VI. Zpráva o XIV. mezinárodní matematické olympiádě

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 21. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1971-1972. 14. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. pp. 167–185.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404627

VI. Zpráva o XIV. mezinárodní matematické olympiádě

XIV. mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 5.—18. VII. 1972 v *Polsku*, ve *Varšavě* a v *Toruni*. Jejím pořadatelem bylo polské ministerstvo osvěty a výchovy.

Průběh *XIV. MMO* odpovídal v podstatných rysech tradičnímu programu *MMO*, jak se v minulých letech již ustálil. Nejprve se 5. VII. sjela do *Varšavy* mezinárodní *jury* složená z vedoucích delegací zúčastněných zemí, aby pod vedením svého předsedy, jímž byl *prof. S. Balcerzyk* z toruňské university, vybrala úlohy, připravila soutěž a řídila pak její další průběh. Přípravné práce skončily 8. VII. Mezitím přijeli *do Varšavy* také zástupci vedoucích a osmičlenná družstva soutěžících žáků. *Žáci* však byli ihned od svých vedoucích odděleni a přísně izolováni; péči o ně převzali polští průvodci — tlumočníci. Již 8. VII. odjeli žáci do *Toruně*. Tam je později — oklikami a ve stálé izolaci — následovala také jury.

Vlastní soutěž se konala *v Toruni* ve dnech 10. a 11. VII. Po ní měli žáci již volno a mohli se na velkém autobusovém výletě do severních částí Polska *(Olštýn, Frombork, Malbork)* seznamovat s přírodními krásami a historickými památkami tohoto kraje. *Jury* mezitím hodnotila žákovská řešení soutěžních úloh; hodnocení vedoucích delegací sjednocovali jako obvykle koordinátoři z řad mladých polských matematiků, většinou bývalých olympioniků. Na závěrečném zasedání jury dne 14. VII. bylo pak dohodnuto konečné rozdělení cen.

Po návratu žáků z výletu odjeli všichni účastníci *MMO* na druhý, společný výlet *do Poznaně*. Cestou navštívili též praslovanskou osadu v *Biskupíně* a město *Hnězdno*. Z Poznaně se pak

16. VII. všichni vrátili znovu *do Varšavy*, kde se 17. VII. konalo slavnostní zakončení *XIV. MMO* spojené s rozdílením cen.

V průběhu let vyrostla *MMO* postupně v rozsáhlou mezinárodní akci, jejíž význam daleko přesahuje rámec samotné matematiky. Svědčila o tom též kulturní a společenská část programu *XIV. MMO.* Velkou pozornost věnovaly *MMO* polské orgány školské správy. Ministr osvěty a výchovy *J. Kuberski* přijal 6. VII. vedoucí delegací a na zakončení uspořádal 17. VII. v paláci *v Łazieńkách* druhé přijetí pro vedoucí i jejich zástupce. Na zahájení soutěže *v Toruni* dne 10. VII. byl přítomen náměstek ministra *J. Wolczyk*. Také představitelé města *Toruně* plně oceňovali význam *MMO*; setkali se s celou jury na přijetí uspořádaném 11. VII. v prostorách historické toruňské radnice.

MMO se dostalo také patřičné publicity v polském tisku. Toruňský denník *Nowości* věnoval *MMO* při zahájení značnou část své titulní strany dne 11. VII; varšavské deníky přinesly 18. VII. po zakončení *MMO* zprávu o jejích výsledcích.

XIV. MMO se zúčastnily delegace ze 14 zemí, a to: *Rakouska (A), Bulharska (BG), Kuby (C), Československa (CS), NDR (D), Velké Británie (GB), Maďarska (H), Mongolska (M), Holandska (NL), Polska (PL), Rumunska (R), Švédska (S), Sovětského svazu (SU)* a *Jugoslávie (YU)*. Kromě toho byla od 14. VII. přítomna též pozorovatelka z *NSR*.

Zúčastněné země vyslaly k soutěži vesměs osmičlenná žákovská družstva, pouze z *Kuby* přijeli jen tři žáci; celkem bylo 107 soutěžících. *Československo* vyslalo družstvo osmi žáků gymnasií, byli to:

1. *Jan Brychta*, Praha (Pražačka),
2. *Pavel Ferst*, Praha (Sladkovského),
3. *Jan Frynta*, Praha (W. Piecka),
4. *Karel Horák*, Strakonice,
5. *Miroslav Kmošek*, Brno (kpt. Jaroše),

6. *Petr Slačálek*, Praha (W. Piecka),
7. *Jaromír Šimša*, Ostrava (Šmeralova),
8. *Imrich Vrťo*, Rimavská Sobota.

