IV. Soutěžní úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

A–II–1a

V množině všech celých kladných čísel jsou zavedeny dvě operace: $x \sqcap y$ je největší společný dělitel čísel x, y; $x \sqcup y$ je nejmenší společný násobek čísel x, y.

1. Dokažte, že každá z operací $\sqcap$, $\sqcup$ je komutativní a asociativní.
2. Dokažte, že každá z operací $\sqcap$, $\sqcup$ je distributivní vzhledem k operaci zbývající.
3. Najděte všecka celá kladná čísla x, pro která platí

$$x \sqcap (a \sqcup x) = b \sqcup (b \sqcap x);$$

přitom a, b jsou daná celá kladná čísla.

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. 1. Budiž $x = p_1^{\varkappa_1} \dots p_n^{\varkappa_n}, y = p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n}, z = p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}$ kde $p_1, \dots, p_n$ jsou všecka prvočísla, která se vyskytují v rozkladu aspoň jednoho z čísel x, y, z (exponenty $\varkappa_i, \lambda_i, \nu_i$ jsou nezáporná čísla celá).

V rozkladu čísel $x \sqcap y$ a $y \sqcap x$ jsou i-tí součinitelé $p_i^{\min(\varkappa_i \lambda_i)}, p_i^{\min(\lambda_i \varkappa_i)}$; je tedy $x \sqcap y = y \sqcap x$ a komutativita operace $\sqcap$ je prokázána. Obdobně tomu je u operace $\sqcup$; zde je i-tý součinitel rozkladu čísel $x \sqcup y$ i $y \sqcup x$ číslo $p_i^{\max(\varkappa_i,\, \lambda_i)}$.

Asociativita obou operací se prokáže tak, že i-tý součinitel v rozkladu $x \sqcap (y \sqcap z)$ i $(x \sqcap y) \sqcap z$ je $p_i^{\min(\varkappa_i,\, \lambda_i,\, \nu_i)}$, i-tý součinitel v rozkladu $x \sqcup (y \sqcup z)$ i $(x \sqcup y) \sqcup z$ je $p_i^{\max(\varkappa_i,\, \lambda_i,\, \nu_i)}$.

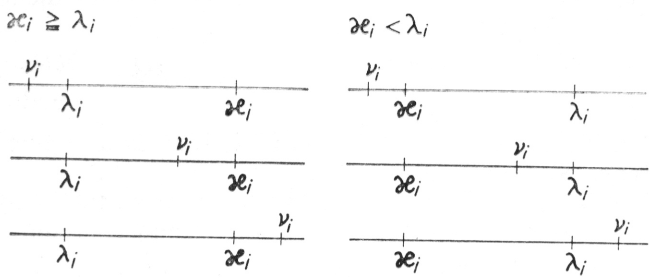
2. Důkaz distributivity: i-tý součinitel v rozkladu čísla $(x \sqcap y) \sqcup z$ je

$$p_i^{\max((\min \varkappa_i,\, \lambda_i),\, \nu_i)} \tag{1}$$

v rozkladu čísla $(x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z)$ je

$$p_i^{\min(\max(\varkappa_i,\, \nu_i),\, \max(\lambda_i,\, \nu_i))}. \tag{2}$$

Rovnost exponentů (1), (2) dokážeme např. pomocí číselné osy; je celkem 6 možností (obr. 50).



Obr. 50

Obdobně se dokáže *distributivita* operace $\sqcap$ vzhledem k $\sqcup$.

3. Řešení rovnice

$$x \sqcap (a \sqcup x) = b \sqcup (b \sqcap x). \tag{3}$$

Operace $\sqcap$ je distributivní vzhledem k operaci $\sqcup$, a proto

$$x \sqcap (a \sqcup x) = (x \sqcap a) \sqcup (x \sqcap x) .$$

Protože je $x \sqcap x = x$ a číslo $x \sqcap a$ dělí x, je

$$x \sqcap (a \sqcup x) = x . \tag{4}$$

Dále je podle (4) při nahrazení $x \mapsto b$, $a \mapsto x$

$$b \sqcup (b \sqcap x) = (b \sqcup b) \sqcap (b \sqcup x) = b \sqcap (x \sqcup b) = b . \tag{5}$$

Spojením (4), (5) dostaneme jediný možný kořen (3)

$$x = b .$$

ZKOUŠKA potvrdí, že b je opravdu kořenem rovnice (3).

A–II–1b

Je dán pravidelný čtyřstěn o hraně délky h a přímka p. Označme A, B, C, D pravoúhlé průměty vrcholů daného čtyřstěnu na přímku p. Dokažte, že platí

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2h^2 .$$

(6 bodů)

ŘEŠENÍ (podle PAVLA FERSTA ze třídy 3. d gymnasia na Sladkovského nám. v Praze 3).

Zvolíme ortonormální souřadný systém tak, aby vrcholy daného čtyřstěnu A', B', C', D' měly souřadnice

$$A' = [0, 0, 0],\ B' = [a, a, 0],\ C' = [a, 0, a],$$
$$D' = [0, a, a] ,$$

kde $a = \frac{1}{2} h \sqrt{2}$. Na přímce p pak zvolíme jednotkový vektor $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Obecně platí, že velikost pravoúhlého průmětu libovolné úsečky XY na přímku p je rovna absolutní hodnotě skalárního součinu vektoru $\overrightarrow{XY}$ s vektorem $\mathbf{v}$.

V našem případě tedy máme

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 =$$

$$= (\overrightarrow{A'B'} \,.\, \mathbf{v})^2 + (\overrightarrow{A'C'} \,.\, \mathbf{v})^2 + \ldots + (\overrightarrow{C'D'} \,.\, \mathbf{v})^2 =$$

$$= a^2[(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma - \beta)^2 +$$

$$+ (\gamma - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2] =$$

$$= a^2[\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma +$$

$$+ \gamma^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta +$$

$$+ \alpha^2] = 4a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 4a^2 = \frac{4 \,.\, h^2 .\, 2}{4} = 2h^2 ,$$

což jsme měli dokázat.

A—II—2a

Je dáno přirozené číslo a; vypočtěte součet

$$\sum_{k=1}^{1973} \left[\frac{k}{a}\right].$$

Poznámka. Pro každé reálné x značí $[x]$ jeho celou část, tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leqq x < [x] + 1$.

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Platí

$$\sum_{k=1}^{a-1} \left[\frac{k}{a}\right] = 0, \quad \sum_{k=a}^{2a-1} \left[\frac{k}{a}\right] = a,$$

$$\sum_{k=2a}^{3a-1} \left[\frac{k}{a}\right] = 2a, \ldots\ldots,$$

$$\sum_{k=a\left[\frac{n}{a}\right]-a}^{a\left[\frac{n}{a}\right]-1}\left[\frac{k}{a}\right]=a\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right),$$

$$\sum_{k=a\left[\frac{n}{a}\right]}^{n}\left[\frac{k}{a}\right]=m\left[\frac{n}{a}\right],$$

kde m je počet přirozených čísel ne větších než n, která mají přidělení číslem a celou část rovnou $\left[\frac{n}{a}\right]$; platí $m = n - a\left[\frac{n}{a}\right] + 1$.

Dostáváme tedy:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{a}\right] = a\left\{1+2+\ldots+\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\right\}+m\left[\frac{n}{a}\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\left[\frac{n}{a}\right]+\left[\frac{n}{a}\right]\left(n-a\left[\frac{n}{a}\right]+1\right) =$$

$$= \left[\frac{n}{a}\right]\left\{n+1-\frac{a}{2}\left(\left[\frac{n}{a}\right]+1\right)\right\}.$$

Pro $n = 1973$ odtud dostáváme součet žádaný úlohou.

