21. ročník matematické olympiády

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 21. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1971-1972. 14. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. pp. 156–166.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404626

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

A–III–1

1. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{27}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}\,. \qquad (1)$$

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Pro všechna přirozená čísla $n > 1$ je

$$n^3 > n^2,$$

odkud vyplývá

$$1 - \frac{1}{n^3} > 1 - \frac{1}{n^2}\,.$$

Proto také platí

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{27}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot$$

$$\ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) =$$

$$= \prod_{i=2}^{n} \frac{(i+1)(i-1)}{i^2} = \frac{(n+1)!\,.\,(n-1)!}{2\,.\,(n!)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\,;$$

protože $n > 1$, je $\frac{n+1}{n} >$, a tudíž

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2} \,.$$

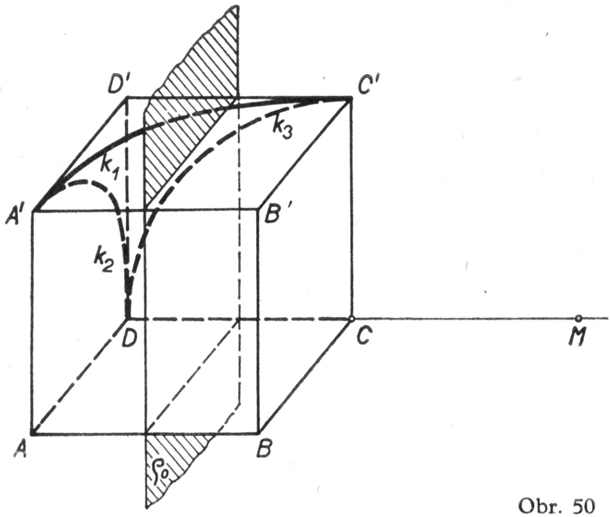
Tím je dokázáno, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí (1).

Řešil JAN KNYTL
žák 4.a gymnasia v Novém Jičíně

A–III–2

2. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Budiž X obraz bodu C v některém otočení kolem osy, které převede vrchol A ve vrchol B. Určete množinu všech takových bodů X, které leží na povrchu dané krychle. (8 bodů)

ŘEŠENÍ. Použijeme věty, že každé otočení kolem osy o v prostoru lze složit ze dvou rovinových souměrností, jejichž



Obr. 50

roviny jsou různoběžné a protínají se v přímce o; za rovinu souměrnosti jedné z nich lze zvolit libovolnou rovinu svazku o. Otočení, které převádí vrchol A ve vrchol B (obr. 50), má osu o (prostorově) kolmou k přímce AB. Proto přímka o leží v rovině souměrnosti ϱ_0 úsečky AB. Souměrnost φ_0 podle roviny ϱ_0 převede bod C v bod D. Všechna otočení převádějící A v B dostaneme, složíme-li φ_0 se souměrností (proměnnou) φ podle roviny ϱ; ϱ je libovolná rovina trsu (B), pro niž platí $\varrho \nparallel \varrho_0$. Je tedy vyloučena rovina BCB'. Paty všech kolmic spuštěných z bodu D na roviny trsu (B) vyplní (podle *obrácení Thaletovy věty*) kulovou plochu Γ sestrojenou nad průměrem BD. Z plochy Γ je třeba vyloučit bod C. Obrazy bodu C ve všech uvedených otočeních vyplní kulovou plochu Γ', která je obrazem plochy Γ v stejnolehlosti se středem D a koeficientem 2. Je tedy Γ' kulová plocha se středem B a poloměrem BD. Z této plochy Γ je vyloučen bod $M \neq D$ přímky CD, pro který platí $DC = MC$.

Kulová plocha Γ', která má střed B a poloměr BD, protne povrch krychle ve třech čtvrtkružnicích: čtvrtkružnici k_1 ležící v rovině $A'B'C'$ a omezené body A', C', čtvrtkružnici k_2 v rovině ADA' omezené body A', D a čtvrtkružnici k_3 v rovině CDC' omezené body C', D. Je $\mathbf{M} = k_1 \cup k_2 \cup k_3$.

