souřadnicemi $[2m, 2n]$ a sestrojme množinu $\mathscr{P}_{m,n}$ všech bodů $[x; y]$, jejichž souřadnice splňují nerovnice (7).

Máme vyšetřit sjednocení všech množin $\mathscr{P}_{m,n}$, když m, n probíhají množinu všech celých čísel. Z této formulace je patrno, že klíčem k řešení úlohy je prozkoumání *jedné* množiny $\mathscr{P}_{m,n}$; ostatní z ní dostaneme přemístěními (jsou s ní shodné). Za tuto vzorovou množinu zvolíme $\mathscr{P}_{0,0}$. Nerovnice (7) pak znějí

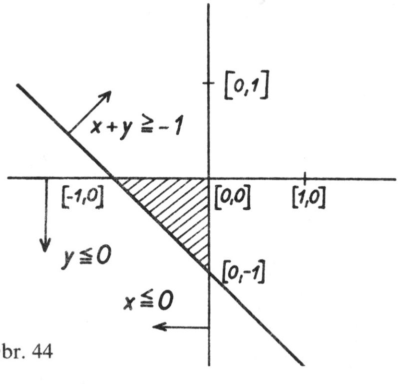
$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leqq 1\,, \\ |x + y| + |x - y| &\geqq 1\,. \end{aligned} \tag{8}$$

První nerovnice (8) má jako graf množinu $\mathscr{M}$ všech bodů v rovině, jejichž „orto-vzdálenost" neboli „pošťácká vzdálenost" vzhledem k osám x, y od počátku $[0; 0]$ je rovna nejvýše jedné. Tato množina je – jak známo – uzavřený čtverec $\mathscr{Q}$ s vrcholy $[1; 0]$, $[0; 1]$, $[-1; 0]$, $[0; -1]$.

To se dokáže např. vyšetřením průniku hledané množiny se všemi kvadranty. Tak třeba pro třetí kvadrant platí $x \leqq 0$, $y \leqq 0$ a první nerovnice (8) zní $-x - y \leqq 1$. Příslušný průnik je průnikem polorovin

$$x \leqq 0\,, \qquad y \leqq 0\,, \qquad x + y \geqq -1$$

a je to trojúhelník vyšrafovaný na obr. 44.



Obr. 44

Snad by bylo vhodné pohovořit si při této příležitosti o „pošťácké“ vzdálenosti, seznámit se s pojmem *metrického prostoru,* ověřit, že „pošťácká“ vzdálenost splňuje axiómy metrického prostoru, že jde tedy o model abstraktní struktury. Zvlášť je třeba zdůraznit, že „pošťácká“ vzdálenost je závislá na určité soustavě *ortonormálních* souřadnic, tj. pravoúhlých souřadnic se shodnými jednotkovými úsečkami na obou osách.

Dále pokračujeme ve vyšetřování množiny $\mathscr{P}_{0,0}$, tj. grafu soustavy nerovnic (8). Víme už, že $\mathscr{P}_{0,0} \subset \mathscr{Q}$; nyní budeme zkoumat graf *druhé* nerovnice (8). Jsou různé možnosti. *Buď* rozlišíme čtyři případy:

$$\text{I. } x + y \geqq 0 \wedge x - y \geqq 0\,;$$

$$\text{II. } x + y \geqq 0 \wedge x - y \leqq 0\,;$$

$$\text{III. } x + y \leqq 0 \wedge x - y \geqq 0\,;$$

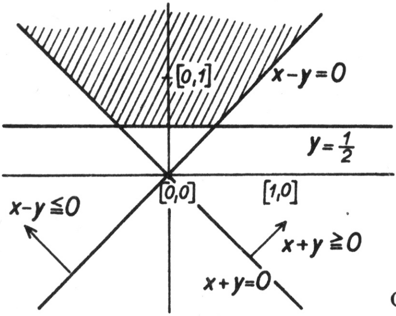
$$\text{IV. } x + y \leqq 0 \wedge x - y \leqq 0\,;$$

nebo použijeme transformace souřadnic (otočení o 45° v kladném smyslu) a transformačních rovnic

$$x' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \qquad y' = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}. \tag{9}$$

Tak např. v případě II. zní druhá nerovnice (8) $y \geqq \frac{1}{2}$ a hledaný graf je průnik polorovin $x + y \geqq 0$, $x - y \leqq 0$, $y \geqq \frac{1}{2}$, který je vyznačen na obr. 45.

Při druhém řešení užijeme opět „pošťácké“ vzdálenosti, ale vzhledem k osám $x - y = 0$, $x + y = 0$. Dostaneme uzavřený vnějšek čtverce



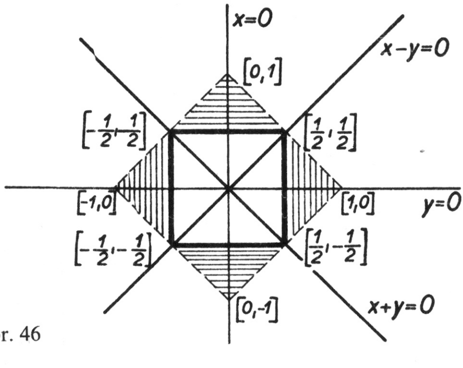
Obr. 45

$$|x + y| + |x - y| \geqq 1\,,$$

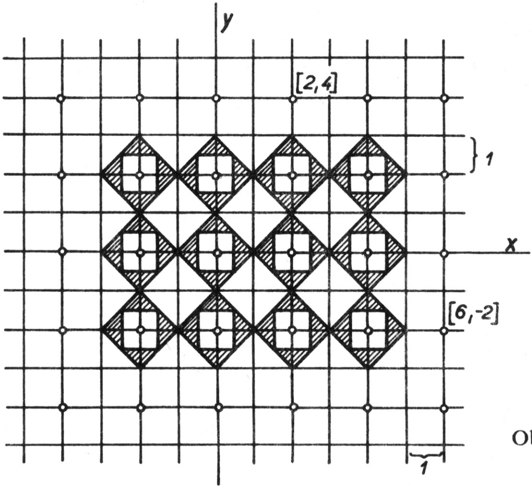
neboli podle (9)

$$|x'| + |y'| \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

který je vyznačen na obr. 46 tlustým vytažením hranice. Na obr. 46 je vyznačena množina $\mathscr{P}_{0,0}$ šrafováním; hranice náleží k této množině.



Obr. 46



Obr. 47

Hledané sjednocení $\bigcup_{m,n} \mathscr{P}_{m,n}$ vytvoří jakýsi ornament v rovině, který je zakreslen na obr. 47.

Úloha B–I–4 nevyžaduje vtip, ale poskytuje dobrou příležitost promluvit o „pošťácké“ vzdálenosti, o metrických prostorech a o transformaci *ortonormálních* souřadnic.

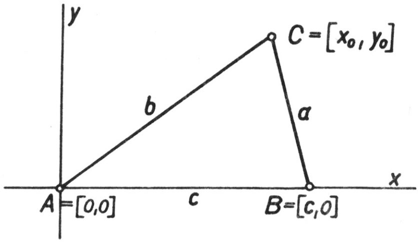
B–I–5

Je daný trojuholník ABC; jeho strany majú dĺžky a, b, c. Určte bod trojuholníka, ktorý má minimálny súčet druhých mocnín vzdialeností od jeho vrcholov. Vyjadrite tento súčet pomocou dĺžok strán trojuholníka.

Aj cena tejto úlohy je skôr v príležitostiach k poučeniu, ktoré poskytuje než v jej vlastnom riešení; tu to je otázka voľby súradníc a jej výhody a geometrická interpretácia výsledku získaného výpočtom.

Zvolíme sústavu ortonormálnych súradníc tak, aby vrcholy trojuholníka mali súradnice $A = [0; 0]$, $B = [c; 0]$, $C = [x_0; y_0]$. Ortonormálne súradnice volíme preto, že budeme pracovať so vzdialenosťami. Výhoda metódy súradníc je v tom, že si nemusíme všímať, či je $\triangle ABC$ ostrouhlý, pravouhlý či tupouhlý, že nemusíme zohľadňovať polohu bodu M trojuholníka ABC vzhľadom k vrcholom, dokonca ani to, či bod M roviny ABC patrí k trojuholníku ABC či nie, všetky tieto situácie sa odbavia jediným výpočtom.

Označíme súradnice premenného bodu $M = [x; y]$; ešte si uvedomíme, že nekolineárnosť bodov A, B, C je ekvivalentná s podmienkou $y_0 \neq 0$. Výpočet budeme samozrejme sprevádzať náčrtkom (obr. 48).