Vedoucím čs. delegace byl *dr. František Zítek, CSc.*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze, zástupcem vedoucího byl *dr. Jozef Moravčík, CSc.*, docent Vysoké školy dopravní v Žilině.

Vlastní soutěž *XIV. MMO* spočívala jako obvykle v řešení šesti matematických úloh, které mezinárodní jury vybrala z materiálů připravených polskými pořadateli na základě návrhů došlých ze zúčastněných zemí. Na rozdíl od některých minulých let jury tentokráte výslovně opustila zásadu, že z jedné země může být přijata nejvýše jedna úloha, a dala přednost kvalitě úloh. To se nesporně příznivě odrazilo v konečném výběru. I když dobrých návrhů, zvláště ze stereometrie, nebylo mnoho, podařilo se poměrně brzy sestavit soubor šesti úloh dosti vyvážený, přiměřeně obtížný a odpovídající vcelku tradicím *MMO*.

Přijaté úlohy byly rozděleny do dvou skupin; *první* tři úlohy řešili žáci dne 10. VII., *druhé* tři úlohy 11. VII. *První den* měli na řešení úloh k dispozici 4 hodiny čistého času, *druhý den* o půl hodiny více, neboť poslední, šestá úloha byla považována za zvlášť obtížnou.

Návrhy těchto úloh došly ze *Sovětského svazu* (úloha 1), *Holandska* (úlohy 2 a 4), *Velké Británie* (úlohy 3 a 6) a *Bulharska* (úloha 5); původní znění šesté úlohy však bylo v průběhu přípravných prací jury dosti pozměněno (zjednodušeno).

Obtížnost úloh ohodnotila jury body: za řešení první úlohy mohli soutěžící získat 5 bodů, za druhou úlohu 6 bodů, za úlohy 3, 4 a 5 po 7 bodech a za šestou úlohu 8 bodů; celkem tedy 40 bodů.

O kvalitě soutěžících svědčí, že *osm žáků* získalo maximální počet 40 bodů; ti byli ovšem odměněni *prvními cenami*. Ostatní ceny rozdělila jury takto: 16 *druhých cen* žákům, kteří získali 30—39 bodů a 30 *třetích cen* žákům, kteří získali 19—29 bodů.

Kromě toho byly uděleny 3 *zvláštní ceny* (za elegantní, resp. originální řešení některých úloh).

Čtyři českoslovenští žáci získali třetí ceny; byli to *Jan Brychta* (26 bodů), *Imrich Vrťo* (21 bodů), *Jaromír Šimša* (20 bodů) a *Miroslav Kmošek* (19 bodů). Celkem získalo celé československé družstvo 130 bodů, což v neoficiální klasifikaci družstev podle počtu bodů znamenalo deváté místo.

Celkové výsledky dosažené zúčastněnými družstvy jsou shrnuty v *tabulce na str. 171.*

ÚLOHY XIV. MMO

V této části zprávy přinášíme české texty úloh *XIV. MMO* a jejich řešení. V některých případech jde o upravená řešení autorská, jindy zase o upravené verze řešení, jak je podali soutěžící. Na rozdíl od minulých let tedy nereprodukujeme řešení předložená československými účastníky *MMO*, a to z důvodů technických a věcných.

O našem družstvu jako celku lze říci, že (poměrně) uspělo v úloze 1, 2 a 4, bylo slabší v úloze 3 a 6 a vůbec si nevědělo rady s úlohou 5. Při přípravě účastníků olympiády v příštím roce 1972/73 bude nutno vyvodit z této situace některé závěry, jako např. to, že bude třeba věnovat více času přípravě elementů analýzy. Stálým problémem je i — jak se letos znovu projevilo — psychická kondice a taktická příprava.

MMO–1

1. Dokažte, že v libovolné množině deseti různých dvojciferných přirozených čísel existují dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že součty jejich prvků jsou stejné.