A–III–3

3. Nech pre postupnosť mnohočlenov

$$P_0(x),\quad P_1(x),\quad P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

platí

$$P_0(x) = 2,\quad P_1(x) = x$$

a pre všetky $n \geqq 1$ vzťah

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = xP_n(x). \tag{1}$$

a) Nájdite mnohočlen

$$Q_n(x) = P_n^2(x) - xP_n(x)P_{n-1}(x) + P_{n-1}^2(x), \tag{2}$$

pre $n = 1972$.

b) Vyjadrite mnohočlen $[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]^2$ pomocou mnohočlenov $P_n(x)$ a $Q_n(x)$.

RIEŠENIE*).

a) Použitím vzťahu (1), ktorý platí pre všetky $n \geqq 1$, dostaneme

$$P_2 = x^2 - 2, \qquad P_3 = x^3 - 3x. \tag{3}$$

Ďalej vypočítajme priamo z definície mnohočlena Q_n a zo vzťahov (3) mnohočleny Q_1, Q_2, Q_3. Dostaneme

$$Q_1 = x^2 - x.x.2 + 4 = 4 - x^2,$$

$$Q_2 = (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 2).x + x^2 = 4 - x^2,$$

$$Q_3 = (x^3 - 3x)^2 - x(x^3 - 3x)(x^2 - 2) + (x^2 - 2)^2 = 4 - x^2.$$

Tieto výsledky nás vedú k domnienke, že platí

$$Q_n = 4 - x^2$$

pre každé $n \geqq 1$. Pravdivosť tejto domnienky potvrdíme použitím *matematickej indukcie*:

1° Pre $n = 1$ zrejme platí $Q_1 = 4 - x^2$.

2° Nech pre nejaké $n = k \geqq 1$ platí $Q_k = 4 - x^2$. Dokážeme, že potom platí $Q_{k+1} - Q_k = 0$, t. j. $Q_{k+1} = Q_k$.

Dôkaz. Podľa vzťahu, ktorým bol mnohočlen Q_n definovaný, platí pre každé $k \geqq 1$

$$Q_{k+1} - Q_k = P_{k+1}^2 - x\,P_{k+1}P_k + P_k^2 - P_k^2 +$$
$$+ xP_kP_{k-1} - P_{k-1}^2,$$

---

*) Argument x v označení mnohočlenov budeme kvôli zjednodušeniu zásadne vynechávať. Riešiteľ ho však písal.

z čoho dostaneme po úpravách

$$Q_{k+1} - Q_k = (P_{k+1} - P_{k-1}).(P_{k+1} + P_{k-1} - xP_k).$$

Použitím (1) pre $n = k$ (čo môžeme urobiť, pretože $k \geqq 1$) ľahko dostaneme $Q_{k+1} - Q_k = 0$, čo sme mali dokázať.

Z predchádzajúceho je zrejmé, že platí

$$Q_n = 4 - x^2$$

pre každé $n \geqq 1$. Je teda

$$Q_{1972} = 4 - x^2.$$

b) Označme

$$R_n = P_{n+1} - P_{n-1}.$$

Podľa (1) je pre každé $n \geqq 1$

$$R_n = x\,P_n - 2\,P_{n-1}.$$

Teda

$$R_n{}^2 = x^2\,P_n{}^2 - 4x\,P_nP_{n-1} + 4\,P_{n-1}{}^2\,. \tag{4}$$

Zo vzťahu (2) je zrejme

$$Q_n - P_n{}^2 = -x\,P_nP_{n-1} + P_{n-1}{}^2\,.$$

Dosadením posledného vzťahu do (4) dostaneme

$$R_n{}^2 = x^2P_n{}^2 + 4(Q_n - P_n{}^2) = (x^2 - 4)P_n{}^2 + 4\,Q_n.$$

Pretože pre každé $n \geqq 1$ platí $Q_n = 4 - x^2$, ako sme zistili v a), bude

$$R_n{}^2 = (P_{n+1} - P_{n-1})^2 = Q_n(4 - P_n{}^2)$$

pre každé $n \geqq 1$.