Obr. 48

Funkcia premenných x, y, ktorej minimum máme vyšetrovať, je

$$\sigma = (x^2 + y^2) + [(x - c)^2 + y^2] + [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2],$$

po úprave

$$\sigma = 3x^2 + 3y^2 - 2(x_0 + c)\,x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 + c^2. \quad (10)$$

Kľúčom k ďalšej úprave je požiadavka, aby sa premenné x, y vyskytovali iba v mnohočlenoch, ktoré sú základmi druhých mocnín; toto dosiahneme úpravou (10):

$$\sigma = 3\left(x - \frac{(x_0 + c)}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{y_0}{3}\right)^2 -$$
$$- \frac{(x_0 + c)^2}{3} - \frac{y_0^2}{3} + x_0^2 + y_0^2 + c^2. \quad (11)$$

Táto funkcia nadobudne minimum σ_0 práve ak platí

$$x - \frac{x_0 + c}{3} = 0, \qquad y - \frac{y_0}{3} = 0. \quad (12)$$

Toto minimum je podľa (11)

$$\sigma_0 = x_0^2 + y_0^2 + c^2 - \frac{(x_0 + c)^2}{3} - \frac{y_0^2}{3}. \quad (13)$$

Geometrická interpretácia výsledkov (12), (13). Čísla $x = \frac{1}{3}(x_0 + c)$, $y = \frac{1}{3}y_0$ sú aritmetické priemery súradníc vrcholov $\triangle ABC$ $[x = \frac{1}{3}(0 + x_0 + c),\ y = \frac{1}{3}(0 + 0 + y_0)]$; preto je hľadaný bod M s minimálnym σ ťažiskom $\triangle ABC$.

Z rovníc $x_0^2 + y_0^2 = b^2$, $(x_0 - c)^2 + y_0^2 = a^2$ vypočítame

$$2cx_0 = b^2 + c^2 - a^2$$

a ďalej
$$(x_0 + c)^2 = (x_0 - c)^2 + 4cx_0 =$$
$$= 2b^2 + 2c^2 - a^2 - y_0^2 \,. \tag{14}$$

Po dosadení z (14) do (13) po úprave dostaneme

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\,.$$

B – I – 6

V rovine je daná konečná množina $\mathcal{M}$ bodov, z ktorých každé dva majú vzdialenosť $l \leqq 1$. Dokážte, že existuje pravideľný osemuholník $A_1A_2 \dots A_8$ s polomerom vpísanej kružnice $\varrho = \frac{1}{2}$ tak, že šesťuholník, ktorý je prienikom polrovín

$$A_8A_1A_2 \cap A_1A_2A_3 \cap A_2A_3A_4 \cap A_3A_4A_5 \cap$$
$$\cap A_4A_5A_6 \cap A_6A_7A_8\,,$$

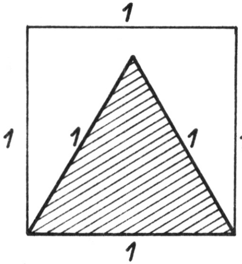
obsahuje všetky body množiny $\mathcal{M}$.

KOMENTÁR

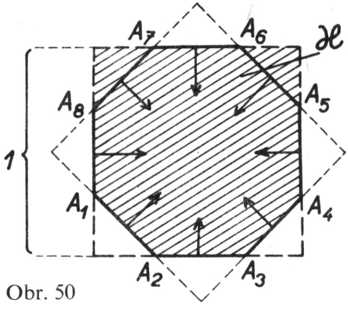
V súvislosti s riešením úlohy B – I – 6 by bolo užitočné zoznámiť riešiteľov s elementárnymi geometrickými pojmami a vysloviť obecný problém, ktorého zvláštnym prípadom je úloha B – I – 6. Stručný výklad je v článkoch **I.**, **II.**, **III.**

I. Ak je $\mathcal{M}$ konečná množina bodov (na priamke, v rovine alebo v priestore), nazveme najväčšiu zo vzdialeností dvojíc jej bodov priemerom množiny $\mathcal{M}$; teda

$$d := \max_{X,Y \in \mathcal{M}} XY\,.$$



Obr. 49



Obr. 50

Podľa tejto definície má jednobodová množina priemer 0, priemer dvojbodovej množiny $\{A, B\}$ je vzdialenosť AB, priemer trojbodovej množiny $\{A, B, C\}$ vrcholov trojuholníka je dĺžka jeho najväčšej strany atd.

II. Ak je daná množina $\mathscr{M}$ v rovine a „vzorový" obrazec $\mathscr{V}$ taký, že sa dá zostrojiť obrazec $\mathscr{V}'$, pre ktorý platí $\mathscr{V} \cong \mathscr{V}'$ a $\mathscr{V}' \supset \mathscr{M}$, povieme, že obrazec $\mathscr{V}'$ pokrýva množinu $\mathscr{M}$ a že obrazcom $\mathscr{V}$ se dá pokryť množina $\mathscr{M}$.

Pomocou tejto fráze sa niektoré situácie dajú popísať stručnejšie. Tak napríklad obr. 49 sa dá popísať vetou: Jednotkovým štvorcom sa dá pokryť trojuholník o strane dĺžky 1. Obrazec (šesťuholník) $\varkappa$, o ktorom sa hovorí v texte úlohy B – I – 6, je vyšrafovaný na obr. 50. Úloha B – I – 6 sa teda dá formulovať takto: Šesťuholníkom $\varkappa$ sa dá pokryť každá konečná množina $\mathscr{M}$ v rovine o priemere $d \leqq 1$.

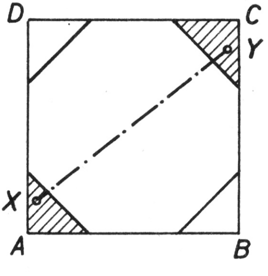
III. V prvej polovici XX. storočia vyslovil francúzsky matematik *Lebesgue* (čítaj Lebeg) tzv. *tabuľkový problém*; tabuľkou nazýval Lebesgue rovinný obrazec, ktorým sa dajú pokryť všetky množiny bodov o priemere 1. Problém znie: Určiť tabuľku s minimálnym obsahom.

Tento problém zatiaľ nie je rozriešený. Sú známe niektoré tabuľky napr. tzv. *Jungov kruh* o polmere $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (obsah 1,047...), jednotkový štvorec (obsah 1), pravideľný šesťuholník o strane dĺžky $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (obsah 0,866...). V posledných desaťročiach sa získali zmenšovaním pravideľného šesťuholníka ďalšie tabuľky. Minimálna tabuľka doposiaľ zostrojená má obsah 0,844.... Pre obsah P minimálnej tabuľky máme i odhad zdola: je $P > 0{,}825$.

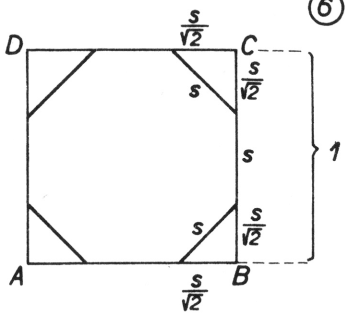
Po tomto výklade môžeme ešte raz znovu formulovať úlohu B–I–6: máme overiť, že šesťuholník z obr. 50 je Lebesgueovou tabuľkou.

IV. Doporučujeme čitateľom, aby najprv dokázali, že jednotkový štvorec je tabuľkou. Zvolia priamku p a všetkými bodmi množiny vedú rovnobežky s priamkou p. Všetky body množiny $\mathcal{M}$ ležia v páse roviny, ktorého hranice sú priamky $p_1 \parallel p$, $p_2 \parallel p$. Vzdialenosť priamok p_1, p_2 sa nanajvyšie rovná 1 (ináč by body množiny $\mathcal{M}$ ležiace na priamkách p_1, p_2 mali vzdialenosť väčšiu než 1). Ak zopakujú tento postup pre priamku $q \perp p$, nájdú pravouholník (prienik dvoch pásov roviny), ktorého strany majú dĺžku najvyše rovnú 1. Tento pravouholník sa dá ľahko zväčšiť na jednotkový štvorec, ktorý je tabuľkou.

Teraz vpíšeme do jednotkového štvorca pravideľný osemuholník (obr. 51). Ak vo vnútri jedného z vyšrafovaných trojuholníkov leží bod $X \in \mathcal{M}$, nemôže vo vnútri vyšrafovaného trojuholníka naproti ležať žiadny bod $Y \in \mathcal{M}$, pretože by potom bolo $XY > 1$. Preto sa dá aspoň jeden z vyšrafovaných trojuholníkov oddeliť od štvorca $ABCD$ a zbývajúci päťuholník zostane tabuľkou. Ak zopakujeme rovnaký po-



Obr. 51



Obr. 52

stup s trojuholníkmi pri vrcholoch B, D, zistíme, že sa od štvorca $ABCD$ dajú oddeliť trojuholníky pri dvoch susedných vrcholoch štvorca a zbývajúci šesťuholník zostane tabuľkou.