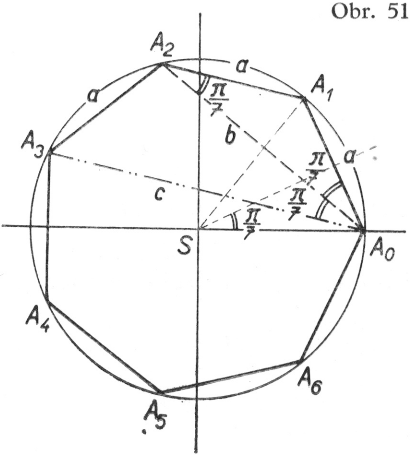
A—II—2b

Buďte A_0, A_1, A_2, A_3 čtyři po sobě bezprostředně následující vrcholy pravidelného sedmiúhelníka. Pak platí

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3};$$

dokažte. (6 bodů)

Obr. 51



ŘEŠENÍ. Označme ε komplexní jednotku s argumentem $\frac{\pi}{7}$. Pak lze zvolit soustavu ortonormálních souřadnic tak, že vrcholy A_0, A_1, A_2, A_3 jsou po řadě obrazy komplexních čísel 1, ε^2, ε^4, ε^6 ($\sphericalangle A_0SA_1 = \sphericalangle A_1SA_2 = \sphericalangle A_2SA_3 = \frac{2\pi}{7}$; přitom S je střed kružnice opsané danému sedmiúhelníku). Situace je znázorněna na obr. 51. Protože podle věty o obvodových úhlech je $\sphericalangle A_1A_0A_2 = \sphericalangle A_2A_0A_3 = \frac{\pi}{7}$, převede otočení kolem středu A_0 o úhel $\frac{\pi}{7}$ polopřímky $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ po řadě v polopřímky $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$. Je tedy při označení z obr. 51

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 - 1 &= \frac{b}{a}\,\varepsilon\,(\varepsilon^2 - 1)\,, \\ \varepsilon^6 - 1 &= \frac{c}{a}\,\varepsilon^2\,(\varepsilon^2 - 1)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Tyto rovnice vyplývají z posunutí soustavy souřadnic, které převede souřadnice bodů A_0, A_1, A_2, A_3 po řadě v čísla 0, $\varepsilon^2 - 1$, $\varepsilon^4 - 1$, $\varepsilon^6 - 1$. Číslo ε je (primitivním) kořenem rovnice $\varepsilon^7 = -1$ neboli $\varepsilon^7 + 1 = 0$; platí tedy

$$\varepsilon^6 - \varepsilon^5 + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 + \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0\,. \tag{2}$$

Z rovnic (1) plyne (je totiž $\varepsilon^2 \neq 1$)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^2 + 1 &= \frac{b}{a}\,\varepsilon, \\ \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 &= \frac{c}{a}\,\varepsilon^2. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Rovnici (2) upravíme na tvar

$$\varepsilon^6 + (1 - \varepsilon)(\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1) = 0\,,$$

kam dosadíme z druhé rovnice (3). Po úpravě vyjde

$$\varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)\,\frac{c}{a} = 0. \tag{4}$$

Vyloučíme-li ε^4 z druhé rovnice (3) a z (4), dostaneme po úpravě

$$\varepsilon^2 - \frac{c}{c - a}\,\varepsilon + 1 = 0. \tag{5}$$

Vyloučíme dále ε^2 z rovnice (5) a z první rovnice (3); vyjde

$$\left(\frac{c}{c - a} - \frac{b}{a}\right)\varepsilon = 0$$

a odtud $ac + ab = bc$, což je dokazovaná rovnost.

JINÉ ŘEŠENÍ (podle MILENY ŠÍDLOVÉ ze třídy 3.a gymnasia v ulici Nad štolou v Praze 7). Rovnost

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3} \tag{1}$$

platí, právě když

$$\frac{A_0A_1}{A_0A_2} + \frac{A_0A_1}{A_0A_3} = 1\,. \tag{2}$$

Zřejmě je

$$A_0A_2 = A_3A_5 \text{ a } A_0A_1 = A_1A_2\,,$$

takže (2), a tedy také (1), platí, právě když

$$\frac{A_0A_1}{A_3A_5} + \frac{A_1A_2}{A_0A_3} = 1. \tag{3}$$

Vektory $\overrightarrow{A_0A_1}$ a $\overrightarrow{A_5A_3}$ jsou souhlasně orientovány, neboť $A_0A_1 \parallel A_5A_3$ a body A_1 a A_3 leží v téže polorovině určené přímkou A_0A_5. Tudíž

$$\overrightarrow{A_0A_1} = \frac{A_0A_1}{A_3A_5}\,.\,\overrightarrow{A_5A_3}\,. \tag{4}$$

Podobně zjistíme, že

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_0A_3}\,.\,\overrightarrow{A_0A_3}\,. \tag{5}$$

Jak známo, v rovině daného sedmiúhelníka lze zvolit ortonormální soustavu souřadnic tak, že existuje taková komplexní jednotka z, že vrcholy A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 jsou po řadě obrazy komplexních jednotek $z^0 = 1$, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6. Potom z rovností (4) a (5) vyplývá

$$z - 1 = \frac{A_0A_1}{A_3A_5}\,.\,(z^3 - z^5)\,, \tag{6}$$

$$z^2 - z = \frac{A_1A_2}{A_0A_3}\,.\,(z^3 - 1)\,. \tag{7}$$

Z rovností (6) a (7) dostáváme

$$\frac{A_0A_1}{A_3A_5} + \frac{A_1A_2}{A_0A_3} = \frac{z-1}{z^3 - z^5} + \frac{z^2 - z}{z^3 - 1} =$$

$$= \frac{(z-1)(z^3-1)+(z^2-z)(z^3-z^5)}{(z^3-z^5)\,.\,(z^3-1)} =$$

$$= \frac{z^4-z^3-z+1+z^5-z^4-z^7+z^6}{z^6-z^8-z^3+z^5} = 1,$$

neboť $z^7 = 1$ a $z^8 = z$. Platí tedy rovnost (3), a tedy také rovnost (1), kterou jsme měli dokázat.

ĎALŠIE RIEŠENIE. Nech pravidelný sedemuholník je vpísaný do kružnice s polomerom r (pozri obr. 51). Pre dĺžky úsečiek A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 zrejme platí:

$$A_0A_1 = 2r\sin\frac{\pi}{7},\ A_0A_2 = 2r\sin\frac{2\pi}{7}, \qquad (1)$$

$$A_0A_3 = 2r\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Zo základných vlastností funkcie sínus vyplýva

$$\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}. \qquad (2)$$

Z rovnosti (2) po vynásobení číslom $\sin\frac{2\pi}{7} \neq 0$ a použití

vzorca pre sínus dvojnásobného uhla dostaneme:

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7},$$

z čoho podľa vzorca pre súčet hodnôt funkcie sínus ďalej máme

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\right). \qquad (3)$$

Z (3) po využití (2) dostávame

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7},$$

z čoho po vynásobení číslom $\left(2r\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\right)^{-1} \neq$

$\neq 0$ vzhľadom na (1) dostaneme

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3},$$

čo bolo treba dokázať.

Riešil JOZEF ŠIRÁŇ, 3.b tr.
Gymn. Bratislava, Novohradská ul.

A–II–3a

Nech $\mathbf{N}_0$ znamená množinu všetkých nezáporných celých čísel. Označme $\mathbf{A} = \{x; x = x_1^2 + x_2^2, x_1, x_2 \in \mathbf{N}_0\}$, $\mathbf{A}_t = \{tx; x \in \mathbf{A}\}$, kde $t \in \mathbf{N}_0$, $\mathbf{B} = \{t; \mathbf{A}_t \subset \mathbf{A}\}$. Dokážte, že $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. (7 bodov)

RIEŠENIE. Dokážeme najskôr, že $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Nech $t \in \mathbf{A}$, tj.