ŘEŠENÍ. Libovolná množina o deseti prvcích má 1023 ne-

Tabulka

Družstva	Počet cen				Celkem bodů
	I	II	III	zvl.	
A			5		136
BG			2		120
C *)					14
CS			4		130
D	1	3	4	1	239
GB		2	4		179
H	3	3	2		263
M					49
NL					51
PL	1	1	1	1	160
R	1	3	1	1	206
S **)			2		60
SU	2	4	2		270
YU			3		136

*) V družstvu *Kuby* byli jen tři žáci.

**) Jeden *švédský žák* se nezúčastnil druhého dne soutěže a nebyl klasifikován.

prázdných podmnožin. Součet nejvýše deseti dvojciferných čísel je nejvýše roven 990. Podle *Dirichletova principu* existují tedy vždy dvě neprázdné podmnožiny dané množiny deseti čísel, takové, že součty jejich prvků jsou stejné. Vynecháním eventuálních společných prvků z obou množin dostaneme dvě disjunktní neprázdné množiny s požadovanou vlastností.

POZNÁMKA. Bývá zvykem na *MMO*, že první úloha je poměrně lehká; žáci také většinou tuto úlohu vyřešili s maximálním ziskem bodů. Ztroskotali (zato úplně) jen ti, kterým nenapadlo použít *Dirichletova principu* (nebo jej neznali).

MMO–2

2. Dokažte, že ~~pro každé přirozené $n \geqq 4$ platí:~~
Každý tětivový čtyřúhelník lze rozdělit na n tětivových čtyřúhelníků, kde $n \geqq 4$ je libovolné přirozené číslo.

ŘEŠENÍ. Rozlišíme několik případů jednak podle tvaru daného tětivového čtyřúhelníka, jednak podle čísla n.

I. Nechť daným čtyřúhelníkem je rovnoramenný lichoběžník. Ten lze snadno — pomocí $(n - 1)$ rovnoběžek se základnami — rozdělit na n rovnoramenných lichoběžníků, a to dokonce pro každé přirozené n. Poněvadž každý rovnoramenný lichoběžník je tětivový, je tím v tomto případě úloha rozřešena.

II. Nechť $n \geqq 5$; daný tětivový čtyřúhelník může být libovolný. Jeho vrcholy označme po řadě A, B, C, D, a to tak, aby bylo

$$\sphericalangle DAB \leqq \sphericalangle ABC\,.$$

Na straně AD najdeme bod E a na straně BC bod F ($A \neq E \neq \neq D$, $B \neq F \neq C$) tak, aby $EF \parallel AB$. Potom čtyřúhelník $EFCD$ je opět tětivový, neboť má stejné úhly jako čtyřúhelník $ABCD$.

Jestliže

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC\,,$$

je *ABFE* rovnostranný lichoběžník; ten rozdělíme podle I na $n-1$ tětivových čtyřúhelníků. Spolu s *EFCD* budeme tedy mít n tětivových čtyřúhelníků.

Jestliže však

$$\sphericalangle DAB < \sphericalangle ABC,$$

pak na straně *AB* existuje bod $G(A \neq G \neq B)$ takový, že

$$\sphericalangle DGB = \sphericalangle GBC.$$

Je zřejmé, že *GBFE* je rovnoramenný lichoběžník.

Budiž nyní S střed kružnice vepsané trojúhelníku *AGD*. Spustíme z S kolmice na strany trojúhelníka *AGD*, který tak rozdělíme na tři čtyřúhelníky, z nichž každý má dva protější úhly pravé, takže je tětivový.

Nyní už stačí jen rozdělit rovnoramenný lichoběžník *GBFE* na $n-4$ tětivových čtyřúhelníků (způsobem popsaným v I), abychom dostali rozdělení čtyřúhelníka *ABCD* na

$$1 + 3 + (n-4) = n$$

tětivových čtyřúhelníků.

III. Nechť $n = 4$. Nechť S je střed kružnice opsané danému tětivovému čtyřúhelníku a nechť S leží uvnitř tohoto čtyřúhelníka. Spustíme-li z S kolmice na všechny čtyři strany čtyřúhelníka, rozdělí jej na čtyři čtyřúhelníky, z nichž každý má dva protější úhly pravé a je tedy tětivový.

