22. ročník matematické olympiády

VI. Správa o XV. medzinárodnej matematickej olympiáde

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 22. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1972-1973. 15. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974. pp. 185–210.

VI. Správa o XV. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

Pri odchode z Varšavy po skončení *XIV. MMO* určite ani jeden z jej účastníkov netušil, že o rok povedú cesty matematických nádejí do hlavného mesta *ZSSR — Moskvy*, ktorá bola dejiskom *MMO* už v rokoch 1964 a 1968. Sovietski súdruhovia sa totiž podujali na neľahkú úlohu usporiadania *XV. MMO* až na sklonku roku 1972, keď sa ukázalo, že ani jedna z krajín prichádzajúcich do úvahy organizáciu *MMO* pre rok 1973 nepripravuje. O to viac prekvapuje, že *XV. MMO*, ktorá sa konala 5.—16. 7. 1973 sa zúčastnil rekordný počet družstiev — 16: *Rakúsko* (A), *Bulharsko* (BG), *Kuba* (C), *ČSSR* (CS), *NDR* (D), *Francúzsko* (F), *Veľká Británia* (GB), *Maďarsko* (H), *Mongolsko* (M), *Holandsko* (NL), *Poľsko* (PL), *Rumunsko* (R), *Švédsko* (S), *Fínsko* (SF), *ZSSR* (SU) a *Juhoslávia* (YU). S výnimkou Kuby, ktorú reprezentovalo 5 žiakov, boli všetky družstvá osemčlenné.

Ministerstvo školstva ZSSR poverilo organizovaním súťaže *Akadémiu pedagogických vied ZSSR*, ktorej viceprezident *prof. A. I. Markuševič* bol predsedom organizačného výboru olympiády a jej vedecký pracovník *prof. I. Ja. Verčenko* bol predsedom *medzinárodnej jury*, ktorá riadila *XV. MMO*. Jeho zástupcom a pravou rukou bol *I. S. Petrakov*, inšpektor — metodik ministerstva školstva ZSSR, ktorý nechýbal na žiadnej z *MMO* od r. 1962.

Vedúci delegácií, ktorí tvorili medzinárodnú jury, sa schádzali do Moskvy vo štvrtok 5. 7. Svoju prácu začali v piatok 6. 7. v 68. špeciálnej strednej škole *na Slavianskom bulvári* v moskovskej štvrti *Kuncevo*. Táto škola bola nielen miestom práce jury, ale aj dejiskom vlastnej súťaže. Na prvom zasadnutí jury sa vedúci delegácií po stručnom zoznámení sa s *programom XV. MMO* dozvedeli texty 14 úloh, ktoré príslušná komisia organizačného výboru vybrala z návrhov došlých z 11 krajín. Štyri z týchto úloh boli v diskusii zamietnuté s tým, že niektorí delegáti poznali úlohy s blízkym námetom, ktoré boli publikované. Zostávajúcich 10 úloh mali si členovia jury možnosť premyslieť do nasledujúceho dňa. Na rozdiel od predchádzajúcich rokov nemali pritom k dispozícii autorské riešenia úloh, čo im umožňovalo naplno využiť vlastný dôvtip a tvorivosť. K diskusii o úlohách využili aj malú popoludňajšiu autobusovú exkurziu *po Moskve*.

Na svojom sobotnajšom zasadnutí jury pomerne rýchle vybrala 5 úloh pre súťaž. Ťažkosti nastali až pri výbere šiestej úlohy. Rozsiahlu diskusiu o tomto probléme nedokázalo urýchliť ani silné hromobitie a prietrž mračien, ktorá zúrila nad Moskvou počas popoludňajšieho zasadnutia jury. Keď nezískala potrebnú väčšinu (aspoň 10 hlasov) ani bulharská ani francúzska úloha na geometrické miesto bodov v priestore, prešiel napokon návrh poľského delegáta na preformulovanie poľskej úlohy o grupe afinných transformácií priamky, ktorá sa v pôvodnom výbere 14 úloh nevyskytovala práve preto, že používala pojem grupy, ktorý sa do obsahu školskej matematiky väčšiny zúčastnených krajín zatiaľ nedostal. Tým sa stalo, že v tématike úloh *XV. MMO* chýbala stereometrie a keďže sa nenaskytla ani vhodná úloha zo školskej teórie čísel, ktorá snáď na žiadnej z doterajších MMO n chýbala, zrodil sa tento netradičný výber:

a

1. Bod O leží na priamke l, $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ sú jednotkové vektory také, že body ~~P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$~~, ležia všetky v rovine obsahujúcej priamku l a nachádzajú sa všetky po tej istej strane tejto priamky. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ všechny jsou

Dokážte, že ak n je nepárne, potom

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}| \geqq 1 ,$$

viz papírek

kde $|\overrightarrow{OM}|$ znamená dĺžku vektora $\overrightarrow{OM}$. (*ČSSR*, 6 bodov)

-li

2. Rozhodnite, či existuje v trojrozmernom priestore konečná množina **M** ~~pozostávajúca z~~ bodov neležiacich v jednej rovine, ktorá má nasledujúcu vlastnosť:

Ku každým dvom bodom A, $B \in$ **M** existujú body C, $D \in$ **M** tak, že priamky AB a CD sú rovnobežné a nesplývajú. (~~*Poľsko*, 6 bodov~~)

jsou-li

3. Nájdite minimálnu hodnotu súčtu $a^2 + b^2$, ak a, b sú reálne čísla, pre ktoré má rovnica

nichž

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

aspoň jeden reálny koreň. (*Švédsko*, ~~8 bodov~~)

li se

4. Ženista má preverit, či sa vyskytujú míny na pozemku, ~~ktorý má~~ tvar rovnostranného trojúholníka (vrátane jeho hranice). K dispozícii má detektor, polomer účinnosti ktorého sa rovná polovičnej výške trojuholníka. Na prieskum vychádza z niektorého vrcholu trojuholníka. Akú cestu si má zvoliť, aby prešiel najmenšiu možnú vzdialenosť a preskúmal pritom celý pozemok? prošel prozk.

