V. Řešení soutěžních úloh III. kola

KATEGORIE A

A–III–1

Platí-li pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2\,, \tag{1}$$

je tento trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Podle vzorce $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ plyne z dané rovnosti

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 0\,.$$

Podle vzorce pro $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ a podle vzorce $2\cos^2\gamma = 1 + \cos 2\gamma$ dostaneme

$$2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\cos^2\gamma = 0\,.$$

Protože je $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, dostaneme dále

$$\cos\gamma\,(\cos\gamma - \cos(\alpha - \beta)) = 0\,,$$

neboli

$$\cos\gamma\,(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = 0\,.$$

Použijeme znovu vzorce pro $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$; vyjde

$$\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma = 0\,. \tag{2}$$

Je tedy buď $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, nebo $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, nebo $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

POZNÁMKA. Uvedené řešení 1. úlohy je řešení autorské. Soutěžící, kteří tuto úlohu úspěšně vyřešili, většinou užívali v podstatě stejného postupu, tj. dokázali, že z rovnosti (1) plyne rovnost (2). Jejich důkazy však byly složitější.

A–III–2

Je dán čtyřstěn. Označme v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ jeho výšky a ϱ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ poloměry kulových ploch vně vepsaných tomuto čtyřstěnu. Pak platí

$$2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right) = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4};$$

Dokažte.

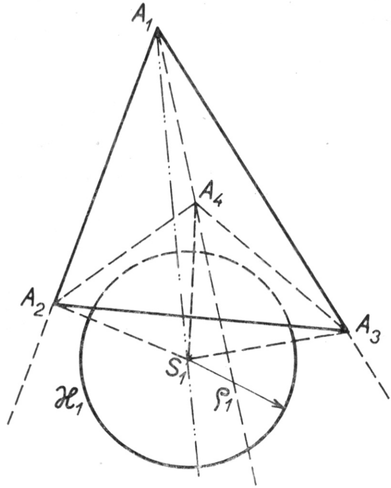
(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme vrcholy čtyřstěnu A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Budiž S_1 střed a ϱ_1 poloměr vně vepsané kulové plochy podle schematického obr. 65. Označme P_1, P_2, P_3, P_4 po řadě obsahy trojúhelníků $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_1A_3A_4$, $\triangle A_1A_2A_4$, $\triangle A_1A_2A_3$. Potom pro objemy V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14} čtyřstěnů $A_2A_3A_4S_1$, $A_1A_3A_4S_1$, $A_1A_2A_4S_1$, $A_1A_2A_3S_1$ platí

$$-V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14} = V, \tag{1}$$

kde V je objem čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$. Platí však

$$V_{1i} = \frac{P_i\varrho_1}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$



Obr. 65

po dosazení do (1) dostáváme

$$\frac{\varrho_1}{3}(-P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = V,$$

z čehož

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{-P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{3V}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{P_1 - P_2 + P_3 + P_4}{3V},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{P_1 + P_2 - P_3 + P_4}{3V},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 - P_4}{3V}.$$

Je tedy

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{V}. \quad (2)$$

Dále platí

$$V = \frac{P_i \cdot v_i}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

z čehož

$$\frac{1}{v_i} = \frac{P_i}{3V} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

a tedy

$$2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{V}. \quad (3)$$

Z rovností (2) a (3) vyplývá

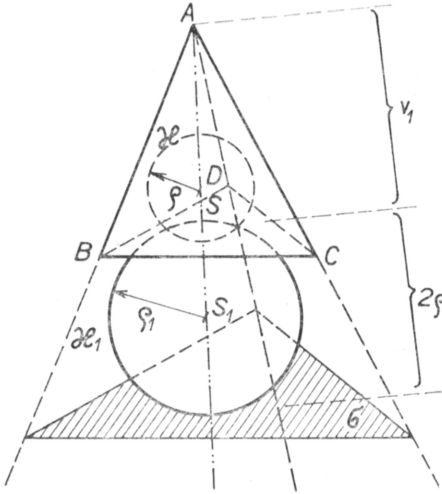
$$2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right) = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4},$$

c. b. d.