IV. Nechť $n = 4$ a nechť střed S kružnice opsané danému čtyřúhelníku neleží uvnitř něho. Vrcholy čtyřúhelníka označme po řadě A, B, C, D tak, aby *AB* byla nejdelší strana čtyřúhelníka *ABCD*. Poněvadž S neleží uvnitř *ABCD*, jsou oba úhly $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ tupé. Lze tedy najít uvnitř *ABCD* dva body E, F s těmito vlastnostmi:

(i) $EC \perp BC$, $FD \perp AD$;

(ii) $EF \parallel AB$;

(iii) *ECDF* je konvexní čtyřúhelník.

Z bodů E, F spustíme kolmice na AB, jejich paty označme G, H tak, aby $EFGH$ byl obdélník.

Tím máme daný čtyřúhelník $ABCD$ rozdělen na čtyři čtyřúhelníky

$$AGFD, \quad EFGH, \quad BHEC, \quad CEFD.$$

Avšak:

1) $EFGH$ je obdélník, je tedy tětivový.
2) Je $EH \perp BH$, $EC \perp BC$, takže čtyřúhelník $BCEH$ má dva protější úhly pravé — je tedy tětivový.
3) Obdobně z $FG \perp AG$, $FD \perp AD$ plyne, že čtyřúhelník $AGFD$ je tětivový.
4) Daný čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, takže $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \pi$.

Ale

$$EF \parallel AB, \quad EC \perp BC, \text{ takže}$$

$$\sphericalangle CEF = \sphericalangle ABC + \frac{1}{2}\pi$$

a zároveň

$$\sphericalangle FDC = \sphericalangle ADC - \frac{1}{2}\pi.$$

Odtud vyplývá rovnost

$$\sphericalangle CEF + \sphericalangle FDC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \pi;$$

čtyřúhelník $EFDC$ je tedy také tětivový.

Tím je úloha řešena ve všech případech.

POZNÁMKA. Na první pohled se tato úloha jeví jako časově velmi náročná. Je tomu skutečně tak; to je ovšem osud téměř všech úloh z geometrie, kdy se mají slovně popisovat konstrukce a podrobně vypisovat geometrické úvahy. To se však týká hlavně čistopisu — vlastní řešení hledají a odvozují žáci přirozeně na narýsovaném obrázku, což jde rychleji. Kromě toho byla úloha zařazena na první den soutěže spolu se snadnou úlohou první, na jejíž řešení se naopak spotřebovalo méně času.

Z našich žáků jen dva podali úplné řešení druhé úlohy. Většinou zapomínali na to, že konstrukce uvedené v III. nelze použít v případě IV.

Uvedené řešení není ovšem jediné. Ve skutečnosti se v soutěži objevilo téměř tolik variant a úprav, kolik bylo řešitelů. Proto také tato úloha kladla největší nároky na koordinátory. Výsledné bodové ohodnocení žákovských řešení bylo spravedlivé ve smyslu rovnosti všech soutěžících, méně už ve smyslu ocenění objektivní obtížnosti rozřešených či nerozřešených případů. Přispěla k tomu i zásada nedělitelnosti bodů při bodování.

MMO-3

3. Pro každá dvě celá nezáporná čísla m, n je

$$\frac{(2m)\,!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

celé číslo; dokažte.

ŘEŠENÍ. Důkaz provedeme *indukcí*. Tvrzení platí pro $n = 0$, neboť

$$\frac{(2m)!0!}{m!0!(m+0)!} = \frac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m}$$

je binomický koeficient, a tedy celé číslo (pro každé $m \geqq 0$).

Předpokládejme, že jsme tvrzení dokázali již pro všechna $n < k$, kde k je přirozené číslo a všechna $m \geqq 0$. Označme

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!\,(m+n)!} = f(m, n).$$

Přímým výpočtem snadno ověříme, že pro každé $m \geqq 0$ platí

$$f(m, k-1) = f(m, k)\,\frac{m+k}{2(2k-1)}\,,$$

$$f(m+1, k-1) = f(m, k)\,\frac{2m+1}{2k-1},$$

takže

$$f(m, k) = 4f(m, k-1) - f(m+1, k-1).$$

Avšak čísla $f(m, k-1)$ a $f(m+1, k-1)$ jsou podle indukčního předpokladu celá, tedy také $f(m, k)$ je celé číslo.