(*Juhoslávia*, ~~6 bodov~~)

u jehož

5. Neprázdna množina **G** nekonštantných funkcií f reálnej premennej x tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a \neq 0$, b sú reálne čísla, má nasledujúce vlastnosti:

je-li

a) ak $f, g \in \mathbf{G}$, potom $g \circ f \in \mathbf{G}$, kde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;

b) ak $f \in \mathbf{G}$, kde $f(x) = ax + b$, potom tiež inverzná funkcia $f^{-1} \in \mathbf{G}$, kde $f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}$;

c) ku každej funkcii $f \in \mathbf{G}$ existuje x_f tak, že $f(x_f) = x_f$.

Dokážte, že existuje k také, že $f(k) = k$ pre všetky $f \in \mathbf{G}$. (*Poľsko*, 6 bodov)

6. Je daných n kladných reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a reálne číslo ~~q také, že~~ $0 < q < 1$.

Nájdite n reálnych čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ s týmito vlastnosťami:

a) $a_k < b_k$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $q < \dfrac{b_{k+1}}{b_k} < \dfrac{1}{q}$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n - 1$;

c) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \dfrac{1 + q}{1 - q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

(*Švédsko*, 8 bodov)

V zátvorke za textom úlohy je uvedená krajina, ktorá ju navrhla a počet bodov, ktorým jury rozhodla hodnotiť jej úplné riešenie. Tu uvedená formulácia úloh je presným prekladom oficiálnej formulácie v ruskom a anglickom jazyku. Formulovanie textov úloh je už tradične jednou z časove najnáročnejších povinností jury. I tentoraz si — aj napriek tomu, že sa oficiálna formulácia textov schvaľovala len v spomínaných dvoch jazykoch — vyžiadala celé nedeľné predpoludnie (8.7.). Keďže ešte v nedeľu do večera bolo treba rozmnožiť texty úloh v potrebnom počte exemplárov v jazykoch jednotlivých krajín a na túto prácu boli vedúci delegácií tentoraz sami, neuskutočnila sa ani plánovaná návšteva Kremľa.

Jednotlivé družstvá na čele *s pedagogickými vedúcimi* prichádzali *do Moskvy* v sobotu 7. 7. Ubytovaní boli v hoteli *Universitetskaja*, pričom na rozdiel od posledných troch *MMO* boli pedagogickí vedúci ubytovaní spolu s družstvami, kým vedúci delegácií bývali v hoteli *Ukrajina* na kutuzovskom prospekte.

V nedeľu predpoludním sa žiaci a pedagogickí vedúci zúčastnili na autobusovej exkurzii po Moskve a popoludní oddychovali.

Slavnostné otvorenie súťaže sa konalo *v pondelok 9. 7.* o 09,30 hod. v aule 68. špeciálnej strednej školy. Po krátkom neformálnom prejave *predsedu XV. MMO prof. A. I. Markuševiča* sa žiaci rozišli do 8 tried, aby riešili *prvé tri úlohy* počas štyroch hodín čistého času. Ako je to na *MMO* obvyklé, nedozvedeli sa bodové hodnotenie za úplné riešenie jednotlivých úloh a na rozdiel od *XIV. MMO* mali možnosť po prečítaní textov vyjsť na chodbu a požiadať vedúcich delegácií, ktorí tam čakali, o vysvetlenie prípadných nejasností v texte.

Po otvorení súťaže sa uskutočnilo prvé spoločné zasadnutie jury so sovietskymi koordinátormi, na ktorom sa predbežne prediskutovali riešenia prvých troch úloh a ich hodnotenia. Na tomto zasadnutí sa zúčastnili tiež pedagogickí vedúci jednotlivých družstiev, ktorí potom spolupracovali s vedúcimi delegácií pri hodnotení žiackych riešení. Tým došlo k porušeniu tradície posledných rokov i pokiaľ ide o izoláciu vedúcich delegácií od tých, ktorí prichádzali do styku so žiakmi, až do druhého dňa súťaže.

S hodnotením riešení prvých troch úloh sa začalo hneď v pondelok popoludní, zatiaľ čo žiaci absolvovali výlet loďou po rieke Moskve.

Druhú trojicu úloh riešili žiaci *v utorok 10. 7.* a k dispozícii mali opäť štyri hodiny čistého času s možnosťou dostať vysvetlenie k prípadným nejasnostiam v texte krátko po obdržaní textov. Po otvorení druhého dňa súťaže sa opäť konala diskusia členov jury a pedagogických vedúcich s koordinátormi o riešeniach druhej trojice úloh a po nej pokračovalo hodnotenie riešení a koordinácia hodnotení. Tejto práci boli venované i nasledujúce dva dni (11. a 12. 7.). Trojčlenné skupiny koordinátorov pre jednotlivé úlohy viedli: 1 — *Andrej Leontovič*, 2 — *Andrej Toom*, 3 — *Viktor Gutenmacher*, 4 — *Andrej Jegorov*, 5 — *Leonid Mitjušin*, 6 — *Georgij Dorofejev*. Vedúcim celej skupiny koordinátorov bol *Nikolaj Vasiľjev* a niekoľkí z koordinátorov boli bývalí účastníci *MMO*. Svojej úlohy sa zhostili veľmi úspešne a nedošlo prakticky k žiadnym väčším nedorozumeniam medzi nimi a vedúcimi delegácií.

Záverečné zasadnutie jury sa konalo v piatok 13. 7. predpoludním. Po schválení bodových hodnotení jednotlivých účastníkov rozhodlo o stanovení hraníc pre jednotlivé ceny takto: *I. cena* 40 — 35 bodov, *II. cena*: 33 — 27 bodov (34 bodov nezískal nikto), *III. cena*: 26 — 17 bodov. Pri stanovení hranice pre tretie ceny zohrala vážnu úlohu skutočnosť, že najlepší kubánsky účastník získal 17 bodov. Celkom bolo udelených 5 prvých, 15 druhých a 48 tretích cien, tj. spolu 68 cien, čo je cca o 6 viac ako polovica z celkového počtu účastníkov *XV. MMO*, ktorých bolo 125. V ďalšej časti zasadnutia sa diskutovalo o jednotlivých úlohách z hľadiska udelenia špeciálnych cien autorom originálnych a zvlášť elegantných riešení. V tomto smere bola jury tohto roku skúpa, pretože z niekoľkých návrhov na špeciálne ceny predložených vedúcimi delegácií, resp. koordinátormi, ani jeden neprešiel.