Řešil Petr Slačálek,
3. f, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2

JINÉ ŘEŠENÍ. Poloměr kulové plochy $\varkappa$ vepsané dovnitř daného čtyřstěnu $ABCD$ (schematický obr. 66) označme ϱ a obsahy jednotlivých stěn S_1, S_2, S_3, S_4. Pro objem V daného čtyřstěnu platí

$$S_1 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_2 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_3 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_4 \cdot \frac{\varrho}{3} = V,$$



Obr. 66

z čehož po úpravě máme

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V} . \tag{1}$$

Dále víme, že pro objem V platí

$$V = S_1 \, . \, \frac{v_1}{3} = S_2 \, . \, \frac{v_2}{3} = S_3 \, . \, \frac{v_3}{3} = S_4 \, . \, \frac{v_4}{3} ,$$

takže

$$S_1 = \frac{3V}{v_1} , \; S_2 = \frac{3V}{v_2} , \; S_3 = \frac{3V}{v_3} , \; S_4 = \frac{3V}{v_4} .$$

Po dosazení za S_1, S_2, S_3 a S_4 do (1) dostáváme rovnost

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}. \tag{2}$$

Vyšetřujme kulovou plochu $\varkappa_1$ o poloměru ϱ_1 vepsanou do trojhranu $A(BCD)$ tak, že se dotýká roviny BCD a leží v opačném poloprostoru určeném rovinou BCD než bod A. Tato kulová plocha $\varkappa_1$ je stejnolehlá s kulovou plochou $\varkappa$ vepsanou dovnitř čtyřstěnu $ABCD$. Středem stejnolehlosti je bod A. Veďme rovinu $\sigma \parallel BCD$ ($\sigma \neq BCD$) tak, aby se dotýkala plochy $\varkappa_1$. Ze vzdálenosti rovin σ a BCD určíme koeficient stejnolehlosti, který se musí rovnat poměru poloměrů:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{2\varrho_1 + v_1}{v_1}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - 2 \cdot \frac{1}{v_1}. \tag{3}$$

Obdobný vztah jako (3) platí zřejmě i pro ϱ_2, v_2; ϱ_3, v_3; ϱ_4, v_4. Z těchto vztahů tedy plyne

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 4 \cdot \frac{1}{\varrho} - 2 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right).$$

Po dosazení z rovnosti (2) dostáváme rovnost

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right),$$

která se měla dokázat.

Řešil JAN FRYNTA,
4.f, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2

A–III–3

Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ taká, že pre každé $k > 1$ platí $a_{k-1} + a_{k+1} \geqq 2a_k$.

Pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ označme

$$A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Potom pre každé $n > 1$ platí tiež

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geqq 2A_n; \tag{1}$$

dokážte. (8 bodov)

RIEŠENIE. Vypočítajme rozdiel $R_n = A_{n-1} + A_{n+1} - 2A_n$. Ľahko sa vidí, že

$$R_n = \frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - n(n+1)a_n + n(n-1)a_{n+1}}{n(n-1)(n+1)}.$$

Je zrejmé, že (1) platí pre každé prirodzené číslo $n > 1$ vtedy a len vtedy, keď pre každé $n > 1$ je $R_n \geqq 0$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n(n-1)\,a_{n+1} \geqq$$
$$\geqq n(n+1)\,a_n. \tag{2}$$

Pravdivosť nerovnosti (2) dokážeme úplnou indukciou:

1. Pre $n = 2$ má nerovnosť (2) tvar

$$2(a_1 + a_2) + 2a_3 \geqq 6a_2 \text{ čiže } a_1 + a_3 \geqq 2a_2,$$

čo je splnené podľa predpokladu.