Obsah tejto tabuľky vypočítame pomocou obr. 52. Zrejme je $\dfrac{s}{\sqrt{2}} + s + \dfrac{s}{\sqrt{2}} = 1$ (s je dĺžka strany pravidelného osemuholníka, vpísaného do jednotkového štvorca), tj. $s = \sqrt{2} - 1$. Obsah jedného z oddelených trojuholníkov je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Obsah tabuľky teda je

$$1 - 2 \,.\, \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 1 - (1{,}5 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 0{,}5 = 0{,}914\ldots .$$

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE C I. KOLA

C – I – 1

Určte všetky štvorciferné čísla, z ktorých každé má súčasne nasledujúce vlastnosti:

a) je súčtom druhých mocnín troch bezprostredne po sebe nasledujúcich párnych prirodzených čísel;

b) je deliteľné číslom 28.

KOMENTÁR

Hľadané číslo označme N, potom existuje prirodzené číslo $n \geqq 2$ tak, že

$$N = (2n - 2)^2 + (2n)^2 + (2n + 2)^2 , \tag{1}$$

čiže

$$N = 4(3n^2 + 2) . \tag{2}$$

Rovnica (1) dáva najvýhodnejší tvar vyjadrenia súčtu druhých mocnín troch bezprostredne po sebe nasledujúcich párnych prirodzených čísel.

Podľa predpokladu je $N = 28N'$; z (2) plynie potom

$$3n^2 + 2 = 7N' ,$$

čiže číslo $3n^2 + 2$ je násobkom siedmich. Otázka teraz znie: určte všetky celé čísla n, pre ktoré je prirodzené číslo $3n^2 + 2$ násobkom siedmich.

Množina čísel n, ktoré sú riešením tejto úlohy, je zrejme nekonečná. Je vidieť, že bude treba zistiť, do ktorých zbytkových tried modulo 7 budú patriť hľadané n; povedané jazykom školy: aké zbytky pri delení číslom 7 budú dávať príslušné čísla?

Odpoveď na túto otázku sa nájde experimentálne. Zostaví sa tabuľka:

(T$_1$)

	n	0	1	2	3	4	5	6
Zbytková trieda mod 7 čísla	n^2	0	1	4	2	2	4	1
	$3n^2$	0	3	5	6	6	5	3
	$3n^2 + 2$	2	5	0	1	1	0	5

Teda je buď $n = 7k + 2$ alebo $n = 7k + 5$, kde k je celé číslo. Ak je $n = 7k + 2$, je $3n^2 + 2 = 3 \,.\, 49k^2 + 3 \,.\, 28k + 14$, tj. podľa (2)

$$N = 28(21k^2 + 12k + 2)\,. \tag{3}$$

Ak je $n = 7k + 5$, je $3n^2 + {}^2 = 3 \,.\, 49k^2 + 3 \,.\, 70k + 77$, tj. podľa (2)

$$N = 28(21k^2 + 30k + 11)\,. \tag{4}$$

Vzorce (3) a (4) dávajú všetky možné riešenia úlohy bez obmedzenia na štvorciferné čísla. Naozaj, keď dosadíme do (3) alebo (4) ľubovolné celé číslo k, dostaneme násobek čísla 28. Iste nevadí, ak rozriešime najprv túto trochu všeobecnějšiu úlohu.

Teraz uplatníme obmedzenie na štvorciferné čísla, tj. požiadavku $1\,000 \leqq N < 10\,000$. Podľa (3), (4) dostaneme jednak sústavu nerovností

$$\frac{1\,000}{28} \leqq 21k^2 + 12k + 2 < \frac{10\,000}{28}, \tag{5}$$

jednak sústavu nerovností

$$\frac{1\,000}{28} \leqq 21k^2 + 30k + 11 < \frac{10\,000}{28}. \tag{6}$$

Sústavu (5) upravíme na tvar

$$35 < 21k^2 + 12k + 2 < 358\,. \tag{7}$$

Zostavíme tabuľku:

(T$_2$)

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$21k^2 + 12k + 2$	467	290	155	62	11	2	35	110	227	386

Stĺpce -4, -3, -2 vyhovujú síce nerovnostiam (7), ale vzorec $n = 7k + 2$ dáva záporné n. Ďalej vyhovujú nerovnostiam (7) stĺpce 2, 3*); príslušné hodnoty n sú 16 a 23.

Sústavu (6) upravíme na tvar

$$35 < 21k^2 + 30k + 11 < 358\,. \tag{8}$$

*) Pre každé $k > 3$ alebo $k < -4$ nie je splnená nerovnosť (7) ani nerovnosť (8); to vyplýva z priebehu kvadratickej funkcie.

Zostavíme opäť tabuľku:

(T_3)

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$21k^2 + 30k + 11$	386	227	110	35	2	11	62	155	290	467

Stĺpce -4, -3 vyhovujú síce nerovnostiam (8), ale vzorec $n = 7k + 5$ dáva záporné n. Ďalej vyhovujú nerovnostiam (8) stĺpce 1, 2, 3; príslušné hodnoty n sú 12, 19, 26.

Dostávame teda 5 riešení; sú to čísla 8 120, 4 340, 1 736, 3 080 a 6 356. Všetky tieto čísla sú deliteľné číslom 28 a platí:

$$8\,120 = 50^2 + 52^2 + 54^2\,,$$

$$4\,340 = 36^2 + 38^2 + 40^2\,,$$

$$1\,736 = 22^2 + 24^2 + 26^2\,,$$

$$3\,080 = 30^2 + 32^2 + 34^2\,,$$

$$6\,356 = 44^2 + 46^2 + 48^2\,.$$

Riešenie úlohy je časove dosť náročné; z časti je deduktivne, z časti experimentálne (opiera sa o zostavenie tabuliek (T_1), (T_2), (T_3). Základnou myšlienkou je nájsť zbytkové triedy modulo 7, do ktorých patria hľadané čísla n.

C – I – 2

Jsou dány tři konečné množiny $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, pro něž platí $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_1 \neq \emptyset$. Označme po řadě p, s_{12}, s_{23}, s_{31} počty prvků množin $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_1$. Je-li každé z čísel s_{12}, s_{23}, s_{31}

větší než p, pak lze sestrojit trojúhelník, jehož strany mají délky

$$1 - \frac{p}{s_{12}}, \qquad 1 - \frac{p}{s_{23}}, \qquad 1 - \frac{p}{s_{31}}. \tag{9}$$

Dokažte.

KOMENTÁŘ

Ačkoli je myšlenka důkazu zcela jednoduchá, vyžaduje výpočet trochu zamyšlení. Je jasné, že je třeba dokázat, že čísla (9) splňují trojúhelníkové nerovnosti; to je nutná i postačující podmínka pro sestrojitelnost trojúhelníka, jehož strany mají délky

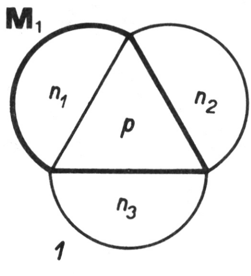
$$x = 1 - \frac{p}{s_{23}}, \qquad y = 1 - \frac{p}{s_{31}}, \qquad z = 1 - \frac{p}{s_{12}}.$$

Důkaz lze provést v podstatě dvojím způsobem:

I. Dokáže se, že platí $x + y > z$, $y + z > x$, $z + x > y$.

II. Čísla x, y, z se uspořádají, nechť je např. $z \geqq y \geqq x$; pak stačí dokázat $z < x + y$.

Tato dvě kritéria (postačující podmínky) pro sestrojitel-



Obr. 53

nost trojúhelníka ze tří stran by si měli řešitelé při této příležitosti připomenout.

Zaveďme označení počtu prvků podle Vennova diagramu na obr. 53; množina $\mathcal{M}_1$ je tu vyznačena tlustou čárou; obdobně by se mohly vyznačit množiny $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$. Podle obr. 53 platí

$$s_{12} = n_1 + n_2 + p, \qquad s_{23} = n_2 + n_3 + p,$$

$$s_{31} = n_3 + n_1 + p.$$

Postup I. Doporučujeme řešitelům, aby si pro formální zjednodušení výpočtu zavedli značení $n_1 + n_2 = c$, $n_2 + n_3 = a$, $n_3 + n_1 = b$. Pak je $a + p = n_2 + n_3 + p = s_{23} > p$, tj. $a > 0$ a obdobně $b > 0$, $c > 0$. Dále je

$$s_{12} = c + p, \qquad s_{23} = a + p, \qquad s_{31} = b + p,$$

$$x = \frac{a}{a + p}, \qquad y = \frac{b}{b + p}, \qquad z = \frac{c}{c + p}. \tag{10}$$

Dokažme nyní nepřímo třeba nerovnost $x + y > z$. Předpokládejme, že platí $x + y \leqq z$, tj. podle (10)

$$\frac{a}{a + p} + \frac{b}{b + p} \leqq \frac{c}{c + p}.$$

Odtud dostaneme po úpravě

$$p^2(a + b - c) + 2pab + abc \leqq 0. \tag{11}$$

Protože $a + b - c = 2n_3 \geqq 0$, $2pab > 0$, $abc > 0$, dává (11) spor.*)

---

*) Důkaz lze provést i bez zavedení proměnných a, b, c.