Na záver zasadnutia sa prihlásil o slovo vedúci delegácie *NDR prof. dr. Helmut Bausch*, ktorý pozval všetky zúčastnené krajiny na *XVI. MMO*, ktorú hodlá usporiadať *NDR v Erfurte* od 4. do 17.7. 1974, pričom záverečný ceremoniál sa bude konať *v Berlíne*. Všetkým delegáciám rozdal *návrh štatútu XVI. MMO* a rámcový program súťaže. Jeho pozvanie sa stretlo so súhlasom všetkých členov jury.

V piatok 13. 7. vo večerných hodinách prijal vedúcich delegácií vo svojej pracovni viceprezident Akadémie pedagogických vied ZSSR a predseda organizačného výboru *XV. MMO Alexej Ivanovič Markuševič*. V srdečnej besede sa hovorilo o výsledkoch *XV. MMO* i o niektorých otázkach organizácie budúcich *MMO*. Vedúci francúzskej delegácie predložil návrh, aby sa stanovili tieto zásady: a) žiaden žiak sa nemôže zúčastniť *MMO* viac než dvakrát, b) ten žiak, ktorý na *MMO* získa I. cenu, sa viacej nemôže na *MMO* zúčastniť, c) na *MMO* sa nepovoľuje účasť žiakov starších ako 19 rokov. Stanoviská vedúcich delegácií k týmto návrhom sa značne rozchádzali a ako z besedy vyplynulo, pri prípadnom hlasovaní by bol získal väčšinu iba tretí návrh. Pred svojím odchodom obdržali vedúci delegácií od zástupcu hlavného redaktora sovietskeho populárno-vedeckého časopisu „*Kvant*“ *M. L. Smoljanského* kolekciu čísel tohto časopisu s venovaním členov red. rady *prof. Kolmogorova* a *prof. Markuševiča*.

Kým vedúci delegácií so svojimi zástupcami (ped. vedúcimi družstiev) hodnotili riešenia a koordinovali hodnotenia, mali žiaci možnosť návštevy *múzea A. S. Puškina* s bohatou kolekciou obrazov a iných umeleckých diel (10. 7. popoludní), navštívili dedinu *Archangeľskoje* (11.7.), boli v *mauzoleu V. I. Lenina* (12.7.) a prehliadli si *Výstavu úspechov národného hospodárstva ZSSR* ako aj nádvoria a paláca *Kremľa* (13. 7.).

V sobotu 14. 7. bola spoločná exkurzia všetkých účastníkov *XV. MMO* do *Zagorska*. (Pravoslávna cirkevná architektúra, historický kláštor Troicko-sergijský.)

Slávnostné zakončenie olympiády sa uskutočnilo v nedeľu 15. 7. o 11.00 hod. vo veľkej sále *Paláca pionierov*. Okrem súťažiacich žiakov, členov jury a členov organizačného výboru *XV. MMO* sa na ňom zúčastnila tiež *sekretárka* moskovského výboru *Komsomolu* a niekoľko ďalších hostí. Záverečný ceremoniál riadil *predseda* organizačného výboru *XV. MMO prof. A. I. Markuševič*, ktorý v úvode predniesol krátky neformálny prejav. Po ňom prehovoril zástupca hlavného redaktora časopisu „*Kvant*" pre matematiku *M. L. Smoljanskij*, ktorý vyzval prítomných študentov k spolupráci s týmto populárno-vedeckým časopisom. Za zahraničných účastníkov *XV. MMO* prehovoril vedúci delegácie NDR *prof. dr. H. Bausch*, ktorý poďakoval sovietskym hostiteľom za veľmi dobrú organizáciu i napriek krátkemu času, ktorý mali na prípravu, pripomenul blížiaci sa X. svetový festival mládeže a študenstva v Berlíne a na záver opätovne pozval všetky zúčastnené delegácie na *XVI. MMO* do NDR. Ako posledný sa ujal slova predseda jury *prof. Ivan Jakovlevič Verčenko*, ktorý blahoželal účastníkom olympiády k dosiahnutým výsledkom a spolu s *akad. A. I. Markuševičom* a podpredsedom jury *I. S. Petrakovom* odovzdal najlepším 68 účastníkom *XV. MMO* diplomy a knižné odmeny. Ostatným žiakom odovzdali potom účastnícke diplomy a knižné darčeky od organizátorov vedúci jednotlivých delegácií.

V nedeľu večer o 19,00 hod. sa konala v reštaurácii hotela *Universitetskaja* záverečná spoločná večera, počas ktorej vládlo v sále srdečné a radostné ovzdušie. Prípitky predniesla za hostiteľov členka organizačného výboru *XV. MMO s. Maslovova* a v mene zahraničných účastníkov poďakoval členom organizačného výboru za vydarenú organizáciu olympiády, ktorej sa zúčastnil rekordný počet krajín, vedúci švédskej delegácie *prof. dr. Ake Samuelson*.

Už pred zahájením večere opustili však dejisko *XV. MMO* delegácie *Juhoslávie* a *Mongolska* a v priebehu pondelka 16. 7. sa rozchádzali do svojich domovov i ostatné zahraničné delegácie. Desaťčlennú výpravu ČSSR odvážalo lietadlo ČSA zo šeremetevského letiska do Prahy v pondelok o 14,15 hod.

Ako to neraz konštatovali zúčastnení delegáti, mala moskovská olympiáda predovšetkým pracovný charakter. I napriek kratšej dobe, ktorú mali organizátori k dispozícii, bola po odbornej stránke pripravená dobre. Spoločenskej stránke bola tentoraz venovaná menšia pozornosť než pred rokom v Poľsku, či pred dvoma v ČSSR. Je to pochopiteľné, ak si uvedomíme, že v oboch zmienených prípadoch sa *MMO* konala mimo hlavného mesta, zatiaľ čo vo viac než šesťmiliónovej Moskve bola jedným z mnohých medzinárodných podujatí, ktorým svojím významom ani publicitou nemohla konkurovať. Za všetky stačí spomenúť aspoň dve: súčasne prebiehajúci VIII. moskovský filmový festival a pripravovanú VII. letnú univerziádu.