2. Predpokladajme, že pre nejaké prirodzené číslo $n > 1$ platí (2). Podľa podmienok úlohy platí pre každé prirodzené číslo $n > 1$ tiež

$a_n + a_{n+2} \geqq 2a_{n+1}$, z čoho hneď dostaneme

$$n(n+1)\,a_n + n(n+1)\,a_{n+2} \geqq 2n(n+1)\,a_{n+1}. \tag{3}$$

Sčítaním (2) a (3) po jednoduchej úprave dostaneme

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}) + n(n+1)\,a_{n+2} \geqq \geqq (n+1)(n+2)\,a_{n+1},$$

čo je nerovnosť, ktorú dostaneme z (2), ak v nej nahradíme n číslom $n + 1$.

Tým sme dokázali správnosť nerovnosti (2) pre každé prirodzené číslo $n > 1$ a vzhľadom na ekvivalenciu nerovnosti (2) s nerovnosťou (1) tiež správnosť tejto nerovnosti.

Riešil PAVOL ZLATOŠ, 3.b tr.
Gymn. Bratislava, Novohradská ul.

JINÉ ŘEŠENÍ. Utvořme nejprve posloupnost koeficientů definovanou rekurentně takto:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_k = 2b_{k-1} - b_{k-2} + 1\,.$$

Matematickou indukcí snadno dokážeme, že pro každé přirozené číslo k platí

$$b_k = \frac{(k+1)\,.\,k}{2}\,. \tag{1}$$

I. Pro $k = 1$ a $k = 2$ rovnost (1) skutečně platí. Nechť $k = 3$. Podle definice je

$$b_3 = 6 - 1 + 1 = 6$$

a podle (1) je také

$$b_3 = \frac{4\,.\,3}{2} = 6\,.$$

II. Nechť (1) platí pro nějaké přirozené číslo $k \geqq 3$. Pak

$$b_{k+1} = 2b_k - b_{k-1} + 1 = 2\,.\,\frac{(k+1)\,.\,k}{2} - \frac{k\,.\,(k-1)}{2} + 1 = $$

$$= \frac{(k+2)(k+1)}{2}\,,\ \text{c. b. d.}$$

Podle předpokladu pro každé $k > 1$ platí

$$a_{k-1} + a_{k+1} \geqq 2a_k \,. \tag{2}$$

Sečteme $n - 1$ nerovností (n je libovolně zvolené přirozené číslo, $n > 1$),

$$\begin{aligned}
&b_1 \,.\, (a_1 - 2a_2 + a_3) \geqq 0 \,, \\
&b_2 \,.\, (a_2 - 2a_3 + a_4) \geqq 0 \,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&b_k\, (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}) \geqq 0 \,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&b_{n-1}\, (a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}) \geqq 0 \,,
\end{aligned}$$

které platí podle (2) a proto, že podle (1) je $b_k > 0$ pro každé $k \geqq 1$. Součet je

$$\begin{aligned}
&a_1 b_1 + a_2 \,.\, (-2b_1 + b_2) + a_3 \,.\, (b_1 - 2b_2 + b_3) + a_4 \,. \\
&.\, (b_2 - 2b_3 + b_4) + \dots + a_k \,.\, (b_{k-2} - 2b_{k-1} + b_k) + \\
&+ \dots + a_{n-1} \,.\, (b_{n-3} - 2b_{n-2} + b_{n-1}) + \\
&\qquad + a_n \,.\, (b_{n-2} - 2b_{n-1}) + a_{n+1} \,.\, b_{n-1} \geqq 0 \,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Z rekurentní definice posloupnosti $\{b_k\}$ plyne

$$\begin{aligned}
b_{k-2} - 2b_{k-1} + b_k = b_{k-2} - 2b_{k-1} + 2b_{k-1} - b_{k-2} + \\
+ 1 = 1 \,.
\end{aligned}$$

Tedy nerovnost (3) nabývá tvaru

$$\begin{aligned}
&a_1 b_1 + a_2\, (-2b_1 + b_2) + a_3 + a_4 + \dots + a_k + \dots + \\
&\qquad + a_{n-1} + a_n\, (b_{n-2} - 2b_{n-1}) + a_{n+1} \,.\, b_{n-1} \geqq 0 \,.
\end{aligned}$$