Postup II. Zvolme označení tak, že je $n_1 \geqq n_2 \geqq n_3$. Pak platí

$$z \geqq y \geqq x\,,$$

neboť

$$z = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p} \geqq \frac{n_1 + n_3}{n_1 + n_3 + p} = y\,,$$

jak zjistíme z nerovnosti

$$(n_1 + n_2)(n_1 + n_3 + p) \geqq (n_1 + n_3)(n_1 + n_2 + p)\,.$$

Obdobně dokážeme $y \geqq x$.

Nyní stačí dokázat nerovnost $x + y > z$. Kdyby platilo $x + y \leqq z$, bylo by

$$\frac{n_2 + n_3}{n_2 + n_3 + p} + \frac{n_3 + n_1}{n_3 + n_1 + p} \leqq \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p}\,. \tag{12}$$

Je-li $n_3 \neq 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n_1 + n_3}{n_1 + n_3 + p} &\geqq \frac{n_1 + n_3}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_1}{n_1 + n_2 + p}\,, \\ \frac{n_2 + n_3}{n_2 + n_3 + p} &\geqq \frac{n_2 + n_3}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_2}{n_1 + n_2 + p}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Spojením (12) a (13) vyjde

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p}\,,$$

což je spor. Je-li $n_3 = 0$, zní (12)

$$\frac{n_1}{n_1 + p} + \frac{n_2}{n_2 + p} \leqq \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p}. \qquad (14)$$

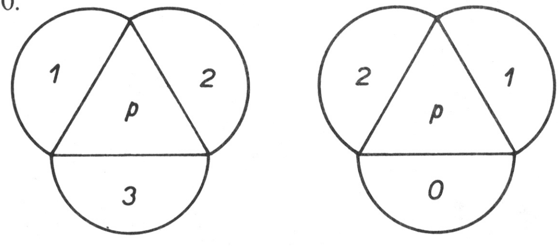
Protože je $s_{13} > p$, $s_{23} > p$, je $n_1 > 0$, $n_2 > 0$; z (14) pak plyne

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + p} > \frac{n_1}{n_1 + n_2 + p} + \frac{n_2}{n_1 + n_2 + p},$$

což je opět spor.

Úloha C–I–2 je poměrně dosti obtížná, neboť řešitelé kategorie C nemají zpravidla zběhlost v práci s nerovnostmi. Rozdíl mezi postupem I. a II. je v tom, že v I. se zbavujeme zlomků, v II. s nimi pracujeme. Oba důkazy jsou nepřímé, v obou musíme využít předpokladu $s_{12} > p$, $s_{23} > p$, $s_{31} > p$, z něhož plyne, že nejvýše jedno z čísel n_1, n_2, n_3 může být rovno nule (při postupu II. je to n_3, které je nejmenší). Při postupu I. nemusíme štěpit nepřímý důkaz na dva případy jako při postupu II., kde rozeznáváme případy $n_3 \neq 0$ a $n_3 = 0$. Postup I. je asi méně „trikový" než postup II., a proto přístupnější.

V každém případě by si měl každý řešitel úlohu „ohmatat" tím, že by si volil číselně počty prvků n_1, n_2, n_3, např. podle obr. 54. Přitom by zároveň hned jistě vyloučil možnost $n_2 = n_3 = 0$.



Obr. 54

C – I – 3

Cestovná kancelária organizovala 4 typy týždenných rekreácií, z ktorých sa žiadne dve časove neprekrývali; označme ich A, B, C, D. Pracovníčka cestovnej kancelárie zistila: Na rekreácie A, B, C, D sa za radom hlási 195, 203, 106, 329 osôb, pritom sa nikto nehlási na práve tri z týchto rekreácií. Na práve dve rekreácie sa hlási 267 ľudí, a to na rekreácie A a B 64 ľudí, na rekreácie A a C 58 ľudí, na rekreácie B a C 32 osôb, na rekreácie C a D 14 osôb a na rekreácie B a D 51 osôb. Na všetky štyri rekreácie sa prihlásili dvaja ľudia.

Môže pracovníčka z týchto údajov zistiť:

a) koľko ľudí sa prihlásilo na práve jednu z týchto rekreácií;

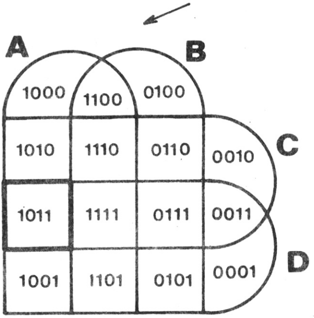
b) koľko ľudí sa celkom prihlásilo na organizované rekreácie?

KOMENTÁR

Úloha C – I – 3 práve tak ako úloha C – I – 2 má tematiku z tzv. modernizovanej školskej matematiky. Keď na jednej strane úloha C – I – 2 vedie vlastne na algebraickú úlohu (manipulácia s nerovnosťami), úloha C – I – 3 na druhej strane podstatne využíva Vennove diagramy a tým obchádza riešenie sústavou lineárnych rovníc, ktoré by bolo zbytočne zdĺhavé a únavné.

Účastníci prihlásení na jednotlivé rekreácie tvoria štyri množiny $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ (označíme ich súhlasne s rekreáciami) a poradíme riešiteľom, aby si pripravili základnú schému

(Vennov diagram pre ich prieniky a zjednotenia napríklad v tomto tvare (obr. 55). Označenie jednotlivých oblastí číslami v dvojkovej sústave je výhodné a ľahko zrozumiteľné:



Obr. 55

napr. oblasť 1011 vyznačená na obr. 55 hrubou hranicou je prienik $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}' \cap \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, kde $\mathscr{B}'$ je množina doplňková k $\mathscr{B}$. Údaje o počte prvkov jednotlivých oblastí zapíšeme podľa textu do nasledujúcej tabuľky:

(T_4)

1000	0100	0010	0001	1100	1010	1001	0110	0101	0011	0111	1011	1101	1110	1111
				64	58		32	51	14	0	0	0	0	2

267

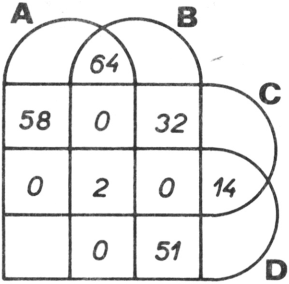
Podľa textu je súčet čísel v stĺpcoch 1100, 1010, 1001, 0110, 0101 a 0011 rovný 267, súčty všetkých čísel v stĺpcoch, ktoré majú na prvom (druhom, treťom, štvrtom) mieste jednotku, sú za radom 195, 203, 106, 329. Aj tieto záznamy by mali riešitelia previesť, lebo v nich je vlastne matematizácia situácie danej v slovnej úlohe.

Prvým impulzom je pokyn nahradiť v schéme z obr. 55 dyadické označenia polí číslami, ktoré znamenajú počty ich prvkov. Potom výjde ako výsledok obr. 56. Úlohou je doplniť všetky prázdne polia na obr. 56; potom budeme môcť zodpovedať všetky možné otázky, teda i otázky úlohy.

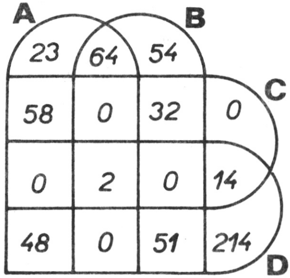
Posledným impulzom môže byť pokyn, v akom poradí sa majú polia vyplňovať. Môže to byť napr. (podľa obr. 55):

a) 0100 ($\mathscr{B}$ má 203 prvkov);
b) 1001 (viď horení tabuľku (T_4));
c) 1000 ($\mathscr{A}$ má 195 prvkov);
d) 0010 ($\mathscr{C}$ má 106 prvkov);
e) 0001 ($\mathscr{D}$ má 329 prvkov).

Takto vyplnený diagram je na obr. 57. Odpoveď na obe otázky znie: Na práve jednu rekreáciu sa prihlásilo 291 osôb, všetkých prihlásených osôb bolo 560. Je to súčet čísel v poliach 1000, 0100, 0010, 0001 a súčet všetkých čísel všetkých polí.