JINÉ ŘEŠENÍ je založeno na použití vzorce známého z elementární teorie čísel. Je-li n přirozené číslo a p prvočíslo, pak p^α dělí $n!$ právě když

$$\text{(x)} \qquad \alpha \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Pomocí tohoto vzorce se pak dokáže pro každé prvočíslo p, že maximální α takové, že p^α dělí číslo $(2m)!(2n)!$ není nikdy menší nežli maximální β takové, že p^β dělí číslo $m!n!(m+n)!$

POZNÁMKA. Zdá se, že i tato úloha byla pro naše žáky obtížná. Rozřešili ji jen dva, a to druhým způsobem, neboť znali vzorec (x).

Idea prvního způsobu řešení založeného na odvození pomocného rekurentního vzorce našim žákům zřejmě nebyla dost blízká. Někteří se sice tímto směrem vydali, ale zapletli se do složitých výpočtů různých numerických hodnot a neuvědomili si včas, že se žádá jen důkaz toho, že jde o celá čísla. Stálo by snad za pokus posílit přípravu olympioniků v problematice tzv. *metody neurčitých součinitelů.*

MMO–4

4. ~~Najděte všecka řešení $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, kde $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ jsou kladná reálná čísla, soustavy nerovností~~

Najděte všechny pětice x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 kladných reálných čísel, pro něž platí

$$(1) \quad (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqq 0\,,$$
$$(2) \quad (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqq 0\,,$$
$$(3) \quad (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqq 0\,,$$
$$(4) \quad (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqq 0\,,$$
$$(5) \quad (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqq 0\,.$$

ŘEŠENÍ. Levé strany nerovností (1) — (5) roznásobíme a pak všechny nerovnosti sečteme. Dostaneme tak jedinou nerovnost

$$\begin{aligned} & x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_4^2 + x_4^2x_5^2 + x_5^2x_1^2 + \\ & + x_3^2x_5^2 + x_4^2x_1^2 + x_5^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 - \\ & - x_1^2x_3x_5 - x_2^2x_4x_1 - x_3^2x_5x_2 - x_4^2x_1x_3 - x_5^2x_2x_4 - \\ & - x_2^2x_3x_5 - x_3^2x_4x_1 - x_4^2x_5x_2 - x_5^2x_1x_3 - x_1^2x_2x_4 \leqq 0\,, \end{aligned}$$

které ovšem musí každé řešení soustavy (1)—(5) také vyhovovat. Novou nerovnost vynásobíme dvěma a upravíme na tvar

$$\begin{aligned} & (x_1x_2 - x_1x_4)^2 + (x_1x_2 - x_2x_4)^2 + (x_2x_3 - x_2x_5)^2 + \\ & + (x_2x_3 - x_3x_5)^2 + (x_3x_4 - x_1x_3)^2 + (x_3x_4 - x_1x_4)^2 + \\ & + (x_4x_5 - x_2x_4)^2 + (x_4x_5 - x_2x_5)^2 + (x_1x_5 - x_1x_3)^2 + \\ & + (x_1x_5 - x_3x_5)^2 \leqq 0\,. \end{aligned}$$

Avšak součet čtverců může být nekladný jen v tom případě, jsou-li všechny sčítance rovny 0. Platí tedy současně všechny rovnosti

$$x_1x_2 = x_1x_4 = x_2x_4\,,$$
$$x_2x_3 = x_2x_5 = x_3x_5\,,$$
$$x_3x_4 = x_1x_3 = x_1x_4\,,$$
$$x_4x_5 = x_2x_4 = x_2x_5\,,$$
$$x_1x_5 = x_1x_3 = x_3x_5\,.$$

Poněvadž však hledáme jen taková řešení, v nichž jsou všechna $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ kladná, vidíme, že musí být

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 . \tag{x}$$

Obráceně je však ihned vidět, že každá pětice $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kladných čísel splňující (x) je řešením soustavy (1) — (5).

JINÉ ŘEŠENÍ, které se rovněž v soutěži objevilo, spočívá v postupném systematickém vyšetřování všech možných uspořádání podle velikosti kladných čísel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vyhovujících nerovnostem (1) — (5). Lze přitom využít toho, že daná soustava je zjevně invariantní vůči cyklickým permutacím neznámých, tzn. že platí

Je-li (a, b, c, d, e) řešením soustavy (1) — (5), je také (b, c, d, e, a) jejím řešením.