2. VÝSLEDKY SÚŤAŽE A NIEKOĽKO SLOV K NIM

Pri výbere úloh nemáva obvykle jury *MMO* šťastnú ruku. Výnimkou sa, žiaľ, nestala ani *XV. MMO*. Za veľmi vhodné vo vyššie uvedenom výbere súťažných úloh možno označiť prvú, štvrtú a snáď i tretiu a po dlhých diskusiách zaradenú značne preformulovanú piatu úlohu. Medzi ne sa však vlúdili pre žiakov značne nezvyklá druhá a šiesta úloha vyžadujúce konštrukciu príkladu. Hlavne pri šiestej úlohe išlo o konštrukciu z hľadiska stredoškolákov umelú a prevažná väčšina účastníkov sa s ňou nedokázala vyporiadať. Výberu úloh nepomohlo teda ani to, že členovia jury sa nemohli spoliehať na riešenia autorské, ale hľadali vlastné. Na ich ospravedlnenie nech slúži to, že nemali prakticky z čoho vyberať.

Ako sa s jednotlivými úlohami vyporiadali súťažiaci, ukazuje *tabuľka*, ktorá udáva, koľko z nich dosiahlo príslušný počet bodov za riešenie jednotlivých úloh:

Počet bodov	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4	Úloha č. 5	Úloha č. 6
8	—	—	42	—	—	10
7	—	—	4	—	—	2
6	37	48	8	38	62	2
5	6	6	4	22	3	3
4	3	4	4	20	2	3
3	5	0	6	14	1	1
2	14	0	9	9	2	2
1	15	2	15	8	17	1
0	45	65	33	14	38	101

Nasledujúca tabuľka nám ukáže, aký bodový zisk zaznamenali za riešenia jednotlivých úloh zúčastnené družstvá. V jej poslednom stĺpci je uvedené *neoficiálne poradie družstiev* podľa súčtu získaných bodov.

Krajina	Súčet bodov, ktoré družstvo získalo za:						Súčet bodov	Neofic. poradie
	úl. č. 1	úl. č. 2	úl. č. 3	úl. č. 4	úl. č. 5	úl. č. 6		
A — Rakúsko	15	23	48	43	15	0	144	8.
BG — Bulharsko	16	6	30	19	25	0	96	12.—13.
C — Kuba	9	6	3	11	13	0	42	16.
CS — ČSSR	16	11	57	31	27	7	149	7.
D — NDR	39	18	31	46	40	14	188	3.
F — Francúzsko	18	13	36	28	42	16	153	6.
GB — Veľ. Británia	17	30	38	30	24	25	164	5.
H — Maďarsko	34	31	50	44	45	11	215	2.
M — Mongolsko	10	21	12	12	10	0	65	15.
NL — Holandsko	9	33	2	27	17	8	96	12.—13.
PL — Poľsko	35	36	16	37	42	8	174	4.
R — Rumunsko	30	18	43	29	13	8	141	9.
S — Švédsko	14	12	14	28	21	10	99	11.
SF — Fínsko	5	31	16	17	17	0	86	14.
SU — ZSSR	35	41	53	47	48	30	254	1.
YU — Juhoslávia	20	6	50	37	20	4	137	10.

K ešte lepšiemu posúdeniu výsledkov dosiahnutých jednotlivými družstvami určite poslúži *tabuľka rozdelenia jednotlivých cien*:

Cena	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SF	SU	YU	Spolu
I.	–	–	–	–	–	–	1	1	–	–	–	–	–	–	3	–	5
II.	–	–	–	1	3	3	–	2	–	–	2	1	1	–	2	–	15
III.	6	1	1	4	4	1	5	5	1	2	4	3	1	2	3	5	48
Spolu	6	1	1	5	7	4	6	8	1	2	6	4	2	2	8	5	68

O prvé tri miesta sa teda opäť podelili, tak ako na predchádzajúcich siedmich *MMO*, družstvá *ZSSR*, *Maďarska* a *NDR*. Bodový rozdiel medzi *ZSSR* a *Maďarskom* sa však v porovnaní s minulým rokom značne zvýšil, čím sovietske družstvo suverénnym spôsobom obhájilo svoje vlaňajšie prvenstvo. Jeho suverenitu potvrdzujú nielen tri prvé ceny z piatich získané sovietskymi žiakmi, ale aj výsledky v jednotlivých úlohách, keď ho iba o málo predstihlo v prvej úlohe družstvo *NDR* a v tretej úlohe družstvo *ČSSR*. Družstvá *Veľkej Británie* a *Poľska* potvrdili svoj štandard z posledných rokov. Za veľmi príjemné prekvapenie možno označiť družstvo *Francúzska*, ktoré po ročnej prestávke vyslalo na *MMO* výber z *víťazov Concours générale*. Mierne sa zlepšilo naše družstvo, čím sa mu podarilo zaujať popredné miesto medzi už tradične vyrovnanými družstvami stredu. Menej príjemne prekvapilo *Rumunsko*, ktoré dosiahlo snáď svoj najhorší výsledok v celej histórii *MMO*. Družstvo *Fínska* po debute na VII. *MMO* sa zúčastnilo súťaže po druhý raz a hneď pomerne úspešne. Za úspech možno považovať aj výsledok nekompletného družstva *Kuby*, ktorého

Krajina	Vedúci delegácie	Pedagogický vedúci
A – Rakúsko	prof. Thomas Mühlgassner	prof. Wolfgang Ratzinger
BG – Bulharsko	prof. Ivan Prodanov	Dimo Serafimov Angelov
C – Kuba	prof. Luis Davidson	F. Recio
CS – ČSSR	RNDr. Jozef Moravčík, CSc.	Jiří Mída
D – NDR	prof. dr. Helmut Bausch	prof. dr. Gustav Burosch
F – Francúzsko	prof. dr. G. Glaeser	prof. dr. Deschamps
GB – Veľká Brit.	prof. Frank Budden	
H – Maďarsko	prof. Endre Hódi	dr. József Pelikán
M – Mongolsko	prof. U. Sanžimjatav	G. Dagva
NL – Holandsko	prof. Ary van Tooren	J. van der Graats
PL – Poľsko	Mgr. Andrzej Mąkowski	dr. Maciej Bryński
R – Rumunsko	dr. Ioan Cuculescu	prof. Constantin Ottescu
S – Švédsko	prof. dr. Ake H. Samuelsson	Stig Westlund
SF – Fínsko	Jarkko Leino	Jarmo Nyström
SU – ZSSR	doc. Valentin A. Skvorcov	Lilija Paškova
YU – Juhoslávia	dr. Vladimír Mićić	Djordje Dugošija

priemerný výsledok na žiaka (8,4 b.) je lepší než priemerný výsledok mongolského družstva (8,125 b.). Tretia cena, ktorú získal najlepší kubánsky žiak, bude určite povzbudením pre ďalších reprezentantov prvého socialistického štátu na americkom kontinente.