Obr. 56



Obr. 57

Postup, ktorý v predchádzajúcom odporúčame, sa možno zdá byť zbytočne rozvleklý, myslíme si ale, že je didakticky veľmi vhodný. To by sa najlepšie ukázalo, keby sme riešili úlohu pre 7 – 8 množín; potom by bolo ale lepšie nahradiť schémy na obr. 55, 56, 57 tabuľkami obdobnými k (T_4).

C – I – 4

Je daný trojuholník, ktorého žiadna strana nemá dĺžku väčšiu než 1. Dokážte, že ho možno umiestniť do kruhu o polomeru $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

KOMENTÁR

Táto dôkazová úloha patrí k *úlohám* o tzv. *ukladaniu* (Lagerung), ktorými sa zaoberá diskrétna geometria, geometria konvexných útvarov i kombinatorická geometria. Ide tu zrejme o odhad polomeru príslušného kruhu.

Nepatrné experimentovanie dá hypotézu, že dôkaz je veľmi jednoduchý pre tupouhlý a pravouhlý trojuholník. Jeho najdlhšia strana – označme ju AB – má dĺžku $AB \leqq 1$ a protiľahlý uhol je $\sphericalangle ACB \geqq 90°$. Vnútrajšok kruhu $\mathscr{K}$ zostrojeného nad priemerom AB je množina všetkých bodov X v rovine daného trojuholníka, pre ktoré platí

$$90° < \sphericalangle AXB \leqq 180°\,,$$

teda je $C \in \mathscr{K}$. Teraz stačí zostrojiť kruh $\mathscr{K}'$ o polomere $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sústredný s $\mathscr{K}$. Pretože je $\frac{1}{3}\sqrt{3} > \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{2}AB$, je $\triangle ABC \subset \mathscr{K} \subset \mathscr{K}'$.

Zostáva vyšetriť ostrouhlý trojuholník. Najväčší z jeho uhlov má vždy veľkosť $\geqq 60°$; ak by bolo $\alpha < 60° \wedge \beta < 60° \wedge \gamma < 60°$, bolo by $\alpha + \beta + \gamma < 180°$ a to nie je možné. Zvolme označenie tak, aby bolo $\alpha \geqq 60°$ a ovšem zároveň $a \leqq 1$. Použijeme známy vzorec

$$a = 2r \sin \alpha\,, \tag{15}$$

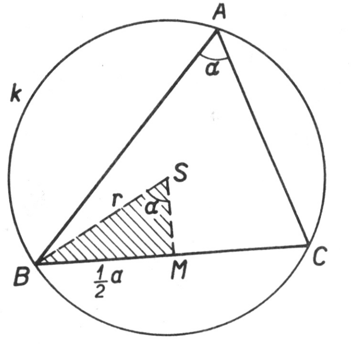
kde r je polomer kružnice opísanej danému trojuholníku ABC. Vzorec (15) vyplýva z pravouhlého trojuholníka BMS, kde M je stred strany BC, S je stred kružnice k opísanej trojuholníku ABC (obr. 58). Zo vzorca (15) vyplýva

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} \leqq \frac{1}{2 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,;$$

pretože $90° > \alpha \geqq 60°$, tj. $1 > \sin \alpha \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Kruh so stredom S a polomerom $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ obsahuje teda trojuholník ABC.

Hranicu $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ pre polomer kruhu nemožno ďalej znížiť,



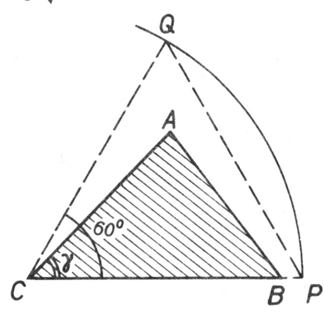
Obr. 58

pretože medzi vyšetrované trojuholníky patrí aj rovnostranný trojuholník o strane dĺžky 1. Najmenší kruh, ktorý tento trojuholník obsahuje, je kruh obmedzený kružnicou opísanou a tá má polomer $\frac{2}{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Zamyslime sa ešte nad predchádzajúcim dôkazom. Základnou myšlienkou bolo použitie kružnice opísanej trojuholníku a jeho nejväčšieho uhla. Na prvom mieste teda mal byť prípad ostrouhlého trojuholníka ABC. Ak je však trojuholník ABC pravouhlý alebo tupouhlý, nedá sa uvedený postup s opísanou kružnicou použiť a musí sa previesť úvaha, s ktorou sme začali.

Ponúka sa ešte možnosť použiť najmenší uhol trojuholníka ABC, aby sme nemuseli štěpiť dôkaz na dva prípady. Najprv nepriamo ukážeme, že najmenší uhol má veľkosť $\leqq 60°$ a potom využijeme obr. 59, kde označenie je zvolené tak, aby γ bol najmenší uhol.

Pretože je $AC \leqq 1$, $BC \leqq 1$, leží (vyšrafovaný) trojuholník ABC vo výseči CPQ, kde $CP = CQ = 1$, $\sphericalangle PCQ = 60°$. Teraz stačí ukázať, že táto výseč leží v kruhu obmedzenom kružnicou opísanou rovnostrannému trojuholníku CPQ; táto kružnica má polomer $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

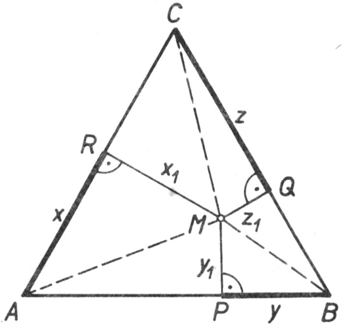


Obr. 59

V týchto zdôvodneniach, kde ide vlastne o konvexitu, bude asi v riešení vždy niečo intuitívne. Myslíme, že sa s tým môžeme uspokojiť, pretože dôležitejšia je myšlienka dôkazu.

C – I – 5

Daný je rovnostranný trojuholník ABC a ľubovolný jeho vnútorný bod M. Päty kolmíc zostrojené bodom M na strany AB, BC, CA označte postupne P, Q, R.



Obr. 60

a) Dokážte, že súčet $PB + QC + RA$ je rovný polovičnému obvodu trojuholníka ABC.

b) Platí vlastnosť uvedená v odseku a) i pre body M ležiace na obvode trojuholníka ABC?

KOMENTÁŘ

Řešení. Situace je na obr. 60. Pravděpodobně každý řešitel začne počítat s použitím Pythagorovy věty na šest pravoúhlých trojúhelníků, které vidí na obr. 60. Jakýsi vtip je snad jedině ve vhodných úpravách. Označíme-li a délku strany trojúhelníka ABC, dále x, y, z a x_1, y_1, z_1 délky úseček podle obr. 60, dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 + x_1^2 &= (a - y)^2 + y_1^2\,, \\ y^2 + y_1^2 &= (a - z)^2 + z_1^2\,, \\ z^2 + z_1^2 &= (a - x)^2 + x_1^2\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Rozvedeme-li druhé mocniny dvojčlenů a sečteme-li všechny tři rovnice (16), dostaneme

$$x + y + z = \tfrac{3}{2}a\,.$$

Tento postup zůstává v platnosti i tehdy, když některé z pravoúhlých trojúhelníků degenerují v úsečku nebo bod, tj. když bod M leží na hranici $\triangle ABC$. (Např. když je $M = A$, je $x = 0$, $y = a$, $z = \frac{1}{2}a$.)

Tím jsme odpověděli na obě otázky úlohy.

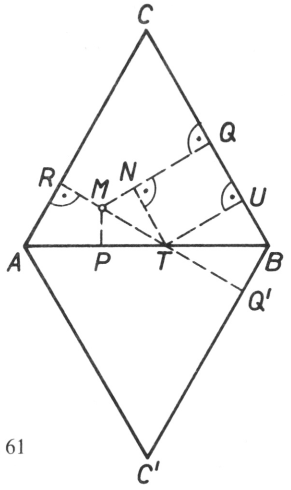
Úloha C – I – 5 poskytuje příležitost zabývat se podrobněji situací z obr. 60. Pomocí obsahů $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ odvodíme pro čísla x_1, y_1, z_1 vztah

$$x_1 + y_1 + z_1 = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}\,; \tag{17}$$

$v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ je délka výšky $\triangle ABC$, vzorec (17) se dá odvodit také pomocí obr. 61.