Můžeme tedy bez újmy obecnosti předpokládat, že platí

$$x_k \leqq x_1 , \qquad k = 2, 3, 4, 5. \tag{6}$$

Potom ovšem v důsledku (1) bude

$$x_2^2 \leqq x_3 x_5 \tag{7}$$

a obdobně podle (5) bude

$$x_5^2 \leqq x_2 x_4 . \tag{8}$$

Dále rozlišíme dva případy.

I. Nechť $x_4 \leqq x_5$. Potom ze (4) a (8) plyne nerovnost

$$x_4^2 \leqq x_1 x_3 \leqq x_5^2 \leqq x_2 x_4 ,$$

takže nutně $x_4 \leqq x_2$. To však spolu s (8) dává

$$x_5^2 \leqq x_2 x_4 \leqq x_2^2 ,$$

takže také $x_5 \leqq x_2$. Ze (7) potom snadno plyne

$$x_2^2 \leqq x_3 x_5 \leqq x_3 x_2 ,$$

a tedy $x_2 \leqq x_3$. Celkem tedy máme

$$x_4 \leqq x_5 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq x_1. \tag{9}$$

Z nerovnosti (4) potom dostáváme

$$x_4^2 \leqq x_1x_3 \leqq x_5^2 \leqq x_3^2, \tag{10}$$

takže $x_1 \leqq x_3$, což spolu s (6) dává $x_1 = x_3$. Dosazením zpět do (10) vyplyne $x_1^2 \leqq x_5^2$, čili $x_1 \leqq x_5$, a tedy podle (6) znovu $x_1 = x_5$. Kombinací (9) a (6) dostaneme rovnosti

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5.$$

Nerovnost (2) má pak tvar

$$(x_1^2 - x_1x_4)^2 \leqq 0\,,$$

což je při (6) možné jen když $x_1 = x_4$. Musí tedy opět platit

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5. \tag{x}$$

II. Nechť $x_5 < x_4$. Potom (4) a (6) dává

$$x_5^2 \leqq x_1x_3 \leqq x_4^2 \leqq x_1x_4\,,$$

a tedy $x_3 \leqq x_4$. Ze (7) plyne pak

$$x_2^2 \leqq x_3x_5 < x_3x_4 \leqq x_4^2\,,$$

takže $x_2 < x_4$, tzn.

$$x_2^2 < x_2x_4 \leqq x_1x_4\,.$$

Avšak odtud a z (2) dostaneme

$$x_3^2 \geqq x_1x_4 \geqq x_4^2\,,$$

tzn. $x_3 \geqq x_4$, takže je nutně $x_3 = x_4$. Dosazením do (3) dostaneme nerovnost

$$(x_3^2 - x_2x_5)^2 \leqq 0\,,$$

je tedy

$$x_3^2 = x_2x_5\,.$$

Poněvadž však, jak již víme, je $x_2 < x_4 = x_3$, musí být $x_5 \geqq x_3 = x_4$, ale to je spor s předpokladem $x_4 > x_5$. Případ II není tedy možný a podle I nutně platí (x). (Postačitelnost (x) je opět zřejmá.)

POZNÁMKA. Při řešení této čtvrté úlohy byli českoslovenští žáci poměrně velmi úspěšní; z 56 možných bodů získali celkem 44 body, přitom šest z nich podalo úplné a správné řešení. Je vidět, že jim tato tematika není cizí a že dovedou najít cesty k řešení.

Relativně častou chybou, která se objevovala v žákovských řešeních, byl (nesprávný) předpoklad, že soustava (1) — (5) je invariantní vůči všem permutacím neznámých, nejenom vůči permutacím cyklickým. Konečný výsledek je sice stejný, avšak mezera v úvaze je podstatná a bodové ocenění na MMO tomu odpovídalo.

MMO–5

5. Nechť f a g jsou dvě reálné funkce definované v intervalu $(-\infty, +\infty)$ tak, že pro všechna x a y platí

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y). \qquad \text{(x)}$$

Dokažte: Jestliže f není identicky rovna nule a jestliže $|f(x)| \leqq 1$ pro všechna reálná x, potom také $|g(y)| \leqq 1$ pro všechna reálná y.