V zložení vedúcich delegácií došlo v porovnaní s predchádzajúcim rokom len k niekoľkým zmenám. Skúsenosti z práce jury a dobré vzájomné poznanie väčšiny členov jury prispeli k jej úspešnej práci i k tomu, že sa v jej rokovaní nevyskytli žiadne rušivé momenty.

3. K ČESKOSLOVENSKEJ ÚČASTI NA XV. MMO

Družstvo ČSSR pre *XV. MMO* vybralo predsedníctvo *ÚVMO* ma záver sústredenia, ktoré sa konalo 25.—30. 6. 1973 *v Prahe-Malešiciach.* Vychádzalo pritom z výsledkov, ktoré dosiahli jednotliví žiaci v III. kole a v II. kole XXII. ročníka *MO*, v priebehu sústredenia a pri svojej prípadnej predchádzajúcej účasti na *MMO*. *Zoznam členov družstva* spolu s dosiahnutými výsledkami viz tabuľka (str. 199).

Výsledky, ktoré družstvo dosiahlo — ako už bolo vyššie spomenuté — sú relatívne dobré. Od *X. MMO*, ktorá bola zhodou okolností taktiež v Moskve, nezískal žiaden čs. účastník na *MMO* lepšiu ako 3. cenu. Vo svetle tohto faktu je tedy *Ferstova druhá cena* nesporným úspechom. Na druhej strane si však treba uvedomiť, že traja členovia družstva (*Horák*, *Kmošek*, *Vrťo*) sa zúčastnili na *MMO* už tretí raz a pre ďalších troch (*Ferst*, *Slačálek*, *Šimša*) bola moskovská olympiáda ich druhou *MMO*. Až na *Fersta* (ktorý bol mimochodom vlani *v Toruni* najhorší z našich a získal len 5 bodov) a *Kmoška* sa skúsení repre-

Por. č.	Meno žiaka	Škola a trieda	Počet bodov za rieš. ul.						Spolu bodov	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1.	Ferst Pavel	3d, gymn. Praha 3, Sladkovského nám.	1	6	8	1	6	7	29	II.
2.	Horák Karel	4b, gymn. Strakonice	0	0	6	4	1	0	11	
3.	Chrz Tomáš	4f, gymn. Praha 2, ul. W. Piecka	3	5	8	4	1	0	21	III.
4.	Kindlmann Pavel	3a, gymn. České Budějovice	2	0	7	6	6	0	21	III.
5.	Kmošek Miroslav	4a, gymn. Brno, tř. kpt. Jaroše	6	0	8	3	6	0	23	III.
6.	Slačálek Petr	3f, gymn. Praha 2 ul. W. Piecka	2	0	4	5	1	0	12	
7.	Šimša Jaromír	3b, gymn. Ostrava, Šmeralova 1	0	0	8	4	6	0	18	III.
8.	Vrťo Imrich	4. tr. gymn. Rimav. Sobota	2	0	8	4	0	0	14	
	Družstvo celkom		16	11	57	31	27	7	149	

zentanti nepresadili. Príjemným prekvapením je výsledok oboch nováčkov družstva, ktorí získali svorne po 21 bodov a tretiu cenu. Najlepšie si naši žiaci poradili s *treťou* úlohou, kde viedlo k cieľu rutinné riešenie rovníc a nerovností. Pomerne dobrý je výsledok v *štvrtej* úlohe, kde však viedli k zbytočným bodovým stratám nedôslednosti pri dôkaze minimálnosti cesty, resp. pokrytia. S trochu nezvyklou piatou úlohou si poradili len štyria, ale ešte horší je výsledok v *prvej* úlohe — československej. Tu sa ukázala pre našich žiakov handicapom znalosť komplexných čísel. Niekoľkí totiž upravili dokazovanú nerovnosť na ekvivalentnú nerovnosť pre súčet kosínov, s ktorou si už nevedeli rady. Nevyhovujúci výsledok v *šiestej* úlohe neprekvapuje, ale zaráža to, že pri *druhej* úlohe sa až štyria z našich snažili dokázať sporom neexistenciu množiny požadovaných vlastností, pričom traja boli dokonca presvedčení, že sa im to podarilo. V riešeniach našich žiakov sa až príliš často objavujú nepresnosti vo vyjadrovaní, rôzne okrídlené formulácie (ľahko sa dokáže; z obrázku je zrejmé; apod.), nedôslednosť a nedostatok vytrvalosti. Na odstránenie týchto neduhov sa bude treba zamerať pri práci s matematickými talentami, ak chceme, aby toho v budúcnosti dokázali viac — a nielen na *MMO*.

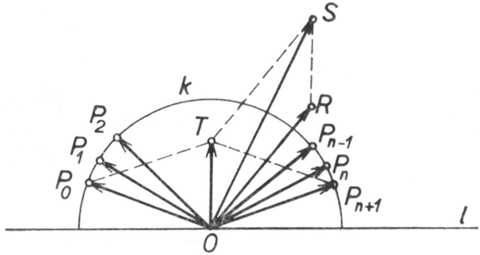
Za úspech *ČSSR* možno považovať aj to, že do širšieho výberu 14 úloh prípravná komisia zaradila dokonca *dve československé úlohy*, z ktorých veľmi pekná úloha *prof. Fiedlera* bola nakoniec prijatá. K úspechu práce jury prispela československá delegácia viacerými konštruktívnymi návrhmi a neocitla sa ani raz v konfliktnej situácii, akých bolo na *XV. MMO* celkove veľmi málo.