Zde je

$$MQ = MN + NQ\,, \qquad MN = MP = \tfrac{1}{2}MT\,,$$
$$NQ = TU = TQ'\,,$$



Obr. 61

a tedy

$$MR + MQ + MP = MR + \tfrac{1}{2}MT + TQ' + MP =$$
$$= MR + MT + TQ' = RQ' = v\,.$$

Každému bodu $\triangle ABC$ je přiřaděna jediná trojice nezáporných čísel $[x_1, y_1, z_1]$, která splňuje (17) – obráceně každé takové trojici je přiřaděn jediný bod M trojúhelníku ABC. Tím jsou zavedeny tzv. *trilineární souřadnice* bodu $M = [x_1, y_1, z_1]$, které ovšem nejsou nezávislé a z nichž každá se pohybuje v intervalu $\langle 0, v\rangle$. Tyto souřadnice lze rozšířit na celou rovinu, připustíme-li za ně i čísla záporná a čísla větší než v.

Druhá poznámka: Zkoumejme, zda a jak se dá úloha C – I – 5 rozšířit na libovolný ostroúhlý trojúhelník. Rovnice (16) se změní tak, že se v nich místo a budou vyskytovat po řadě délky stran a, b, c. Výsledná rovnice pak bude

$$bx + cy + az = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\,.$$

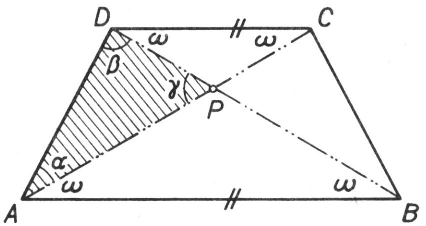
Tato rovnice by mohla být východiskem pro zavedení dalších souřadnic.

C – I – 6

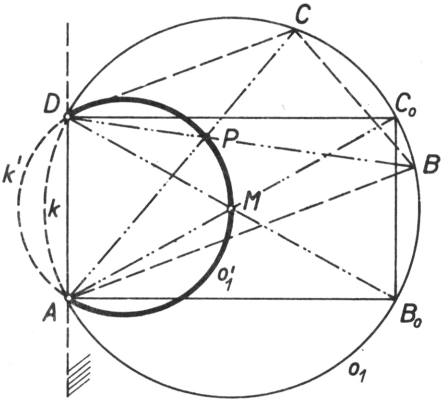
V rovině jsou dány dva různé body A, D. Dále je dáno číslo r takové, že $r > \frac{1}{2}AD$. Určete geometrické místo průsečíku úhlopříček všech rovnoramenných lichoběžníků s ramenem AD a s poloměrem opsané kružnice r.

KOMENTÁŘ

Jde o dost fádní konstrukční úlohu s tematikou „obvodový úhel". Nad tětivou AD sestrojíme kružnici $k = (S, r)$; body A, D ji rozdělí na dva neshodné oblouky, zbývající vrcholy B, C každého z hledaných lichoběžníků leží na větším z těchto oblouků; označme jej o_1. Na obr. 62 je načrtnut jeden z rovnoramenných lichoběžníků $ABCD$: Na základě vlast-



Obr. 62



Obr. 63

nosti obvodových úhlů je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = \omega$, vzhledem k symetrii je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = \omega$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAB = \omega$.

Pro trojúhelník ADP tedy platí

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 2\omega\,,$$

neboť je $(\alpha + \omega) + (\beta + \omega) = 180°$ $(AB \parallel CD)$. Bod P tedy náleží tomu oblouku o'_1 kružnice k' sestrojené nad tětivou AD a určenému obvodovým úhlem 2ω, který leží v polorovině ADo_1 (obr. 63).

Každý bod $P \neq A, D$ oblouku o'_1 je průsečíkem úhlopříček některého lichoběžníku $ABCD$ vepsaného kružnici k; tento lichoběžník se sestrojí podle obr. 63. Výjimku dělá jen střed M oblouku o'_1, kdy příslušný lichoběžník přejde v pravoúhelník AB_0C_0D (viz obr. 63).

Hledaná množina průsečíků P (geometrické místo) je tedy oblouk o'_1 bez bodů A, D, M.

Úloha C – I – 6 snad nepotřebuje pokyny k řešení, jedině snad pokyn: „všimni si úhlu $\sphericalangle APD$“. Ovšem i tento pokyn je zbytečný, sestrojí-li řešitelé – jak se sluší – několik lichoběžníků $ABCD$ a bodů P a z názoru odhadnou, že hledané geometrické místo je oblouk kružnice; pak je celkem jasné, že se tvrzení bude dokazovat pomocí obvodového úhlu.

KOMENTÁŘE K ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH KATEGORIE Z I. KOLA

Z–I–1

a) Ak dosadíme za n celé čísla do zlomkov

$$\frac{18n + 13}{11n + 8}, \quad \frac{5n + 7}{12n + 17}, \quad \frac{24n + 13}{39n + 21},$$

dostaneme vždy zlomok v základnom tvare. Dokážte!

b) Platí to isté pre zlomky

$$\frac{12n + 7}{19n + 15}, \quad \frac{29n + 31}{32n + 41}, \quad \frac{79n + 25}{24n + 7}?$$

KOMENTÁR

Táto úloha je jednoduchá a originálna aplikácia elementárnej číselnej teórie na aritmetiku racionálnych čísel. Časť a) aj časť b) obsahuje po troch úlohách toho istého druhu, ktorých presná matematická formulácia znie:

A) pre všetky $n \in \mathscr{C}$ platí $D(18n + 13,\ 11n + 8) = 1$;

resp.

B) pre všetky $n \in \mathscr{C}$ sú čísla $18n + 13$, $11n + 8$ nesúdelné.

Pritom $\mathscr{C}$ označuje množinu všetkých celých čísel, $D(x, y)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel x, y.

Ak zostavíme formuláciu A), máme už *prvý impulz* k riešeniu všetkých šiestich dielčich úloh.

Druhý impulz môže byť tento: Ak máme dokázať, že $\forall n \in \mathscr{C}$ je $D(18n + 13, 11n + 8) = 1$, budeme skúmať všetkých spoločných deliteľov čísel $18n + 13$, $11n + 8$, a to pre každé číslo n. Uvedené tvrdenie platí práve vtedy, ak sa ukáže, že každý spoločný deliteľ je buď 1 alebo -1.

Nech teda je δ spoločný deliteľ čísel $18n + 13$, $11n + 8$; potom platí

$$18n + 13 = \delta a\,, \qquad 11n + 8 = \delta b\,, \tag{1}$$

kde a, b sú čísla z $\mathscr{C}$. Z rovníc (1) vylúčime n

$$11(18n + 13) - 18(11n + 8) = \delta(11a - 18b)\,,$$

t. j.

$$143 - 144 = \delta(11a - 18b)\,,$$

t. j.

$$\delta(11a - 18b) = -1\,. \tag{2}$$

Predchádzajúci výpočet je analýza úlohy.

Teraz je treba využiť rovnicu (2), pretože $11a - 18b \in \mathscr{C}$, plynie z (2), že $\delta = \pm 1$, $11a - 18b = \pm 1$. Dokázali sme teda: $\forall n \in \mathscr{C}$ platí: Ak je δ spoločný deliteľ čísel $18n + 13$, $11n + 8$, je $\delta = \pm 1$, tzn. obe čísla sú nesúdeľné a zlomok

$\dfrac{18n + 13}{11n + 8}$ je v základnom tvare.

Podobne sa riešia ďalšie dve úlohy v oddelení a).

Analýza pri riešení úloh oddelenia b) bude rovnaká. Napr. prvý zlomok dá sústavu

$$\begin{aligned} 12n + 7 &= \delta a\,, \\ 19n + 15 &= \delta b\,. \end{aligned} \qquad a, b \in \mathscr{C}\,. \tag{3}$$

Po vylúčení n dostaneme

$$7 \,.\, 19 - 12 \,.\, 15 = \delta(19a - 12b),$$

t. zn.

$$-47 = \delta(19a - 12b).$$

Pretože 47 je prvočíslo, môže byť $\delta = \pm 1$, $\delta = \pm 47$ a odtiaľ plynie $19a - 12b = \mp 47$, $19a - 12b = \mp 1$. Skúmajme teda, pre ktoré $a, b \in \mathscr{C}$ platí

$$19a - 12b = \pm 1. \tag{4a}$$

Výpočet urobme skusmo: Napíšeme postupnosti násobkov čísel 12, 19 a vykladáme násobky, ktoré sa líšia o 1.

Dostaneme:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, **96**, 108, 120, ...

19, 38, 57, 76, **95**, 114, 133, ...

Teda je

$$19 \,.\, 5 - 12 \,.\, 8 = -1. \tag{4b}$$

Po porovnaní (4a), (4b) zvolíme $a = 5$, $b = 8$ a z ktorejkoľvek rovnice (3) vypočítame $n = 19$. Pre $n = 19$ naozaj je

$$\frac{12 \,.\, 19 + 7}{19 \,.\, 11 + 15} = \frac{235}{376} = \frac{47 \,.\, 5}{47 \,.\, 8} = \frac{5}{8},$$

t. j. zlomok $\dfrac{12n + 7}{19n + 15}$ nie je pre $n = 19$ v základnom tvare.