ŘEŠENÍ. Označme $A = \sup |f(x)|$; podle předpokladů je $A \leqq 1$ (stačilo by ovšem $A < \infty$). Nechť pro některé reálné y_0 je $|g(y_0)| = 1 + h > 1$. Potom však pro každé reálné x platí

$$f(x).g(y_0) = \frac{1}{2}\,[f(x+y_0) + f(x-y_0)],$$

a tedy

$$|f(x)| \leqq \frac{|f(x+y_0)| + |f(x-y_0)|}{2|g(y_0)|} \leqq \frac{A}{1+h},$$

což je v rozporu s definicí A. Není tedy možné, aby takové y_0 existovalo, je tedy $|g(y)| \leqq 1$ pro všechna reálná y.

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme opět $A = \sup |f(x)|$. Poněvadž pro každé reálné x, y je

$$2\,|f(x)|\,.\,|g(y)| \leqq |f(x+y)| + |f(x-y)| \leqq 2A,$$

je také

$$|g(y)| \leqq \frac{A}{|f(x)|}$$

pro každé x, pro které je $f(x) \neq 0$ (a taková x podle předpokladu existují) a pro všechna reálná y. Podle definice suprema lze ke každému $\varepsilon > 0$ najít x_ε tak, aby

$$|f(x_\varepsilon)| > A - \varepsilon\,;$$

pro takové x_ε tedy platí

$$|g(y)| \leqq \frac{A}{A-\varepsilon}$$

pro všechna reálná y. Poněvadž ε lze zvolit libovolně malé, musí být $|g(y)| \leqq 1$ pro všechna y, c.b.d.

Ještě JINÉ ŘEŠENÍ je založeno na této *pomocné úvaze*: Nechť y je libovolné reálné číslo. Pak ke každému reálnému x lze najít x' tak, že platí

$$|f(x')| \geqq |f(x)|\,.\,|g(y)|\,.$$

Skutečně z rovnosti (x) plyne nerovnost

$$2\,|f(x)|\,.\,|g(y)| \leqq |f(x+y)| + |f(x-y)|\,,$$

to však znamená, že platí aspoň jedna z nerovností

$$|f(x+y)| \geqq |f(x)|\,.\,|g(y)|\,,$$

$$|f(x-y)| \geqq |f(x)|\,.\,|g(y)|\,.$$

V prvém případě stačí položit $x' = x + y$, ve druhém případě pak $x' = x - y$.

Budiž nyní x_0 takové, že $f(x_0) \neq 0$ — takové x_0 existuje podle předpokladu — a budiž y libovolné reálné číslo. Postupem odvozeným v pomocné úvaze sestrojíme nyní posloupnost reálných čísel $x_0, x_1, x_2, \ldots$, tak, aby pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ platilo

$$|f(x_k)| \geqq |f(x_{k-1})| . |g(y)| .$$

Bude pak zřejmě (důkaz indukcí)

$$|f(x_k)| \geqq |f(x_0)| . |g(y)|^k$$

pro všechna přirozená k. Poněvadž však $f(x_0) \neq 0$ a $|f(x_k)| \leqq 1$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$, platí pro všechna $k \geqq 1$ nerovnost

$$|g(y)|^k = \frac{|f(x_k)|}{|f(x_0)|} \leqq \frac{1}{|f(x_0)|} .$$

To je ovšem možné jenom když je

$$|g(y)| \leqq 1 ,$$

což jsme měli dokázat.

POZNÁMKA. I když tato úloha není v podstatě nijak zvlášť těžká, je její tematika v matematických olympiádách zatím ne právě obvyklá. Žáci středních škol (např. našich) většinou ještě neovládají tak dokonale základní pojmy matematické analýzy. Neznají, popř. neuvědomují si např. podstatu rozdílu mezi supremem a maximem funkce. Krátké řešení (za obecnějších předpokladů) uvedené zde jako první podal pouze jeden polský žák; bylo odměněno zvláštní cenou. Původní autorské řešení je tu uvedeno jako třetí.

[illegible]

6. Jsou dány čtyři ~~vesměs~~ různé rovnoběžné roviny. Dokažte, že existuje pravidelný čtyřstěn, který má v každé z daných rovin jeden vrchol.

ŘEŠENÍ. Dané čtyři roviny označme π, ϱ, σ, τ tak, aby ϱ ležela mezi π a σ a aby σ ležela mezi ϱ a τ. Dále označme a vzdálenost π od ϱ, b vzdálenost ϱ od σ a c vzdálenost σ od τ.