$t = t_1^2 + t_2^2$, $t_1, t_2 \in \mathbf{N}_0$. Potom pre každé $x \in \mathbf{A}$ je

$tx = (t_1^2 + t_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = (t_1x_1 + t_2x_2)^2 + (t_1x_2 - t_2x_1)^2 = z_1^2 + z_2^2$, kde $z_1, z_2 \in \mathbf{N}_0$. Teda $tx \in \mathbf{A}$, čo znamená, že

$$\mathbf{A}_t \subset \mathbf{A} \text{ čiže } t \in \mathbf{B}.$$

Nech teraz $t \in \mathbf{B}$, tj. $\mathbf{A}_t \subset \mathbf{A}$. Keďže $1 = 0^2 + 1^2 \in \mathbf{A}$, vyplýva z toho, že tiež $t . 1 = t \in \mathbf{A}_t$. Platí preto aj inklúzia $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ a tým je rovnosť $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ dokázaná.

A–II–3b

V kruhu o poloměru 1 leží konvexní mnohoúhelník. Dokažte, že v tomto mnohoúhelníku existuje takový bod, který má od všech jeho ostatních bodů vzdálenost menší nebo rovnu jedné.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Jestliže střed kružnice S leží v mnohoúhelníku $\mathbf{M}$, je S hledaný bod a důkaz je hotov. Nechť tedy S neleží v $\mathbf{M}$. Pak existuje v $\mathbf{M}$ takový bod T, který má od S mezi všemi body $\mathbf{M}$ nejmenší vzdálenost. Dokážeme, že T má požadovanou vlastnost. Budiž A libovolný bod $\mathbf{M}$, nejprve takový, že neleží na přímce ST. Trojúhelník STA má úhel u T pravý nebo tupý. Kdyby totiž byl ostrý, byly by některé body strany TA, která celá leží v $\mathbf{M}$, blíže k S než bod T, což odporuje definici T. Je proto $TA < SA \leqq \leqq 1$. Budiž nyní $B \neq T$ bod z $\mathbf{M}$, ležící na přímce ST. B neleží mezi S a T, protože by byl blíže k S než T. S neleží mezi B a T, protože podle konvexity by bylo S v $\mathbf{M}$ proti předpokladu. Je tedy T mezi S a B, a B je blíže k T než k S, $TB < SB \leqq 1$.

2. KATEGORIE B

B–II–1a

V oboru všech přirozených čísel zaveďme operaci $*$ takto:

a) $\forall x : x * 1 = 1 * x = 1$;

b) je-li $x > 1$ a $y > 1$ a jsou-li $x = p_1 \ldots p_\lambda$, $y = q_1 \ldots q_\mu$ vyjádření čísel x, y jako součinů prvočinitelů, pak definujeme $x * y$ jako součin všech součtů $p_i + q_k$ $(i = 1, \ldots, \lambda, k = 1, \ldots, \mu)$.

Dokažte, že operace $*$ je distributivní vzhledem k násobení a uveďte číselné příklady.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Budiž $z = r_1 \ldots r_\nu$ vyjádření čísla z jako součinu prvočinitelů; pak je $(xy) * z$ součin všech součtů $p_i + r_j$ a $q_k + r_j$ $(i = 1, \ldots, \lambda, k = 1, \ldots, \mu, j = 1, \ldots, \nu)$, neboť $xy = p_1 \ldots p_\nu \,.\, q_1 \ldots q_\mu$ je vyjádření čísla xy jako součinu prvočinitelů. Tentýž výsledek dá $(x * z) \,.\, (y * z)$, neboť první činitel je součin všech součtů $p_i + r_j$, druhý je součin všech součtů $q_k + r_j$. Snadno se přesvědčíme, že podle a) je

$$(xy) * z = (x * z) \,.\, (y * z) \tag{1}$$

i v tom případě, když některé z čísel x, y, z je rovno 1.

ČÍSELNÉ PŘÍKLADY:

I. $x = 12, y = 15, z = 8$; $x = 2^2 \,.\, 3, y = 3 \,.\, 5, z = 2^3$. Je $xy = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5 = 180$; $(xy) * z = (2 + 2)^3 \,.\, (2 + 2)^3 \,.\, (3 + 2)^3 \,.\, (3 + 2)^3 \,.\, (5 + 2)^3 = 4^6 \,.\, 5^6 \,.\, 7^3 = 2^{12} \,.\, 5^6 \,.\, 7^3$; dále je $x * z = (2 + 2)^3 \,.\, (2 + 2)^3 \,.\, (3 + 2)^3 = 4^6 \,.\, 5^3 = 2^{12} \,.\, 5^3$, $y * z = (3 + 2)^3 \,.\, (5 + 2)^3 = 5^3 \,.\, 7^3$. Platí tedy skutečně (1).

II. $x = 18, y = 1, z = 25$; $x = 2 \,.\, 3^2, z = 5^2$. Je $(xy) * z = (2 \,.\, 3^2) * 5^2 = (2 + 5)^2 \,.\, (3 + 5)^4 = 7^2 \,.\, 8^4 = 7^2 \,.\, 2^{12}$; dále je $x * z = (2 \,.\, 3^2) * 5^2 = (2 + 5)^2 \,.\, (3 + 5)^4$, $y * z = 1 * 5^2 = 1$. Platí tedy skutečně (1).

B–II–1b

Do kružnice o středu S je vepsán konvexní čtyřúhelník

$ABCD$ tak, že S neleží uvnitř něho. Potom čtyřúhelník $ABCD$ má jedinou stranu maximální délky; dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Jestliže S leží na některé straně čtyřúhelníka $ABCD$, je tato strana průměrem kružnice, všechny ostatní strany jsou pak nutně kratší.

Jestliže S leží vně čtyřúhelníka $ABCD$, pak mezi čtyřmi přímkami AB, BC, CD, DA existuje jedna, která odděluje S od ostatních dvou vrcholů čtyřúhelníka; zvolme označení tak, aby přímka AB měla tuto vlastnost. Ukážeme, že je pak nutně $AB > BC$, $AB > CD$, $AB > DA$. Skutečně, body C, D leží oba na kratším z obou oblouků AB a úsečka AB je nejdelší možnou tětivou s koncovými body na tomto oblouku. Tětivy AD, CD, BC jsou nutně kratší, neboť body A, B, C, D jsou vesměs různé (jsou to vrcholy konvexního čtyřúhelníka).

B–II–2a

Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y, ktoré spĺňajú nerovnosť:

$$3(x^2 - 2) + (y - 1)^2 \leqq 6 \,.$$

Výsledok riešenia znázornite v pravouhlom súradnicovom systéme.

(6 bodov)

RIEŠENIE. Danú nerovnosť $3(x^2 - 2) + (y - 1)^2 \leqq 6$ upravme na tvar $3x^2 + (y - 1)^2 \leqq 12$ a odtiaľ je:

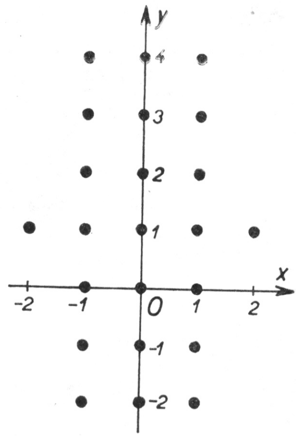
$$|y - 1| \leqq \sqrt{3(4 - x^2)} \,.$$

Definičným oborom danej nerovnosti sú zrejme x, pre ktoré je $4 - x^2 \geqq 0$. Tu vyhovujú tie x, pre ktoré je $|x| \leqq 2$.

Rozlišujme tieto prípady: $a)$ $|x| = 2$, b) $|x| = 1$, c) $|x| = 0$.

Ak $|x| = 2$, potom $|y - 1| \leqq 0$. Tu platí len znamienko rovnosti. V obore celých čísel je x: 2, -2 a y: 1. Tak dostávame tieto dvojice čísel, ktoré vyhovujú danej nerovnosti: (2, 1), (-2, 1).