Tým sme našli protipríklad: našli sme aspoň jedno n

$(n = 19)$, pre ktoré nie je zlomok $\dfrac{12n + 7}{19n + 15}$ v základnom tvare. Pre iné n ovšem môže byť tento zlomok v základnom tvare; napríklad pre $n = 1$ dostaneme $\dfrac{12 . 1 + 7}{19 . 1 + 15} = \dfrac{19}{34}$ a to je zlomok v základnom tvare. Upozorníme na rozdiel struktúry riešenia úloh skupín a) a b):

skupina a)	skupina b)
Musíme dokázať, že pre všetky $n \in \mathscr{C}$ sú čitateľ a menovateľ zlomku nesúdelné čísla	Musíme nájsť aspoň jedno $n \in \mathscr{C}$, pre ktoré je čitateľ zlomku súdelný s menovateľom.

Obdobne sa riešia druhé dve úlohy skupiny b).

Predchádzajúce riešenia sú „príliš algebraické" pre riešiteľov kategórie Z. Ukážeme iné primitívnejšie riešenia, ktoré majú v podstate tú istú logickú štruktúru. Rozriešime tretie úlohy z oboch skupín.

Predpokladajme, že čísla $24n + 13$, $39n + 21$ majú pre niektoré n istého spoločného deliteľa. Potom tento deliteľ majú dvojice

$$\begin{array}{lrl}
39n + 21\,, & 24n + 13 & \\
24n + 13\,, & 15n + 8 & = (39n + 21) - (24n + 13)\,, \\
15n + 8\,, & 9n + 5 & = (24n + 13) - (15n + 8)\,, \\
9n + 5\,, & 6n + 3 & = (15n + 8) - (9n + 5)\,, \\
6n + 3\,, & 3n + 2 & = (9n + 5) - (6n + 3)\,, \\
3n + 2\,, & -1 & = (6n + 3) - 2(3n + 2)\,.
\end{array}$$

Posledné dve čísla ale majú pre každé n len spoločných deliteľov ± 1. Preto sú čísla $39n + 21$, $23n + 13$ pre každé n nesúdelné.

Predpokladajme, že čísla $79n + 25$, $24n + 7$ majú pre niektoré n istého spoločného deliteľa. Potom tohto deliteľa majú dvojice:

$$\begin{array}{ll}
79n + 25\,, & 24n + 7\,, \\
24n + 7\,, & 7n + 4 = (79n + 25) - 3(24n + 7)\,, \\
7n + 4\,, & 3n - 5 = (24n + 7) - 3(7n + 4)\,, \\
3n - 5\,, & n + 14 = (7n + 4) - 2(3n - 5)\,, \\
n + 14\,, & -47 = (3n - 5) - 3(n + 14)\,.
\end{array}$$

Posledná dve čísla ale majú tiež spoločného deliteľa 47, napr. pre $n = 33$. Skutočne platí:

$$\frac{79\,.\,33 + 25}{24\,.\,33 + 7} = \frac{2\,632}{799} = \frac{56\,.\,47}{17\,.\,47} = \frac{56}{17}$$

Našli sme teda aspoň jedno n, pre ktoré nie je zlomok

$\dfrac{79n + 25}{24n + 7}$ v základnom tvare.

Z – I – 2

Jsou dána kladná čísla a, b, c, d, pro která platí

$$a + b + c + d = 1\,.$$

Dokažte, že pak platí

$$abc + abd + acd + bcd < \tfrac{1}{6},$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1.$$

KOMENTÁŘ

Základní myšlenka pro tyto jednoduché odhady je vyhledat příslušný výraz v rozvedení $(a + b + c + d)^3$ a odtud odvodit příslušnou nerovnost. K tomu nepotřebujeme znát vzorce pro umocňování polynomu; mocnina se nahradí prostě součinem:

$$(a + b + c + d)(a + b + c + d)(a + b + c + d). \quad (5)$$

Známe algoritmus pro násobení dvou mnohočlenů; v tomto případě však roznásobení nebudeme provádět. Ukážeme, že bychom tak dostali nepřehledný sled 64 (4^3) členů, což samo o sobě je kombinatorická úvaha.

Nyní použijeme „triku“; pro účastníky MO je nesporně ziskem, když se s tímto „trikem“ seznámí. Budeme určovat, kolikrát se ve výsledných 64 členech vyskytne např. součin abc. Neváhejme sestavit tabulku, v níž bude zachyceno, z kterého z činitelů $(a + b + c + d)$ součinu (5) je vybráno a, z kterého b, z kterého c. Tabulka bude vypadat asi takto:

součin \ činitelé	a	b	c
abc	1	2	3
acb	1	3	2
bac	2	1	3
bca	3	1	2
cab	2	3	1
cba	3	2	1

(6)

Protože násobení je komutativní a asociativní, dostaneme součin abc s koeficientem 6. Sestavení tabulky (6) byla jednoduchá kombinatorická úvaha o permutacích šesti prvků.

Stejnou úvahu jako pro součin abc můžeme provést i pro součiny abd, acd, bcd; vlastně jde jen o záměnu písmen. V součinu (5) dostaneme po roznásobení mimo členy $6abc + 6abd + 6acd + 6bcd$ další *kladné* členy (a, b, c jsou čísla *kladná*); jejich součet označíme k. Je tedy

$$(a + b + c + d)^3 = 6(abc + abd + acd + bcd) + k\,,$$

tj. vzhledem k podmínce $a + b + c + d = 1$

$$6(abc + abd + acd + bcd) = 1 - k < 1$$

a odtud

$$abc + abd + acd + bcd < \tfrac{1}{6}\,.$$

Obdobně, ale jednodušeji se získá odhad $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 1$.

Pro uvedení do úlohy Z – I – 2 můžeme použít obdobných odhadů, např.

$\forall a, b, c \in \mathscr{R}_0^+$; $\quad a + b + c = 2 \Rightarrow ab + bc + ca < 2$,

$\forall a, b \in \mathscr{R}^+$; $\quad a + b = 1 \Rightarrow ab(a^2 + ab + b^2) < \frac{1}{4}$

apod. Přitom $\mathscr{R}^+, \mathscr{R}_0^+$ značí množinu všech kladných, nezáporných reálných čísel. Tyto úlohy lze pochopitelně formulovat ve stylu tradiční matematiky, např.: pro všechna nezáporná čísla a, b, c platí: je-li $a + b + c = 2$, pak je $ab + bc + ca < 2$.

Z – I – 3

Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny $AB = 4$, $BC = 3$. Opište mu čtverec $APQR$ tak, aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR.

a) Popište konstrukci.
b) Vypočtěte délku AP.

KOMENTÁŘ

Je to úloha opsat útvar $\mathscr{U}_1$ (čtverec $APQR$) danému útvaru $\mathscr{U}_2$ (pravoúhlému trojúhelníku ABC), která navazuje na přípravnou úlohu „vepsat pravidelný osmiúhelník danému čtverci". Úlohy „vepsat" a „opsat" jsou v *euklidovské* geometrii *ekvivalentní*: aplikujeme-li totiž vhodné podobné zobrazení, převedeme útvar $\mathscr{U}'_2$, vepsaný danému útvaru $\mathscr{U}'_1$, v daný útvar $\mathscr{U}_2$ a zároveň daný útvar $\mathscr{U}'_1$ v útvar $\mathscr{U}_1$ opsaný danému útvaru $\mathscr{U}_2$. Vysvětlíme tuto myšlenku při řešení úlohy Z – I – 3.

Budeme se zabývat úlohou: Vepište do čtverce $APQR$ (ponecháváme označení z úlohy Z–I–3) pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AC tak, aby poměr jeho odvěsen $BC : AB$ bylo dané číslo $k < 1$ a aby vrcholy B, C ležely po řadě na stranách PQ, QR.

První impuls: Pro sestrojení trojúhelníku i pro výpočet délek jeho stran postačí, budeme-li znát např. poměr $AP : BP$.

Druhý impuls: Pro určení tohoto poměru použijeme dvou podobných trojúhelníků (obr. 66)

$$\triangle APB \sim \triangle BQC . \tag{7}$$

Jejich podobnost je zaručena shodností jejich vnitřních úhlů. Protože je

$$BC = k \,.\, AB ,$$

je vzhledem k (7)

$$BQ = k \,.\, AP . \tag{8}$$

Dále je podle (8)

$$\frac{BP}{AP} = \frac{PQ - BQ}{PQ} = 1 - \frac{BQ}{PQ} = 1 - \frac{k \,.\, AP}{AP} = 1 - k ,$$

tj.

$$\frac{BP}{AP} = 1 - k . \tag{9}$$

Je-li např. $k = \frac{3}{4}$, je $BP = \frac{1}{4}AP$, odtud snadno sestrojíme bod B, pak i C a zkouškou – obrácením postupu – se přesvědčíme o tom, že sestrojený $\triangle ABC$ splňuje podmínky úlohy. Výpočet délek jeho stran z délky AP a z čísla k se provede použitím Pythagorovy věty.