Dosadíme za koeficienty b_k z definice a z (1); dostáváme

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \,.\, \frac{2 - n^2 - n}{2} +$$

$$+ a_{n+1} \frac{n^2 - n}{2} \geqq 0 \,,$$

tj.

$$2\,.(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 2a_n - 2n^2a_n + (n^2 - n)a_n + \\ + (n^2 - n)\,a_{n+1} \geqq 0\,,$$

čili

$$(n^2 - n)\,.\,a_n + (n^2 - n)\,.\,a_{n+1} \geqq \\ \geqq -2\,.(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 2n^2a_n\,.$$

K oběma stranám poslední nerovnosti přičteme $2n^2\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$, na levé přičteme i odečteme $n\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$. Po úpravě dostáváme

$$(n^2 + n)\,.\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (n^2 - n)\,. \\ .\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (n^2 - n)\,.\,(a_n + a_{n+1}) \geqq \\ \geqq 2\,(n^2 - 1)\,.\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,.$$

Tuto nerovnost znásobíme kladným výrazem

$$\frac{1}{n\,(n-1)\,(n+1)}$$

a docházíme k nerovnosti

$$\frac{1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + \frac{1}{n+1}\,. \\ .(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) \geqq 2\,.\,\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

což je nerovnost

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geqq 2\,.\,A_n\,,$$

kterou jsme měli dokázat.

Řešila MAGDA FOŘTOVÁ
4.d, gymnasium J. Fučíka, Plzeň

A–III–4

Je-li $n \geqq 2$ přirozené číslo, určete

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] .$$

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ platí

$$[\sqrt{n^2 - 1}] = n - 1] ,$$

neboť

$$n - 1 \leqq \sqrt{n^2 - 1} < (n - 1) + 1 .$$

Množinu

$$\mathbf{M} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n^2 - 1}\}$$

tedy můžeme rozložit na $n - 1$ disjunktních podmnožin $\mathbf{A}_i$ definovaných takto:

$$\mathbf{A}_i = \{x \in \mathbf{M}; [x] = i\} , i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}.$$

Nyní zjistíme počet prvků $||\mathbf{A}_i||$ množiny $\mathbf{A}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Nejmenším prvkem množiny $\mathbf{A}_i$ je zřejmě prvek

$$\alpha_i = \sqrt{i^2} ;$$

největším jejím prvkem je prvek

$$\beta_i = \sqrt{(i + 1)^2 - 1} .$$

Zřejmě je $\mathbf{A}_i = \{\alpha_i, \alpha_i + 1, \ldots, \beta_i\}$, a proto

$$||\mathbf{A}_i|| = (i + 1)^2 - i^2 = 2i + 1 .$$

Z předcházejících úvah plyne ($n \geqq 2$):

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \sum_{i=1}^{n-1} i \, . \, ||\mathbf{A}_i|| = \sum_{i=1}^{n-1} (2i^2 + i) = 2 \, . \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \, .$$

Pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n (n+1) \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,,$$

a proto

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{2}{6}(n-1)\,.\,n\,.\,(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)\,.\,n\,.$$

Po úpravě dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{1}{6} n (n-1)(4n+1)\,,$$

což je hledaný vztah.

Řešil JAN TRLIFAJ,
3.d, gymnasium, Sladkovského nám., Praha 3

A–III–5

Je dána rovina ϱ. Jsou-li P, Q dva body z ϱ, označme $P + Q$ střed dvojice P, Q a $P\,.\,Q$ bod roviny ϱ, který dostaneme otočením bodu Q okolo bodu P o $90°$ v kladném smyslu.

a) Jsou tyto operace komutativní?

b) Jsou dány dva pevné navzájem různé body A, B roviny ϱ. Rovnice

$$Y\,.\,X = (A\,.\,X) + B \tag{1}$$

určuje zobrazení $X \mapsto Y$.