Obr. 52



Ak $|x| = 1$, potom $|y - 1| \leqq 3$. Tejto nerovnosti vyhovujú y, pre ktoré platí: $-2 \leqq y \leqq 4$. V obore celých čísel je x: 1, -1 a y: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Danej nerovnosti vyhovujú tieto dvojice: (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-1, 4).

Ak $|x| = 0$, potom $|y - 1| \leqq 2\sqrt{3}$. V obore celých čísel môžeme poslednú nerovnosť nahradiť nerovnosťou $|y - 1| \leqq 3$, pretože $2\sqrt{3} \doteq 3{,}5$. Potom v obore celých čísel je x: 0 a y: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. Danej nerovnici vyhovujú tieto dvojice: (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4).

Spolu teda nerovnosť daná v úlohe je splnená pre 23 celočíselných dvojíc x, y. Grafické znázornenie riešenia je na obr. 52.

B–II–2b

V prostoru je dána přímka p a úsečka AB taková, že přímky p a AB jsou různé, nejsou mimoběžné a nejsou na sebe kolmé. Zvolme na úsečce AB libovolný bod Q

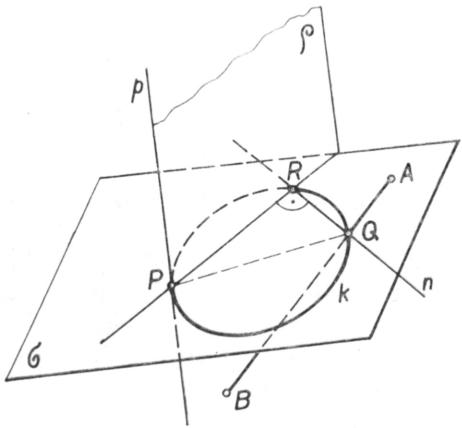
a dále zvolme libovolnou rovinu π, v níž leží přímka p, a označme X patu kolmice vedené bodem Q k rovině π.

Nalezněte množinu všech bodů X, když bod Q probíhá úsečku AB a když zároveň rovina π probíhá svazkem rovin, jehož osou je přímka p. Diskuse.

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. A. Zvolíme na úsečce AB libovolný bod Q. Pak mohou nastat dva případy:

(a) Nechť $Q \notin p$. Zvolme rovinu ϱ patřící do svazku rovin o ose p (obr. 53). Veďme bodem Q kolmici n k ro-



Obr. 53

vině ϱ; patu této kolmice označme R. Nechť $R \notin p$, $R \neq Q$. Přímka p leží v rovině ϱ, a proto $n \perp p$. Tedy kolmice n leží v rovině σ, která prochází bodem Q a je kolmá k přímce p. Označme P průsečík roviny σ a přímky p. Pak $\sphericalangle PRQ = 90°$. Odtud podle Thaletovy věty vyplývá, že každá pata R kolmice n vedené bodem Q k některé z rovin svazku rovin o ose p leží na kružnici k, která leží v rovině σ a jejímž průměrem je úsečka PQ.

Obráceně, je-li R libovolný bod kružnice k, pak mohou nastat tři případy:

1. Je-li $R = P$, pak příslušnou rovinou svazku s osou p, na níž je přímka $RQ = PQ$ kolmá, je ta rovina tohoto svazku, jejíž průsečnice s rovinou σ je tečnou kružnice k v bodě P.

2. Je-li $R = Q$, pak příslušnou rovinou svazku s osou p je rovina pQ, a kolmicí k ní, která má patu $R = Q$, je tečna ke kružnici k v bodě Q.

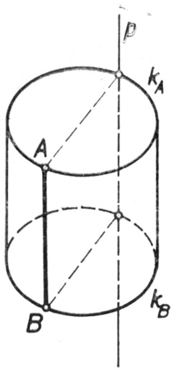
3. Je-li $R \neq P$ a $R \neq Q$, pak příslušnou rovinou svazku s osou p je rovina pR, a QR je zřejmě kolmicí na tuto rovinu, neboť $p \perp \sigma$ a $\sphericalangle QRP = 90°$.

V případě, že $Q \notin p$, je tedy množinou všech pat všech kolmic k rovinám svazku rovin o ose p, které procházejí bodem Q, výše popsaná kružnice k.

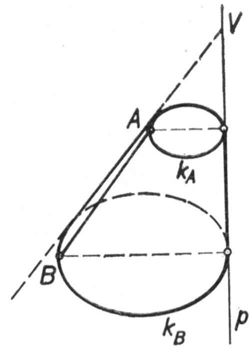
(b) Je-li $Q \in p$, tj. jestliže Q je průsečíkem přímek AB a p, pak množinou všech pat X všech kolmic k rovinám svazku rovin o ose p, které procházejí bodem Q, je zřejmě množina $\{Q\}$.

B. Na základě části A. můžeme vyřešit naši úlohu. Přímka AB není kolmá k přímce p, a proto body A a B neleží v téže rovině kolmé k přímce p. V případě, že $A \notin p$ ($B \notin p$), označme k_A (k_B) množinu všech pat všech kolmic na roviny svazku o ose p, jež přísluší k bodu $A(B)$. Při řešení naší úlohy může nastat právě osm případů. Na obr. 54 až 57 jsou základní čtyři případy, další dva obdržíme záměnou bodů A a B na obr. 55 a 56, dále situace na obr. 57 může být tří typů podle toho, zda kružnice k_A a k_B mají tentýž poloměr nebo zda poloměr kružnice k_A je větší (menší) než poloměr kružnice k_B. Hledanou množinou je vždy plášť **P** těles na těchto obrázcích. Vyplývá to z následujících dvou vlastností pláště **P** každého z těles na obr. 54, 55, 56 a 57.

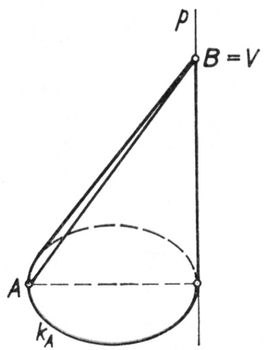
1. Každá rovina σ kolmá k přímce p a procházející bodem Q ležícím na úsečce AB protíná plášť **P** v kružnici



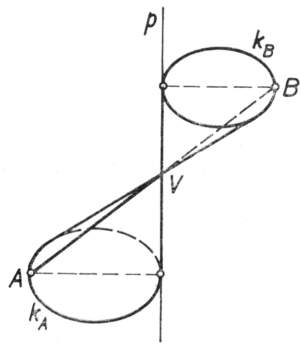
Obr. 54



Obr. 55



Obr. 56



Obr. 57

k, resp. v bodě Q, když $Q \in p$. Je-li P průsečíkem přímky p a roviny σ, pak úsečka PQ je průměrem kružnice k.

2. Každý bod $R \in \mathbf{P}$ buď leží na p, nebo leží aspoň na jedné kružnici k, která leží v rovině σ, jež je kolmá k p,

přičemž pro k platí: Označíme-li P průsečík přímky p a roviny σ a Q průsečík úsečky AB a roviny σ, pak PQ je průměrem kružnice k.

Tyto vlastnosti vyplývají v případě válce na obr. 54 z vlastností rovnoběžného posunutí kružnice k_A ve směru přímky p, v případě těles na obr. 55 až 57 se k důkazu těchto vlastností užije stejnolehlosti o středu V, kde V je průsečík přímek p a AB.