Máme-li naopak opsat pravoúhlému trojúhelníku ABC čtverec $APQR$, jak žádá úloha Z—I—3, vepíšeme *libovolnému čtverci* $A'P'Q'R'$ pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$ tak, aby platilo $B'C' = A'B' = \frac{3}{4}$ a výsledný obrazec zvětšíme (zmenšíme) a přemístíme tak, abychom dostali řešení dané úlohy.

Výpočet délky strany $AP = x$ je jednoduchý; pomocí Pythagorovy věty pro $\triangle APB$ dostaneme

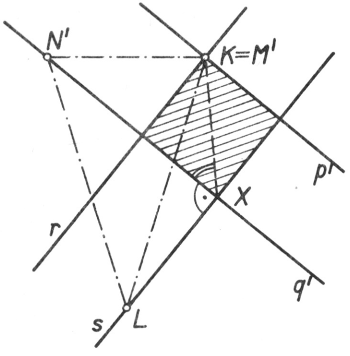
$$x^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = AB^2 .$$

Protože je $AB = 4$, vyjde $\frac{17}{16}x^2 = 16$, tj. $x = \frac{16}{\sqrt{17}} = \frac{16\sqrt{17}}{17}$, číselně $x \doteq 3{,}89$.

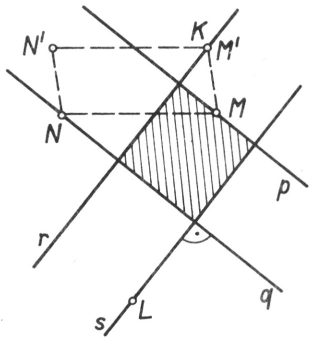
Kdybychom nechtěli použít podobného zobrazení, vyšli bychom z daného $\triangle ABC$; vypočetli bychom $BP = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \doteq \frac{4 \,.\, 4{,}13}{17} = \frac{16{,}52}{17} \doteq 0{,}97$ a bod P bychom sestrojili na Thaletově polokružnici nad průměrem AB tak, aby bylo $BP \doteq 0{,}97$.

Oddělení a) úlohy Z—I—3 je speciálním případem známé úlohy, kterou lze řešit pomocí věty Thaletovy. Úloha zní:

V rovině jsou dány čtyři různé body K, L, M, N. Máme jimi vést dvě dvojice rovnoběžek tak, aby tyto čtyři přímky omezily čtverec (obr. 64).

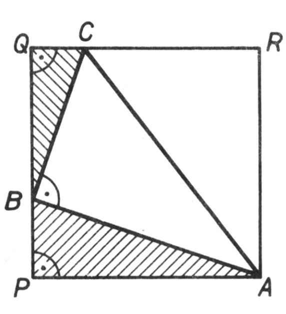


Obr. 64



Obr. 65

Nástin řešení: Rovnoběžné posunutí $(M \to K)$ převede body M, N po řadě v body $M' = K$, N', přímky p, q v přímky p', q', které spolu s přímkami r, s omezí čtverec s jedním vrcholem K. Z jeho protějšího vrcholu X (obr. 65) je vidět úsečku LN' pod úhlem $90°$, úsečku KN' pod úhlem $45°$. Odtud vychází konstrukce. Obdobného postupu lze použít i při řešení oddělení a) úlohy Z – I – 3. Neznámý vrchol Q obr. 66) sestrojíme pomocí podmínek $\sphericalangle BQC = 90°$,



Obr. 66

$\sphericalangle BQA = 45°$. Obtížnější a méně přehledná je tu zkouška i konstrukce než při dříve uvedeném řešení.

Z – I – 4

Je daný obdĺžnik $ABCD$, pre ktorý platí $AB = 2BC$. Určte geometrické miesto takých bodov X obdĺžnika $ABCD$, že pre obsahy trojuholníkov platí

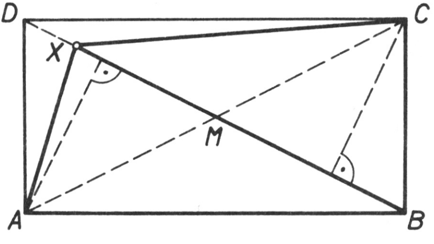
$$\triangle ABX = \triangle BCX < \triangle ADX .$$

KOMENTÁR

Predpoklad $AB = 2BC$ nedáva podstatné zjednodušenie a preto ho pri riešení vynecháme.

Situáciu chápeme množinove: ak označíme $\mathscr{M}_1$ množinu všetkých bodov X obdĺžnika (pravouholníka) $ABCD$, pre ktoré je $\triangle ABX = \triangle BCX$ a $\mathscr{M}_2$ množinu všetkých bodov X obdĺžnika $ABCD$, pre ktoré je $\triangle BCX < \triangle ADX$, potom hľadané „geometrické miesto bodov“ je prienik $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$.

Pri skúmaní obsahov trojuholníkov samozrejme vychádzame zo známej formule o polovičnom súčine strany a k nej príslušnej výšky. Tak zistíme, že nielen priesečík M uhlopriečok obdĺžnika $ABCD$, ale aj každý bod X uhlopriečky BD s výnimkou bodu B patria k množine $\mathscr{M}_1$. Pretože trojuholníky ABX, BCX majú spoločnú stranu BX a vzdialenosti vrcholov A, C od priamky BD sú rovnaké (obr. 67). Zostáva dokázať, že žiadny bod Y obdĺžnika $ABCD$ ležiaci mimo priamky BD k množine $\mathscr{M}_1$ nepatrí. Tu pripomíname



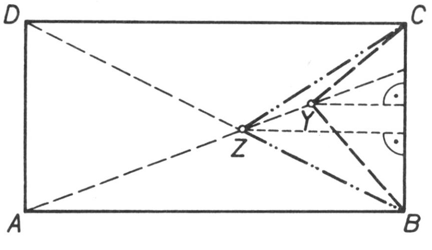
Obr. 67

dve možnosti ako sa dá dokázať rovnosť množín $\mathscr{M}_1$ a $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{u}$ je uhlopriečka BD bez bodu B). Nech už to urobíme s množinovým aparátom alebo bez neho, dokazujeme vlastne dve inklúzie

$$\boldsymbol{u} \subset \mathscr{M}_1 \quad \text{a} \quad \mathscr{M}_1 \subset \boldsymbol{u}\,.$$

Prvú inklúziu sme už dokázali, miesto druhej dokazujeme tvrdenie s ňou ekvivalentné: $(ABCD \setminus \boldsymbol{u}) \cap \mathscr{M}_1 = \emptyset$. Žiadný bod obdĺžnika $ABCD$ ležiaci mimo $\boldsymbol{u}$ nepatrí k množine $\mathscr{M}_1$.

Nech je $Y \in (ABCD \setminus \boldsymbol{u})$. Ak leží bod Y napríklad vo vnútrajšku polroviny BDC (obr. 68), zostrojíme priesečík Z úsečky BD a úsečky AY a uvážime, že priamky AX, BC



Obr. 68

sa pretínajú v polrovine ABC, preto má bod Y menšiu vzdialenosť od priamky BC než bod Z. Teda je

$$\triangle BCZ > \triangle BCY$$

a ďalej z tejto nerovnosti

$$\triangle ABY = \triangle ABZ + \triangle BYZ > \triangle ABZ = \triangle BCZ > \triangle BCY.$$

Teda je $Y \notin \mathscr{M}_1$.

Ináč je možno určiť množinu $\mathscr{M}_1$ takto: ak označíme v_a, v_c vzdialenosti bodu $X \in \mathscr{M}_1$ od priamok AB, BC, potom platí $\frac{1}{2}AB \,.\, v_a = \frac{1}{2}BC \,.\, v_c$, t. j.

$$\frac{v_a}{v_c} = \frac{BC}{AB}.$$

Množina všetkých bodov roviny ABC, ktorých vzdialenosti od priamok AB, BC sú v pomere $BC : AB$, je priamka BD bez bodu B. Teda je $\mathscr{M}_1 = ABCD \cap$ (priamka $BD \setminus \{B\}$).

Množinu $\mathscr{M}_2$ môže určiť čitateľ samostatne; je vidieť, že to je množina všetkých bodov obdĺžnika $ABCD$, ktoré ležia vo vnútrajšku polroviny oB, kde o označuje spoločnú os úsečiek AB, CD.

Prienik $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$ je tedy vnútrajšok úsečky BM (M je priesečík uhlopriečok AC, BD).