Určete o jaké zobrazení jde.

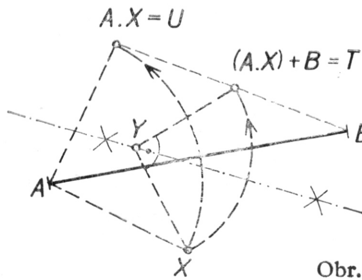
c) Sestrojte všechny samodružné body tohoto zobrazení. (8 bodů)

ŘEŠENÍ. a) Operace „+" je zřejmě komutativní. Operace „." komutativní v množině ϱ není. Zvolíme-li si totiž v rovině ϱ dva různé body A, B, pak vždy platí

$$A \, . \, B \neq B \, . \, A \, .$$

b) Zvolme v rovině ϱ libovolný bod X. Bod Y, pro který platí rovnost (1), pak získáme následujícím postupem. Nejprve sestrojíme bod $U = A \, . \, X$ a potom bod $T = (A \, . \, X) + B$. Nyní je třeba rozlišit dva případy:

α) Nechť $X = T$. Potom $Y = X$. (Problémem, zda tento případ nastává, se budeme zabývat při řešení části c) dané úlohy.)



Obr. 67

β) Nechť $X \neq T$ (obr. 67). Potom je bod Y vrcholem pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s přeponou XT, v němž bod X přejde do bodu T otočením okolo bodu Y o $90°$ v kladném smyslu.

Z popsané konstrukce bodu Y vyplývá, že rovnicí (1) je ke každému bodu $X \in \varrho$ přiřaděn jediný bod $Y \in \varrho$.

Druh zobrazení určíme třeba pomocí komplexních čísel. Umístíme soustavu ortonormálních souřadnic v rovině ϱ tak, aby body A, B byly po řadě obrazy čísel 0,1 (stručně budeme psát $A = [0]$, $B = [1]$). Dále označíme $X = [z]$; pak je $A \, . \, X = [\mathrm{i}z]$,

$$T = (A \, . \, X) + B = \left[\frac{\mathrm{i}}{2} z + \frac{1}{2}\right] . \qquad (2)$$

Na druhé straně je $T = Y \, . \, X$; označíme-li $Y = [z']$, je

$$T = [z' + \mathrm{i}(z - z')] = [(1 - \mathrm{i}) z' + \mathrm{i}z] \, . \qquad (3)$$

Porovnáním (2) a (3) vyjde

$$(1 - \mathrm{i})\, z' + \mathrm{i}z = \frac{\mathrm{i}}{2} z + \frac{1}{2},$$

tj.

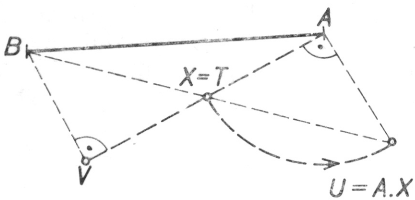
$$z' = -\frac{\mathrm{i}}{2(1 - \mathrm{i})} z + \frac{1}{2(1 - \mathrm{i})}$$

a po úpravě

$$z' = \frac{1 - \mathrm{i}}{4} z + \frac{1 + \mathrm{i}}{4}. \tag{4}$$

Rovnicí (4) je určena přímá podobnost. To zjistíme, vyjádříme-li např. $\frac{1 - \mathrm{i}}{4} = k \,.\, \varepsilon$, kde $k = \left|\frac{1 - \mathrm{i}}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i})$.

Zobrazení $[z] \mapsto [\varepsilon z]$ je otočení kolem bodu $[0]$, zobrazení $[\varepsilon z] \mapsto \left[k\varepsilon z + \frac{1 + \mathrm{i}}{4}\right]$ je stejnolehlost s konstantou k.