B–II–3a

Pro každé reálné číslo y označme $R(y)$ počet řešení rovnice

$$[x] = xy - 1973\,. \tag{1}$$

Dokažte tato tvrzení:

(i) je-li $y > 2$, je $1 \leqq R(y) \leqq 2$;

(ii) je-li $0 < 1974\,y < 1$, je $R(y) = 0$;

(iii) existuje y, pro které je $R(y) = 1973$.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Při daném reálném y hledejme řešení rovnice (1). Podle definice celé části $[\,.\,]$ je rovnice (1) ekvivalentní nerovnostem (současně platným)

$$xy - 1973 \leqq x < xy - 1972\,. \tag{2}$$

Přitom je z (1) vidět, že xy musí být celé číslo.

Je-li $y > 1$, tj. $y - 1 > 0$, dostaneme ze (2) přímým výpočtem nerovnosti

$$\frac{1972}{y-1} < x \leqq \frac{1973}{y-1}\,,$$

tj.

$$1972\,\frac{y}{y-1} < xy \leqq 1973\,\frac{y}{y-1}\,. \tag{3}$$

Při $y > 1$ je $\frac{y}{y-1} > 1$, takže v mezích daných nerovnostmi (3) leží vždy alespoň jedno celé číslo xy; pro $y > 1$ je tedy $R(y) \geqq 1$.

Je-li $y > 2$, je $\frac{y}{y-1} < 2$, takže v mezích daných nerovnostmi (3) leží vždy nejvýše dvě celá čísla; pro $y > 2$ platí tedy $R(y) \leqq 2$.

Tím je dokázáno tvrzení (i).

Je-li $0 < 1974y < 1$, je ovšem také $0 < y < 1$, tedy $y - 1 < 0$. Z nerovností (2) dostaneme obdobně nerovnosti

$$1972 \frac{y}{1-y} < -xy \leqq 1973 \frac{y}{1-y}. \qquad (4)$$

Jestliže je $0 < 1974y < 1$, potom

$$0 < \frac{y}{1-y} < \frac{1}{1973};$$

podle (4) má být

$$0 < 1972 \frac{y}{1-y} < -xy \leqq 1973 \frac{y}{1-y} < 1.$$

Je zřejmé, že žádné takové celé číslo xy neexistuje, tj. $R(y) = 0$ — platí tvrzení (ii).

Poněvadž xy má být celé číslo, jsou nerovnosti (3) ekvivalentní nerovnostem

$$\left[1972 \frac{y}{y-1}\right] + 1 \leqq xy \leqq \left[1973 \frac{y}{y-1}\right]. \qquad (5)$$

Při $y > 1$ je tedy

$$R(y) = \left[1973 \frac{y}{y-1}\right] - \left[1972 \frac{y}{y-1}\right]. \qquad (6)$$

Položíme speciálně $y = \dfrac{1973}{1972} > 1$. Je pak

$$\frac{y}{y-1} = 1973$$

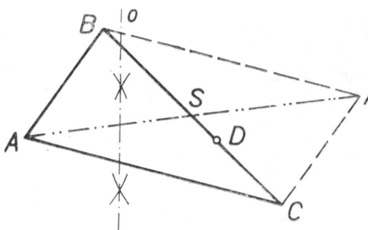
a podle (6) je

$$R(y) = [1973 \,.\, 1973] - [1973 \,.\, 1972] =$$
$$= 1973\,(1973 - 1972) = 1973;$$

platí tedy tvrzení (iii).

B–II–3b

V rovině sú dané dva rôzne body A a D. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník tej vlastnosti, že úsečka BC obsahuje bod D. Nájdite geometrické miesto stredov strán BC všetkých takých trojuholníkov ABC. (7 bodov).



Obr. 58a

ŘEŠENÍ. Je-li v takovém trojúhelníku ABC bod S středem strany BC (obr. 58a), pak

$$SB = SC < SA\,, \tag{1}$$

jak plyne z rovnoběžníku $ACA'B$, v němž úhel $\sphericalangle\, CAB$ je ostrý.

Je proto také

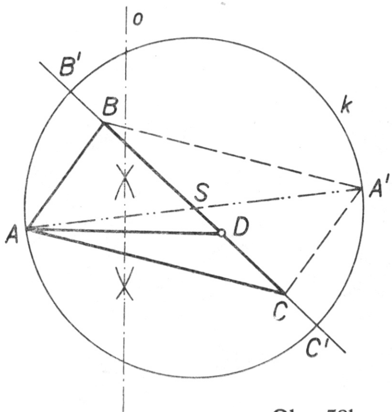
$$SD < SA, \tag{2}$$

neboť $SD \leqq SB$.

Dále je zřejmé, že bod S může ležet na přímce AD jen tehdy, je-li $S = D$.

Tím jsme dokázali, že bod S leží v té otevřené polorovině vyťaté osou úsečky AD, která obsahuje bod D, a přitom na přímce AD leží jen v případě $S = D$.

Ukažme, že tím je popsána hledaná množina. Je-li $S \equiv D$, existuje zřejmě ostroúhlý trojúhelník ABC, pro který je bod D středem strany BC (např. rovnostranný). Nechť S je nyní bod uvedené poloroviny, neležící na přímce AD. Pak přímka SD neprochází bodem A, a přitom $SD < SA$. Kružnice $k = (S; SA)$ tedy obsahuje bod D uvnitř a protíná přímku SD v bodech, které označíme B' a C' (obr. 58b). Trojúhelník $AB'C'$ je pravoúhlý, s pravým úhlem u vrcholu A, bod D leží uvnitř strany $B'C'$ a S je středem $B'C'$. Zvolíme-li tedy na straně $B'C'$ body B a C tak, že $BB' = CC'$ je dostatečně malé (aby trojúhelník ABC byl ostroúhlý, a aby úsečka BC obsahovala bod D) dostaneme trojúhelník vyhovující úloze.



Obr. 58b

ZÁVĚR. Hledaná množina se skládá z poloroviny vyťaté osou úsečky AD, z níž jsou vyňaty body na přímce AD, s výjimkou bodu D, který je ponechán.

C–II–1a

V školskej kvízovej súťaži obsadili prvé štyri miesta Dušan, Milan, Tomáš a Václav. Pri hádke ich priateľov o poradí, v akom skončili, odzneli tvrdenie:

Cyril: Prvý bol Dušan, druhý Milan, tretí Tomáš, štvrtý Václav.
Emil: Vyhral Václav, Tomáš bol druhý, Dušan tretí, Milan štvrtý.
Ivan: Milan bol prvý, Tomáš druhý, Václav tretí, Dušan štvrtý.

Je pravda, že Tomáš nezvíťazil. Z výrokov Emila a Ivana je pravdivý práve jeden, z Cyrilovych výrokov ani jeden. Aké bolo teda skutočné poradie?

(5 bodov)

RIEŠENIE. Z uvedených údajov vyplýva hned, že zvíťazil Václav alebo Milan a Tomáš obsadil buď druhé alebo štvrté miesto.

Predpokladajme, že zvíťazil Václav. Potom z toho, čo vieme o Emilových výrokoch, vyplýva, že Tomáš nebol druhý. Musel preto obsadiť štvrté miesto. Druhé a tretie miesto zostáva pre Dušana a Milana. Z nepravdivosti Cyrilovych tvrdení vychádza, že Dušan bol druhý a Milan tretí. Takto zistené poradie však nesúhlasí s tým, že práve jeden z Ivanových výrokov je pravdivý.
Z toho vyplýva, že prvý bol Milan. Keďže posledné tri výroky Ivana sú nepravdivé, musel byť Tomáš štvrtý. Pre Dušana a Václava nám zostáva druhé a tretie miesto. Václav však na základe nepravdivosti Ivanovho tretieho výroku nemohol byť tretí, čo znamená, že bol druhý

a tretie miesto Dušana potvrdzuje aj jediný Emilov pravdivý výrok.

Skutočné poradie teda bolo: Milan, Václav, Dušan, Tomáš.