Vezměme si nyní pravidelný čtyřstěn $A'B'C'D'$ s hranou délky 1. Na hraně $A'C'$ nalezneme bod E' ve vzdálenosti

$$A'E' = \frac{a}{a+b}$$

a na hraně $A'D'$ bod F' ve vzdálenosti

$$A'F' = \frac{a}{a+b+c}\,.$$

Body B', E', F' neleží na přímce a určují tedy rovinu, označme ji ϱ'. Body A', C', D' veďme po řadě roviny π', σ', τ' rovnoběžné s rovinou ϱ'.

Označme a' vzdálenost rovin π' a ϱ', b' vzdálenost rovin ϱ' a σ' a c' vzdálenost rovin σ' a τ'. Platí ovšem zřejmě

$$a' : b' : c' = a : b : c\,.$$

Na čtyřstěn $A'B'C'D'$ a roviny π', ϱ', σ', τ' aplikujeme nyní dvě zobrazení. První z nich bude *homotetie* (se středem např. A'), která ze čtyřstěnu $A'B'C'D'$ vytvoří pravidelný čtyřstěn $A''B''C''D''$ ($A'' \equiv A'$) s hranou délky $\dfrac{a}{a'}$. Roviny π', ϱ', σ', τ' přejdou přitom ve čtyři rovnoběžné roviny π'', ϱ'', σ'', τ''; jejich vzdálenosti jsou zřejmě a (π'' a ϱ'), b (ϱ'' a σ''), c (σ'' a τ'').

Druhým zobrazením bude *translace a otočení* (přímé shodné) takové, aby π'' přešla v π, ϱ'' v ϱ, σ'' v σ a τ'' v τ. Čtyřstěn $ABCD$, který tímto zobrazením dostaneme z $A''B''C''D''$, bude již vyhovovat podmínkám úlohy.

POZNÁMKA. Toto jednoduché řešení není ovšem jediné možné. Někteří soutěžící řešili úlohu poměrně složitými úvahami o spojitých pohybech v prostoru, při nichž postupně umísťovali jednotlivé vrcholy pravidelného čtyřstěnu (s proměnlivou délkou hrany) do daných rovin. Jiní se zase pokoušeli řešit úlohu analyticky.

Není přitom bez zajímavosti skutečnost, že z osmi našich účastníků XIV. MMO připadl na prosté řešení na základě podobnosti právě ten nejmladší — žák 2. ročníku, který se ještě se stereometrií ve škole nesetkal.

Jinak byl slabší výkon čs. družstva u této úlohy překvapením, neboť stereometrie a speciálně pak geometrie čtyřstěnu patří již tradičně k oborům, z nichž se zadávají úlohy v našich matematických olympiádách. Také při přípravě olympioniků se stereometrii věnuje vždy plná pozornost.

MEZINÁRODNÍ JURY XIV. MMO

Předseda: *Stanisław Balcerzyk*, Toruň

Členové (vedoucí delegací):

A	*Thomas Mühlgassner*, Eisenstadt
BG	*I. R. Prodanov*, Sofie
C	*Luis J. Davidson*, Havana
CS	*František Zítek*, Praha
D	*Helmuth Bausch*, Berlín
GB	*R. C. Lyness*, Blackpool
H	*Endre Hódi*, Budapešť
M	*U. Sanžmjatav*, Ulánbátar
NL	*A. van Tooren*, Leusden
R	*Dimitrie Dragicescu*, Bukurešť
S	*K. Halisteová Anierová*, Umeå
SU	*Valentin A. Skvorcov*, Moskva
YU	*Vladimír Mićić*, Bělehrad

ZÁSTUPCI VEDOUCÍCH

A	*Wolfgang Ratzinger*, Linec
BG	*Z. D. Karagjosov*, Burgas
C	*Felix Recio*, Havana
CS	*Jozef Moravčík*, Žilina
D	*G. Burosch*, Roztoky
GB	*M. Brownová*, Londýn
H	*István Reiman*, Budapešť
M	*Gombyn Zagdragčaa*, Ulánbátar
NL	*A. A. Hoogendoorn*, Nijmegen
R	*Constantin Ottescu*, Bukurešť
S	*T. Claesson*, Lund
SU	*Ivan S. Petrjakov*, Reuto
YU	*Tomo Pisanski*, Lublaň