Po spoločenskej stránke reprezentovalo družstvo *ČSSR* veľmi dobre. Tvorilo jednoliaty kolektív so zmyslom pre poriadok a disciplinovanosť. Všetci jeho členovia si odnášali z hlavného mesta ZSSR tie najlepšie dojmy.

RIEŠENIE 1. ÚLOHY

Nech n je nepárne číslo. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ zrejme platí $|\overrightarrow{OP_1}| = 1$.

Nech pre nejaké n platí $|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}| \geqq \geqq 1$. Uvažujme o $n + 2$ jednotkových vektoroch $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$, $\overrightarrow{OP_{n+1}}$, ktorých koncové body P_i, $i = 0, 1, \ldots, n + 1$, ležia v uvedenom poradí zľava doprava na polkružnici k so stredom v bode O a polomerom 1 (pozri obr. 71). Nech $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}$.



Obr. 71

Vektor $\overrightarrow{OR}$ leží zrejme vo vnútri uhla $\sphericalangle P_1OP_n$ a podľa predpokladu platí $|\overrightarrow{OR}| \geqq 1$. Označme $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_{n+1}}$. Potom $\overrightarrow{OS} = \sum_{i=0}^{n+1} \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OT}$. Nech $\alpha = \sphericalangle TOR$. Zrejme platí $0 \leqq \alpha \leqq \sphericalangle TOP_{n+1} =$

$= \frac{1}{2} \sphericalangle P_0 O P_{n+1} < \frac{\pi}{2}$. Ak $\alpha = 0$, potom $|\overrightarrow{OS}| = |\overrightarrow{OR}| + |\overrightarrow{OT}| \geqq 1$. Ak $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, je $|\overrightarrow{OS}| > |\overrightarrow{OR}| \geqq 1$, pretože uhlopriečka rovnobežníka vychádzajúca z vrchola, pri ktorom je ostrý uhol, je dlhšia ako ľubovoľná z jeho strán.

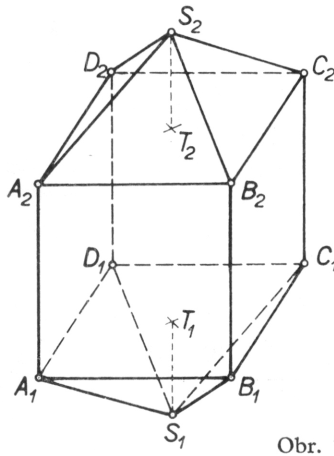
Tým je tvrdenie dokázané.

RIEŠENIE 2. ÚLOHY

Odpoveď na položenú otázku je pozitívna, ako ukazuje nasledujúca konštrukcia: Nech $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ je jednotková kocka. Označme T_i stred steny $A_iB_iC_iD_i$, $i = 1, 2$, a na priamke T_1T_2 zvoľme body S_1, S_2 (pozri obr. 72) tak, aby platilo $T_1S_1 = T_2S_2 = \frac{1}{2}$. Potom množina

$$\mathbf{M} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, S_1, A_2, B_2, C_2, D_2, S_2\}$$

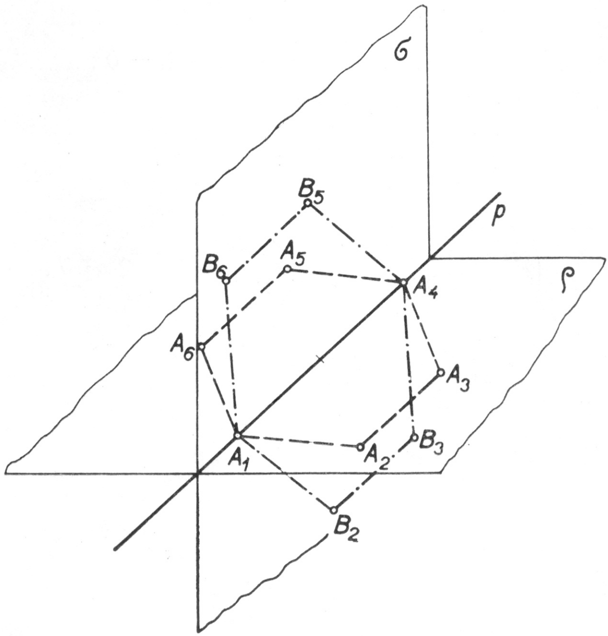
má požadované vlastnosti, ako sa ľahko presvedčíme. Tak napr. pre priamky určené bodom A_1 a ľubovoľným iným bodom množiny $\mathbf{M}$ platí: $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $A_1D_1 \parallel A_2D_2$, $A_1A_2 \parallel S_1S_2$, $A_1B_2 \parallel D_1C_2$, $A_1C_2 \parallel A_2S_2$, $A_1D_2 \parallel B_1C_2$, $A_1S_1 \parallel S_2C_2$, $A_1S_2 \parallel C_2S_1$. Pre ľubovoľný iný vrchol kocky je situácia analogická. Pre priamky určené bodom S_1, resp. S_2 a ľubo-



Obr. 72

voľným iným bodom množiny **M** okrem už uvedených vyššie platí $S_1B_1 \parallel S_2D_2$, $S_1C_1 \parallel S_2A_2$, $S_1D_1 \parallel S_2B_2$, $S_1A_2 \parallel S_2C_1$, $S_1B_2 \parallel S_2D_1$, $S_1D_2 \parallel S_2B_1$.

INÉ RIEŠENIE (T. CHRZ — upravené): Nech ϱ, σ sú na seba kolmé roviny a p priamka, v ktorej sa pretínajú. Nech $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je pravidelný šesťuholník ležiaci v rovine ϱ tak, že $A_1 \in p$, $A_4 \in p$ a $A_1B_2B_3A_4B_5B_6$ s ním zhodný pravidelný šesťuholník ležiaci v rovine σ (obr. 73).