Riešil MILAN KOLIBIAR,
žiak 3. tr. gymnázia Jura Hronca
v Bratislave

4. Dokážte, že existuje nekonečne mnoho prirodzených čísel a, ktoré majú túto vlastnosť:

Pre každé prirodzené číslo n je $n^4 + a$ číslo zložené. (V)

Udajte päť čísel a, ktoré majú uvedenú vlastnosť. (6 bodov)

RIEŠENIE. Nech je a kladné číslo. Potom platí

$$x = n^4 + a = n^4 + 2n^2\sqrt{a} + a - 2n^2\sqrt{a} =$$

$$= (n^2 + \sqrt{a})^2 - (n\sqrt{2}\sqrt[4]{a})^2$$

čiže

$$x = (n^2 + \sqrt{a} + n\sqrt{2}\sqrt[4]{a})(n^2 + \sqrt{a} - n\sqrt{2}\sqrt[4]{a}). \qquad (1)$$

Označme $\sqrt{2}\sqrt[4]{a} = 2b$. Potom je

$$a = 4b^4. \qquad (2)$$

Rozklad (1) potom nadobudne tvar

$$x = (n^2 + 2b^2 + 2bn)(n^2 + 2b^2 - 2bn). \qquad (3)$$

Oboch činiteľov súčinu (3) upravíme

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= n^2 + 2b^2 + 2bn = (n + b)^2 + b^2, \\ x_2 &= n^2 + 2b^2 - 2bn = (n - b)^2 + b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ak zvolíme prirodzené číslo $b > 1$, sú podľa (2), (4) čísla a, x_1, x_2 prirodzené a platí $x_1 \geqq 13$, $x_2 \geqq 4$ a teda číslo $x = x_1x_2$ je pre každé prirodzené číslo n zložené. Dokázali sme tak, že prirodzených čísel a, ktoré majú vlastnosť (V) je nekonečne mnoho.

Ak dosadíme do (2) $b = 2, 3, 4, 5, 6$, dostaneme päť čísel

$$a = 64, 324, 1\,024, 2\,500, 5\,184,$$

ktoré všetky majú uvedenú vlastnosť (V).

5. Kolik dvojic navzájem disjunktních podmnožin má množina o n prvcích? (7 bodů)

ŘEŠENÍ. Nejprve je třeba určit počet všech *uspořádaných dvojic* navzájem disjunktních podmnožin dané množiny, která má n prvků. Účastníci soutěže řešili tento problém celkem třemi způsoby.

1. *způsob* (takto postupovali téměř všichni řešitelé).

Z dané množiny $\mathbf{M}$ o n prvcích máme vybrat dvě disjunktní podmnožiny $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Nejprve vybereme první z nich, $\mathbf{A}$. Ta může mít $0, 1, 2, \ldots, n$ prvků; označme k jejich počet. Při daném k pak druhá množina $\mathbf{B}$ může mít $0, 1, \ldots, n-k$ prvků; jejich počet označme j.

Množinu $\mathbf{A}$ o k prvcích lze z dané množiny $\mathbf{M}$ o n prvcích vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Množinu $\mathbf{B}$ o j prvcích lze ze zbývajících $n-k$ prvků sestavit $\binom{n-k}{j}$ způsoby. Celkem tedy bude

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cdot\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\right]$$

způsobů, jak vybrat nejprve množinu $\mathbf{A}$ a pak množinu $\mathbf{B}$. Podle známého vzorce

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}=2^m$$

je však

$$\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}=2^{n-k}.$$

Potom podle binomického vzorce je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n ,$$

tj. uspořádaných dvojic navzájem disjunktních podmnožin množiny $\mathbf{M}$ je

$$3^n .$$

2. *způsob.* (Použil ho PAVEL FERST, žák 2. d gymnasia na Sladkovského náměstí v Praze 3 - Žižkov.)

Představme si, že vytváříme uspořádané dvojice disjunktních podmnožin množiny $\mathbf{M}$. Vezmeme-li libovolný prvek množiny $\mathbf{M}$, pak pro něj máme právě tři možnosti. Buď se stane prvkem první podmnožiny, nebo prvkem druhé podmnožiny, nebo nebude patřit ani do jedné z těchto podmnožin. Má-li množina $\mathbf{M}$ n prvků, pak tedy uspořádaných dvojic navzájem disjunktních podmnožin množiny $\mathbf{M}$ je

$$3^n .$$

3. *způsob.* (Použil jej MIROSLAV KMOŠEK, žák 3. a gymnasia, tř. kpt. Jaroše v Brně.)