Obr. 68

c) Budiž $X = Y$ samodružný bod podobnosti (4); pak je $X \,.\, X = X$, a tedy bod X je řešením rovnice

$$X = (A \,.\, X) + B \,.$$

Situace pro samodružný bod X je naznačena na obr. 68; zde je $\triangle\, XAU \cong \triangle\, XVB$, $AU = AX = VX = BV$, $UX = BX$. Pro pomocný bod V tedy platí

$$AV = 2\, BV, \quad \sphericalangle AVB = \frac{\pi}{2}, \quad V \,.\, X = B;$$

těmito podmínkami je bod V jednoznačně určen; bod X sestrojíme z údaje $X = A + V$.

POZNÁMKA. U 5. úlohy je uvedeno autorské řešení. I když několik účastníků 3. kola získalo za tuto úlohu plný počet bodů, žádné z těchto řešení se nehodilo k otištění.

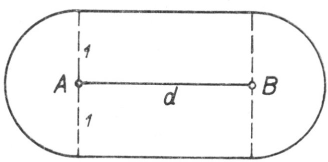
A–III–6

Ve čtverci, jehož strana má délku 50, je dána lomená čára L tak, že každý bod čtverce má od některého bodu čáry L vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že délka čáry L je větší než 1248.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Nechť AB je libovolná úsečka čáry L. Uvažujme množinu všech bodů roviny daného čtverce, které mají od této úsečky vzdálenost menší nebo rovnou 1. Touto množinou je zřejmě sjednocení všech kruhů ohraničených kružnicemi $k_x = (X; 1)$, kde X probíhá úsečku AB, tedy útvar složený z pravoúhelníka, jehož dvě strany jsou rovnoběžné s úsečkou AB, mají od ní vzdálenost 1 a druhé dvě strany obsahují body A, B, a z dvou půlkruhů se středy A, B ohraničených stranami pravoúhelníka kolmými na AB (obr. 69). Je-li délka úsečky AB rovna d, pak obsah nalezeného útvaru (dále jej budeme nazývat oválem) je

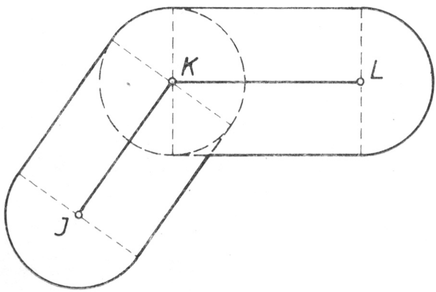
$$2d + \pi .$$



Obr. 69

Uvažujme všecky ovály nad všemi úsečkami tvořícími čáru L. Tyto ovály musí podle zadání úlohy pokrýt celý daný čtverec. Kdyby totiž nějaký bod uvažovaného čtverce ležel vně každého z těchto oválů, měl by od každého bodu čáry L vzdálenost větší než 1.

Obsah průniku oválů nad dvěma sousedními úsečkami čáry L se společným koncovým bodem K je zřejmě větší nebo roven obsahu kruhu ohraničeného kružnicí $k_k = (K; 1)$, který je oběma oválům společný (obr. 70).



Obr. 70

Pro obsah P útvaru vzniklého sjednocením oválů sestrojených nad všemi úsečkami čáry L pak platí:

$$P \leqq \sum_{i=1}^{n}(2d_i + \pi) - (n - 1) \cdot \pi = \pi + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i, \qquad (1)$$

kde d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou délky všech úseček tvořících čáru L.

Předpokládejme, že existuje čára L, která vyhovuje podmínkám úlohy a je kratší nebo rovna 1248. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \leqq 1248 .$$

Z nerovnosti (1) tedy vyplývá

$$P \leqq \pi + 2496 < 2500 = 50^2 .$$

Avšak výše bylo dokázáno, že útvar vzniklý sjednocením všech oválů nad úsečkami čáry L pokrývá celý daný čtverec, takže $P \geqq 50^2$, což je spor. Délka čáry L je tedy větší než 1248.

Řešil PAVEL KINDELMANN,
3.a, gymnasium, Šrámkova ul.,
České Budějovice