Obr. 73

Potom množina **M** $= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_2, B_3, B_5, B_6\}$ má požadované vlastnosti. Je zrejmé, že vrcholy každého zo šesťuholníkov majú žiadané vlastnosti. Stačí sa preto presvedčiť s prihliadnutím na symetriu, či existuje rovnobežka určená bodmi množiny **M** ku každej priamke určenej niektorým z bodov B_2, B_3, B_5, B_6 a ľubovoľným z bodov A_2, A_3, A_5, A_6. Zrejme platí: $B_2A_2 \parallel B_5A_5$, $B_2A_3 \parallel B_5A_6$, $B_2A_5 \parallel B_5A_2$, $B_2A_6 \parallel B_5A_3$; pre body B_3, B_6 je situácia analogická.

RIEŠENIE 3. ÚLOHY

Nech x_0 je reálny koreň rovnice

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0\,. \tag{1}$$

Potom zrejme $x_0 \neq 0$ a platí

$$x_0^2 + ax_0 + b + a\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0$$

čiže

$$\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b - 2 = 0\,. \tag{2}$$

Z (2) je zrejmé, že spolu s x_0 tiež $\frac{1}{x_0}$ je reálnym koreňom rovnice (1). Číslo $y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$, pre ktoré platí $|y_0| \geqq 2$ je však v takom prípade reálnym koreňom rovnice

$$y^2 + ay + b - 2 = 0\,. \tag{3}$$

Rovnica (3) má reálne korene vtedy a len vtedy, keď platí
$a^2 - 4b + 8 \geqq 0$
čiže

$$b \leqq \frac{1}{4}a^2 + 2\,. \tag{4}$$

Nech platí (4). Rovnica (1) bude mať reálny koreň vtedy a len vtedy, keď pre aspoň jeden z reálnych koreňov

$$y_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \leqq \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} = y_2$$

rovnice (3) platí $|y_i| \geqq 2$. Zistime, kedy bude táto podmienka splnená. Môže tak byť buď pre

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \leqq -2 \text{ čiže}$$

$4 - a \leqq \sqrt{a^2 - 4b + 8}$, z čoho pre $a \leqq 4$ máme

$$b \leqq 2a - 2 \tag{5}$$

alebo pre

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \geqq 2 \text{ čiže } \sqrt{a^2 - 4b + 8} \geqq a + 4,$$

z čoho pre $a \geqq -4$ dostaneme

$$b \leqq -2a - 2\,. \tag{6}$$

Znázornime si množinu bodov (a, b) vyhovujúcich pre $a \in \langle -4; 4 \rangle$ nerovnostiam (4), (5), resp. (4), (6) v rovine s použitím kartézskych súradníc (pozri obr. 74).

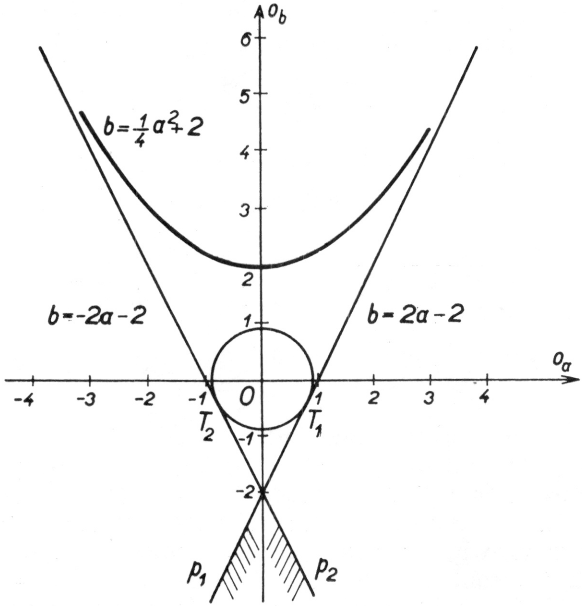
K tomu, aby sme našli minimum súčtu $a^2 + b^2$ tých koeficientov a, b, pri ktorých má rovnica (1) aspoň jeden reálny koreň, stačí vypočítať vzdialenosť $OT_1 = OT_2$, kde T_1, T_2 sú dotykové body kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ s priamkami p_1, p_2 (obr. 74).

Zrejme platí $5 \,.\, OT_1^2 = 4$ čiže $OT_1^2 = \dfrac{4}{5} = \min\,(a^2 + b^2)$.

Pre $a = \dfrac{4}{5}$, $b = -\dfrac{2}{5}$ je $a^2 + b^2 = \dfrac{4}{5}$ a rovnica (1) má

dvojnásobný koreň $x = -1$; pre $a = -\dfrac{4}{5}$, $b = -\dfrac{2}{5}$

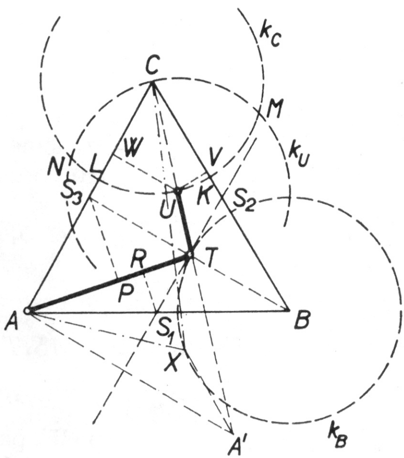
je tiež $a^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ a rovnici (1) vyhovuje ako dvojnásobný koreň $x = 1$.



Obr. 74

RIEŠENIE 4. ÚLOHY

Označme A, B, C vrcholy skúmaného rovnostranného trojuholníka, pričom východiskový bod prieskumnej cesty ženistu označíme A. Nech a je dĺžka strany trojuholníka ABC. Označme $k_B = k\left(B; \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$, $k_C = k\left(C; \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ (obr. 75). Je zrejmé, že k tomu, aby ženista preskúmal



Obr. 75

body B, resp. C, musí sa na svojej ceste z vrcholu A dostať do niektorého bodu na kružnici k_B, resp. k_C. Ďalej je zrejmé, že ak ženista dosiahne nejaký bod X kružnice k_B, potom najkratšou cestou na kružnicu k_C bude príslušná časť úsečky XC. Označme S_1, S_2, S_3 v uvedenom poradí stredy strán AB, BC, CA trojuholníka ABC a T priesečník výšky BS_3 s kružnicou k_B. Bod T je zrejme zároveň dotykovým bodom priamky S_1S_2 a kružnice k_B. Nech U je priesečník úsečky TC s kružnicou k_C. Ukážeme, že lomená čiara ATU je hľadanou najkratšou cestou, po ktorej ženista splní svoju úlohu.