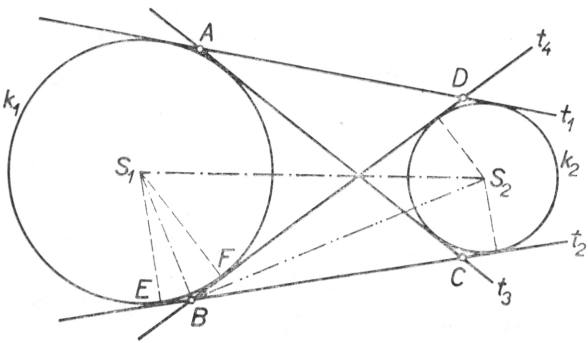
C-II-1b

Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (S_1; r_1)$ a $k_2 = (S_2; r_2)$, pro něž platí $S_1S_2 > r_1 + r_2$.

Narýsujte obrázek pro $r_1 = 3{,}5$ cm, $r_2 = 2$ cm a $S_1S_2 = 9$ cm.

Označme A, B, C, D body, z nichž každý je průsečíkem jedné vnitřní a jedné vnější tečny daných kružnic.

Dokažte, že body A, B, C, D, S_1 a S_2 leží na téže kružnici. (5 bodů)



Obr. 59

ŘEŠENÍ. Jestliže existuje kružnice k procházející body A, B, C, D, S_1, S_2, pak z osové souměrnosti dvojic bodů A, B a C, D podle přímky S_1S_2 plyne, že její střed leží na přímce S_1S_2. Kružnice k, pokud existuje, je tedy kružnicí opsanou nad průměrem S_1S_2. Tvrzení obsažené v úloze tudíž bude dokázáno, jestliže dokážeme, že pro každý průsečík X jedné vnější a jedné vnitřní tečny kružnic k_1, k_2 platí

$$\sphericalangle S_1XS_2 = 90°.$$

Poslední tvrzení dokážeme např. pro průsečík B tečen t_4 a t_2 (obr. 59). Body E a F jsou po řadě body dotyku tečen t_2 a t_4 s kružnicí k_1. Úhly EBF a FBC jsou vedlejší. Přímky S_1B a S_2B jsou zřejmě osy těchto dvou úhlů, a proto

$$\sphericalangle S_1BS_2 = 90°.$$

C–II–2a

Podľa gregoriánského kalendára je priestupný každý rok, ktorého poradové číslo je deliteľné štyrmi s výnimkou posledného roku tých storočí, ktorých poradové čísla nie sú štyrmi deliteľné. 29. február 1972 pripadol na útorok.

a) Určte, na ktorý deň týždňa pripadol 29. február najzriedkavejšie od reformy kalendára roku 1582 do roku 1973.

b) Ako sa podelia o 29. február jednotlivé dni týždňa v rokoch 1973 až 2400, ak nedojde k reforme kalendára.

(6 bodov)

RIEŠENIE. Kvôli zjednodušeniu zápisu riešenia nazvime 29. február dňom V a jednotlivé dni týždňa označme číslami takto: pondelok — 1, utorok — 2, streda — 3, štvrtok — 4, piatok — 5, sobota — 6, nedeľa — 7.

a) V priebehu storočia prejde od jedného dňa V po druhý $4 \,.\, 365 + 1$ dní, tj. 208 tyždňov a 5 dní. Deň V pripadá preto v priebehu storočia na jednotlivé dni týždňa v tomto poradí (zapíšeme si poradie posledných 8 priestupných rokov):

$$2, 7, 5, 3, 1, 6, 4, 2 \,.$$

Pri prechode zo storočia, ktorého poradové číslo nie je štýrmi deliteľné, do nasledujúceho storočia prejde od posledného dňa *V* jedného storočia do prvého dňa *V* nasledujúceho storočia 8 . 365 + 1 dní, tj. 417 týždňov a 2 dni.

V storočí, ktorého poradové číslo je deliteľné štyrmi je celkom 25 dní *V*, v ostatných storočiach je o jeden deň *V* menej.

Z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že poradie doterajších 18 dní *V* 20. storočia začíná pondelkom, tj. číslom 1 a deň *V* pripadol na 1, 6, 4, 2 po trikrát, na 7, 5, 3 po dvakrát.

Postupnosť 24 dní *V* 19. storočia končila sobotou, tj. číslom 6 a začínala číslom 3 (streda), pričom sa v nej vyskytli 3, 1, 6 po štyri razy a 4, 2, 7, 5 po tri razy.

Postupnosť 24 dní *V* 18. storočia končila číslom 1, začínala číslom 5 a vyskytovali sa v nej štyri razy 5, 3, 1, po tri razy 6, 4, 2, 7.

V 17. storočí sa postupnosť 24 dní *V* končila číslom 3 a začínala zrejme číslom 7, pričom sa v nej vyskytuje 7, 5, 3 po štyri razy, 1, 6, 4, 2 po tri razy.

Zostává nám ešte zistiť, na ktoré dni týždňa pripadol deň *V* od reformy kalendára roku 1582 do roku 1600. Bolo to celkom 5 dní *V*, ktoré za sebou nasledovali v tomto poradí: 3, 1, 6, 4, 2.

Zistené výsledky zapíšeme do tabuľky, ktorá udává, koľko ráz pripadol deň *V* na jednotlivé dni týždňa od roku 1582 do roku 1973 (viz tabuľka str. 157).

Ako priamo z tabuľky vyplýva, najzriedkavejšie za uvedené obdobie pripadol 29. február na nedeľu.

b) Od roku 1973 do konca 20. storočia zostáva ešte 7 dní *V*, ktoré budú nasledovať v poradí: 7, 5, 3, 1, 6, 4, 2. Postupnosť dní *V* v 21. storočí začne teda opäť číslom 7 (nedeľa), ako tomu bolo v 17. storočí a za predpokladu, že nedojde k reforme kalendára, sa v rokoch 2001 —

Deň týždňa	16. stor.	17. stor.	18. stor.	19. stor.	20. stor.	Spolu
1-pondelok	1	3	4	4	3	15
2-utorok	1	3	3	3	3	13
3-streda	1	4	4	4	2	15
4-štvrtok	1	3	3	3	3	13
5-piatok	—	4	4	3	2	13
6-sobota	1	3	3	4	3	14
7-nedeľa	—	4	3	3	2	12

2400 bude presne opakovať situácia z rokov 1601—2000. Pri rozdelení dní *V* na jednotlivé dni týždňa dostaneme preto po odčítaní prvého stĺpca (16. stor.) a po pripočítaní jednotky v každom riadku (dni *V* do konca 20. storočia) tento výsledok:

pondelok	utorok	streda	štvrtok	piatok	sobota	nedeľa
15	13	15	13	14	14	13

Jsou dány kruhy $\mathbf{K}_1 = (S_1; 70\ \text{mm})$ a $\mathbf{K}_2 = (S_2; 15\ \text{mm})$, přičemž $S_1S_2 = 85$ mm. Dále je dán bod M takový, že $MS_1 = 35$ mm, $MS_2 = 50$ mm.

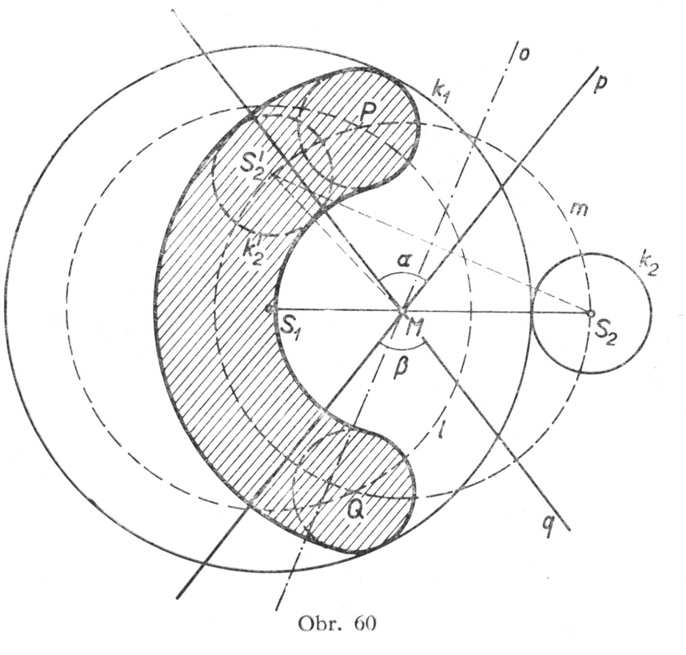
Bodem M veďme přímku o tak, aby kruh souměrně sdružený s $\mathbf{K}_2$ podle o ležel v kruhu $\mathbf{K}_1$.

a) Jakou část roviny vyplní všechny tyto přímky o?

b) Jakou část roviny vyplní všechny tyto kruhy?