Nech A' je symetrický obraz bodu A vzhľadom na os S_1S_2. Keďže trojuholníky ATS_1 a CTS_2 sú zrejme zhodné, platí $\sphericalangle ATS_1 = \sphericalangle CTS_2 = \sphericalangle A'TS_1$ a priamky $A'T$, TC sú totožné. Ak X je ľubovoľný bod na kružnici k_B, potom zrejme platí: $AX + XC \geqq A'X + XC \geqq A'T + TC = AT + TC$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $X = T$. Z toho vyplýva, že lomená čiara ATU je najkratšou cestou z vrcholu A na kružnicu k_C cez bod na kružnici k_B.

Zostáva nám ešte dokázať, že prejdením tejto cesty preverí ženista celý trojuholník ABC. Označme P, resp. R pätu výšky z vrcholu S_3, resp. S_1, v trojuholníku AS_3T, resp. AS_1T. Zrejme je $S_3P < S_3T$, $S_1R < S_1T = \frac{1}{4}a < a\frac{\sqrt{3}}{4} = S_3T$. Z toho vyplýva, že po ceste AT preverí ženista vnútro i hranicu štvoruholníka AS_1TS_3 a keďže $TS_1 = TS_2 = \frac{1}{4}a < TB = TS_3$, tiež vnútro i hranicu trojuholníka S_1BS_2. Označme V, resp. W, pätu kolmice spustenej z bodu U na priamku BC, resp. CA. Zrejme platí $UV < TS_2$ a $UW < TS_3$. Po ceste TU preverí preto ženista vnútro i hranicu štvoruholníkov $TUVS_2$ i $TUWS_3$, pričom body V, resp. W, ležia zrejme vo vnútri úsečky KC, resp. LC, kde K, resp. L, je priesečník kružnice k_C s úsečkou BC, resp. CA. Nech $k_U = k(U; \frac{\sqrt{3}}{4}a)$ a M, N sú priesečníky kružníc k_C, k_U (pozri obr. 75). Keďže oblúk MN kružnice k_C prislúcha stredovému uhlu $120°$ a oblúk KL tejto kružnice, vo vnútri ktorého leží bod U, prislúcha stredovému uhlu $60°$, je výseč CKL časťou výseče CMN, z čoho vyplýva, že z bodu U preverí ženista tiež vnútro i hranicu celej výseče CKL. Tým sme sa presvedčili, že z lomenej čiary ATU preverí ženista celý pozemok.

Riešením úlohy je tiež lomená čiara z vrcholu A na kružnicu k_B cez kružnicu k_C, ktorá je súmerná s lomenou čiarou ATU podľa osi AS_2.

RIEŠENIE 5. ÚLOHY

Nech f, $g \in \mathbf{G}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$. Potom podľa vlastností a), b) tiež $g \circ f^{-1} \in \mathbf{G}$, pričom $g[f^{-1}(x)] = a\dfrac{x-b}{a} + c = x - b + c$. Podľa c) však musí byť potom $-b + c = 0$ čiže $c = b$. To znamená, že pre $f \in \mathbf{G}$, $f(x) = ax + b$ je b jednoznačne určené číslom a, označme $b = \varphi(a)$. Pre $f : f(x) = ax + \varphi(a)$ existuje podľa c) x_f tak, že $x_f = ax_f + \varphi(a)$. Z toho dostaneme $(1 - a)x_f = \varphi(a)$ čiže platí buď $a = 1$, $\varphi(a) = 0$ a x_f je ľubovoľné reálne číslo alebo $a \neq 1$ a x_f je jednoznačne určené: $x_f = \dfrac{\varphi(a)}{1-a}$.

Nech $f : f(x) = ax + \varphi(a)$ a $g : g(x) = bx + \varphi(b)$ sú ľubovoľné dve funkcie z $\mathbf{G}$, pričom $b \neq 1$. Potom $f \circ g \in \mathbf{G} : f[g(x)] = a(bx + \varphi(b)) + \varphi(a) = abx + a\varphi(b) + \varphi(a)$, ale tiež $g \circ f \in \mathbf{G} : g[f(x)] = b(ax + \varphi(a)) + \varphi(b) = bax + b\varphi(a) + \varphi(b)$. Na základe vyššie uvedeného však musí platiť: $a\varphi(b) + \varphi(a) = b\varphi(a) + \varphi(b)$ čiže

$(1 - b)\varphi(a) = (1 - a)\varphi(b)$ a ak $a \neq 1$, potom $\dfrac{\varphi(a)}{1-a} = \dfrac{\varphi(b)}{1-b}$.

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

RIEŠENIE 6. ÚLOHY

Čísla b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ možno zvoliť napr. takto:

$$b_k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + \ldots$$

$$\ldots + a_n q^{n-k} = \sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k-i|}$$

a) Zrejme platí $b_k > a_k$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $b_{k+1} - q b_k = \sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k+1-i|} - q \sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k-i|} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i (q^{|k+1-i|} - q^{|k-i|+1}) = \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j} q^{j-1} (1 - q^2) > 0 ,$$

z čoho vyplýva $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} > q$ pre $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

$$q b_{k+1} - b_k = q \sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k+1-i|} - \sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k-i|} =$$

$= \sum_{j=1}^{k} a_j q^{k-j} (q^2 - 1) < 0$, z čoho pre $k = 1, 2, \ldots, n-1$ hneď dostaneme: $b_{k+1}/b_k < 1/q$.

c) $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i q^{|k-i|} \right) < \sum_{i=1}^{n} a_i (1 + 2q + 2q^2 + \ldots + 2q^{n-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} q^j + \sum_{k=1}^{n-1} q^k \right) < \left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} \right) \sum_{i=1}^{n} a_i =$$

$$= \frac{1+q}{1-q} \sum_{i=1}^{n} a_i .$$