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Sestrojme jednu přímku o bodem M jako na obr. 60 a podle ní k S_2 souměrně sdružený bod S_2'. Pak



Obr. 60

platí $MS_2 = MS_2'$. Proto všechny body souměrně sdružené k S_2 podle přímek svazku M leží na kružnici $m = (M, MS_2)$. Kruh $\mathbf{K}_2'$ souměrně sdružený s $\mathbf{K}_2$ podle přímky svazku M se bude v krajním případě dotýkat kružnice k_1 uvnitř; jeho střed pak leží na kružnici $l = (S_1; r_1 - r_2 = 55$ mm). Vzhledem k vzájemné poloze kružnic m a l jsou takové body dva: P a Q na obr. 60. Osy úhlů $\sphericalangle S_2MP$ a $\sphericalangle S_2MQ$ jsou krajní případy os souměrnosti vedených bodem M, podle nichž přejde kruh $\mathbf{K}_2$ v kruh ležící ještě v kruhu $\mathbf{K}_1$; nazveme je po řadě p, q.

a) Přímky p, q jsou v našem případě různoběžné a vytvoří dvě dvojice vrcholových úhlů. Každá přímka svazku M, která patří úhlům α, β neobsahujícím kruh $\mathbf{K}_2$, je osou souměrnosti podle podmínek úlohy.

b) Kruhy souměrně sdružené s $\mathbf{K}_2$ podle přímek ležících ve vrcholových úhlech α, β vyplní útvar, který je na obr. 60 vyšrafován; sestává z výseče mezikruží a dvou půlkruhů.

C–II–3a

Dokažte, že pro každé reálné $c > 2$ má rovnice

$$x = \left[\frac{1973 + x}{c}\right] \tag{1}$$

alespoň jedno a nejvýše dvě řešení.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Má-li rovnice (1) řešení, musí být x celé číslo. Podle definice celé části musí pak platit nerovnosti

$$x \leq \frac{1973 + x}{c} < x + 1\,, \tag{2}$$

tj. zároveň

$$(c-1)x \leqq 1973$$

a

$$(c-1)x > 1973 - c\,.$$

Celé číslo x musí tedy splňovat nerovnosti

$$\frac{1973-c}{c-1} < x \leqq \frac{1973}{c-1}\,. \tag{3}$$

Obráceně nechť x je celé číslo, které při daném $c > 2$ vyhovuje nerovnostem (3). Potom vyhovuje také nerovnostem (2), takže skutečně platí (1): toto číslo x je řešením rovnice (1).

Zbývá tedy jen zjistit, kolik celých čísel vyhovuje nerovnostem (3). Poněvadž $c > 2 > 1$, je

$$\left|\frac{1973}{c-1} - \frac{1973-c}{c-1}\right| = \frac{c}{c-1} > 1\,,$$

takže nutně aspoň jedno celé číslo leží v mezích udaných nerovnostmi (3). Na druhé straně je však při $c > 2$

$$\frac{c}{c-1} < 2\,,$$

takže v těchto mezích leží nanejvýš dvě celá čísla. Rovnice (1) má tedy skutečně při libovolném $c > 2$ alespoň jedno a nejvýše dvě řešení.

C–II–3b

V rovině je dáno pět bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolika způsoby je možno vybrat čtyři z nich tak, aby tvořily vrcholy konvexního čtyřúhelníka? Diskuse.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Rozlišujeme tři případy. První je ten, že dané body jsou vrcholy konvexního pětiúhelníka. Pak vypuštěním kteréhokoli z nich dostáváme čtveřici, jež má požadovanou vlastnost. V tomto případě má úloha 5 řešení.

V druhém případě probereme situaci, v níž čtyři z daných bodů (řekněme A_1, A_2, A_3, A_4) jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka a zbývající (bod A_5) leží uvnitř čtyřúhelníka. Bod A_5 nemůže ležet ani na úhlopříčce A_1A_3 ani na A_2A_4. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že A_5 je uvnitř trojúhelníka A_1A_2B, kde B je průsečík A_1A_3 a A_2A_4. Pak vypuštěním jednoho z bodů A_1, A_2 nebo A_5 vznikne požadovaná čtveřice. V tomto případě má úloha tři řešení.

Poslední případ vede k diskusi, že tři body (řekněme A_1, A_2, A_3) jsou vrcholy trojúhelníka, zbývající dva (body A_4, A_5) jsou uvnitř. Přímky A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 rozdělí trojúhelník $A_1A_2A_3$ na šest trojúhelníků. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že A_5 leží uvnitř trojúhelníka A_1CA_4, kde C je průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4. Pak vypuštěním bodu A_2 ze základní pětice vznikne požadovaný konvexní čtyřúhelník. Zde existuje jen jediné řešení.

SHRNUTÍ. Úloha má buď 5, nebo 3, anebo 1 řešení podle toho, jak jsou dané body v rovině umístěny.

4. KATEGORIE Z

Z–II–1

Nalezněte nejmenší přirozené číslo x takové, aby každé z čísel x, 616, 700, 924 bylo dělitelem součinu ostatních tří.

ŘEŠENÍ. Nechť x je takové přirozené číslo, že každé z čísel x, 616, 700, 924 dělí součin zbývajících tří. Platí

$$\begin{aligned} 616 &= 2^3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,, \\ 700 &= 2^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,, \\ 924 &= 2^2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 11 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Z (1) plyne, že číslo 924 dělí součin 616 . 700 . x, právě když existuje přirozené číslo a takové, že

$$x = 3a \,. \tag{2}$$

Dále podle (1) platí, že číslo 700 dělí součin 616 . 924 . x, právě když

$$x = 5^2 \,.\, b \,, \tag{3}$$

kde b je přirozené číslo.
Číslo 616 dělí součin 700 . 924 . x, jak vyplývá z (1) pro každé přirozené číslo x.

Nejmenší přirozené číslo x vyhovující zároveň podmínkám (2) a (3) a dělící přitom součin 616 . 700 . 924 je zřejmě číslo

$$3 \,.\, 5^2 = 75 \,.$$

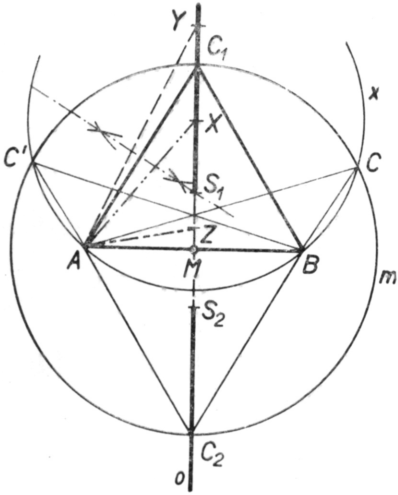
Z–II–2

Je dána úsečka AB a kružnice m opsaná kolem středu M úsečky AB poloměrem větším než je polovina úsečky AB. Nechť S je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC.

a) Vyšetřete geometrické místo bodů S, když bod C probíhá kružnici m.

b) Jaké bude toto geometrické místo, když poloměr kružnice m bude rovný polovině délky úsečky AB?

ŘEŠENÍ. a) Středy kružnic, opsaných trojúhelníkům ABC musí ležet na ose o úsečky AB, která je společnou stranou všech uvažovaných trojúhelníků (obr. 61).



Obr. 61

Je otázka, zda *obráceně* každý bod přímky *o* patří hledanému geometrickému místu, které nazveme **G**. Do **G** patří body S_1, S_2, které jsou středy kružnic opsaných rovnoramenným trojúhelníkům ABC_1 a ABC_2 (kde C_1, C_2 jsou průsečíky *o* s *m*).

Každý bod *X* vnitřku úsečky S_1C_1 (popř. S_2C_2) je středem kružnice $x = (X; AX)$, která protne kružnici *m* ve dvou bodech (vzniknou tak dokonce dva uvažované trojúhelníky). Z trojúhelníku AS_1X plyne $AX > AS_1$. Protože $AS_1 = S_1C_1$ a $S_1C_1 > XC_1$, je $AX > XC_1$. Kružnice $(X; AX)$ tedy protíná kružnici *m*.

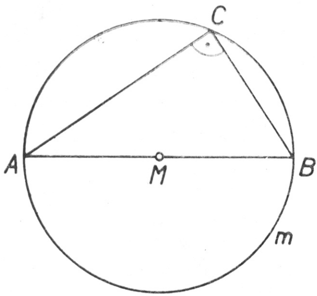
Proto bod *X* patří do **G**. Také každý bod *Y* prodloužení úsečky S_1C_1 za bod C_1 (popř. S_2C_2 za bod C_2) patří do **G**, neboť kružnice $y = (Y; AY)$ protne vždy kružnici *m*.

Naproti tomu bod *M* do **G** nepatří, neboť kružnice $(M; MA)$ a *m* se neprotnou.

Je-li *Z* bod vnitřku úsečky MS_1 (popř. MS_2), pak z trojúhelníka AZS_1 plyne $AZ < AS_1$. Dále platí $AS_1 = S_1C_1$ a $S_1C_1 < ZC_1$. Proto je $AZ < ZC_1$, takže kružnice *m* a $z = (Z; AZ)$ se neprotnou. Bod *Z* do **G** tedy nepatří.

b) Je-li poloměr kružnice *m* roven $\frac{1}{2} AB$, splyne *m*

Obr. 62



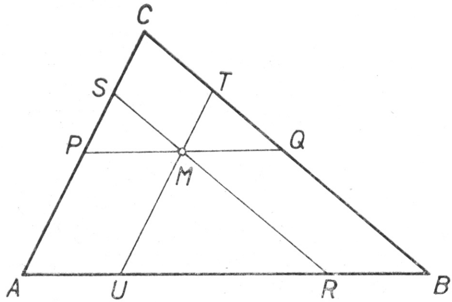
s kružnicí opsanou každému trojúhelníku ABC. Pak **G** obsahuje jediný bod — střed M kružnice m.

ZÁVĚR. V případě a) tvoří **G** dvě polopřímky S_1C_1 a S_2C_2 (viz obr. 61), v případě b) jediný bod M (viz obr. 62).

Z–II–3

Bod M leží uvnitř $\triangle ABC$ a je $PQ \parallel AB$, $RS \parallel BC$, $TU \parallel CA$ (viz obr. 63). Dokažte, že

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = 2\,.$$



Obr. 63

ŘEŠENÍ. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ARS \sim \sim \triangle ABC$ plyne

$$\frac{RS}{BC} = \frac{AR}{AB}\,. \tag{1}$$

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle UBT \sim \triangle ABC$ plyne

$$\frac{UT}{AC} = \frac{UB}{AB}. \tag{2}$$

Podle (1) a (2) platí

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = \frac{PQ + AR + UB}{AB}. \tag{3}$$

Čtyřúhelníky $AUMP$ a $RBQM$ jsou rovnoběžníky, a proto

$$AU = PM \text{ a } RB = MQ,$$

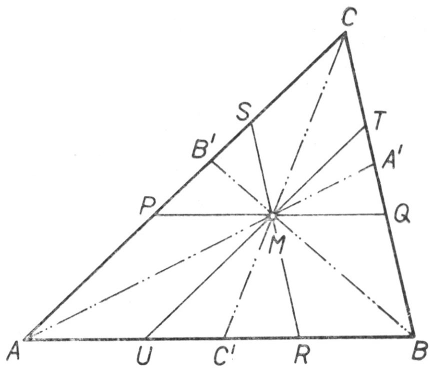
tj.

$$PQ = PM + MQ = AU + RB. \tag{4}$$

Dosadíme-li podle (4) do (3), dostáváme

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = \frac{(AU + RB) + AR + UB}{AB} =$$

$$= \frac{(AU + UB) + (AR + RB)}{AB} = \frac{AB + AB}{AB} = 2, \text{c. b. d.}$$



Obr. 64

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme po řadě A', B', C' průsečíky přímek AM, BM, CM (obr. 64) s protějšími stranami. Podle řešení úlohy Z–I–3 b) pak platí

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CM}{CC'} = 2 . \qquad (*)$$

Z podobnosti $\triangle ARM \sim \triangle ABA'$ a $\triangle ARS \sim \triangle ABC$ dostáváme

$$\frac{AM}{AA'} = \frac{AR}{AB}, \qquad \frac{AR}{AB} = \frac{RS}{BC},$$

takže

$$\frac{AM}{AA'} = \frac{RS}{BC} .$$

Podobně dokážeme, že

$$\frac{BM}{BB'} = \frac{TU}{CA}, \qquad \frac{CM}{CC'} = \frac{PQ}{AB} .$$

Platí tedy

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = \frac{CM}{CC'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'},$$

tj. podle rovnosti $(*)$

$$\frac{PQ}{AB} + \frac{RS}{BC} + \frac{TU}{CA} = 2 .$$

Z–II–4

Je dán rotační válec V s výškou v a poloměrem podstavy r. Vyšetřujme všechny rotační válce V', jejichž poloměr podstavy je $r + m$ a výška je $v - m$, kde $0 < m < v$. Určete číslo m tak, aby povrch válce V' byl dvojnásobkem povrchu válce V. Jaká je podmínka řešitelnosti?

ŘEŠENÍ. a) Válec V má povrch

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv .$$

Válec V' má poloměr $r' = r + m$ a výšku $v' = v - m$. Povrch válce V' je tedy

$$S' = 2\pi (r + m)^2 + 2\pi (r + m) . (v - m) .$$

Podle textu úlohy platí

$$S' = 2 . S ,$$

tj.

$$2\pi (r + m)^2 + 2\pi (r + m)(v - m) = \\ = 2 . (2\pi r^2 + 2\pi rv) .$$

Po úpravě dostáváme

$$2\pi (r + m) . [(r + m) + (v - m)] = 4\pi r (r + v) ,$$

odkud vyplývá

$$(r + m) . (r + v) = 2r (r + v) .$$

Zřejmě $r + v \neq 0$, a proto

$$r + m = 2r ,$$

tj.

$$m = r .$$

ZKOUŠKA. Pro $m = r$ platí $r' = 2r$ a $v' = v - r$. Potom je

$$S' = 2\pi (2r)^2 + 2\pi . 2r (v - r) = \\ = 8\pi r^2 + 4\pi rv - 4\pi r^2 = \\ = 2 . (2\pi r^2 + 2\pi rv) = 2 . S .$$

b) Je-li dán libovolný válec V o poloměru podstavy r a výšce v, pak podle odstavce a) má válec V' splňující podmínky uvedené v textu úlohy $r' = 2r$ a výšku $v' = v - r$. Velikost výšky musí být kladné číslo, a proto válec V' existuje, právě když

$$v > r .$$