Množina $\mathbf{M}$ o n prvcích má právě $\binom{n}{k}$ k-prvkových podmnožin. Vezměme jednu z nich a uvažujme množinu všech jejích podmnožin. Libovolná podmnožina a její doplněk v oné k-prvkové množině tvoří uspořádanou dvojici disjunktních podmnožin množiny $\mathbf{M}$. Pro danou k-prvkovou podmnožinu existuje 2^k jejích podmnožin, tedy i 2^k uspořádaných dvojic jejích disjunktních podmnožin, sjednocením jejichž prvků dostaneme tuto k-prvkovou množinu. Je tedy hledaný počet uspořádaných dvojic disjunktních podmnožin roven

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n .$$

ZÁVĚR ŘEŠENÍ. Každá *neuspořádaná* dvojice navzájem disjunktních podmnožin **A**, **B** množiny **M** je v počtu 3^n započtena dvakrát — jednou jako [**A**, **B**] a podruhé jako [**B**, **A**]. Výjimku tvoří případ $\mathbf{A} = \emptyset$, $\mathbf{B} = \emptyset$, kdy jedině je $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Tedy $3^n + 1$ je právě dvojnásobek počtu všech dvojic disjunktních podmnožin množiny **M**. Hledaný počet je tedy

$$\frac{3^n + 1}{2}.$$

A–III–6

6. V rovine ϱ sú dané dva rôzne body A, S. Ďalej sú dané kladné čísla d, ω; $\omega < 180°$. Zostrojte všetky body X roviny ϱ, ktoré majú túto vlastnost:

Pri otočení v rovine ϱ okolo stredu S v kladnom zmysle o uhol veľkosti $\omega°$ prejde bod X do takého bodu X', že $XX' = d$ a bod A leží na úsečke XX'. Akú podmienku musia splňovať čísla d, ω, aby taký bod X existoval? (7 bodů)

ŘEŠENÍ. ROZBOR. Podle obr. 51 předpokládejme, že bod X je řešením úlohy. Pak platí $XX' = d$. Je-li S' střed úsečky XX', je

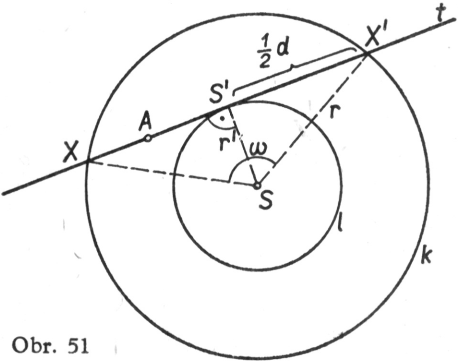
$$S'X = \frac{d}{2}, \quad \sphericalangle XSS' = \frac{\omega}{2}, \quad SX = SX' = r = \frac{d}{2 \sin \dfrac{\omega}{2}},$$

$$SS' = r' = r \cdot \cos \frac{\omega}{2} = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}.$$

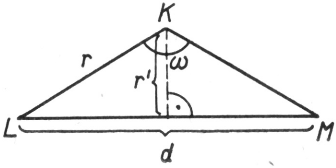
Bod X tedy leží na kružnici $k = (S; r)$ a zároveň leží na tečně t vedené bodem A ke kružnici $l = (S, r')$.

Odtud plyne KONSTRUKCE. Sestrojíme pomocný rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou $LM = d$ a úhlem

$\sphericalangle\ LKM = \omega$. Pak je zřejmě $KL = KM = r$ a výška z vrcholu K na základnu má velikost r' (obr. 52). V rovině ϱ sestrojíme kružnice $k = (S; r)$ a $l = (S; r')$. Bodem A vedeme tečnu t ke kružnici l. Průsečíky tečny t s kružnicí k označíme X, X' tak, aby bylo $\widehat{XSX'} = \omega$. Potom pokud bod A leží na úsečce XX', je bod X hledaný bod.



Obr. 51



Obr. 52

ZKOUŠKA. Z rozboru plyne, že $XX' = d$ a že $\sphericalangle\ XSX' = \omega$. Podle posledního bodu konstrukce platí $\widehat{XSX'} = \omega$. Je tedy bod X' obrazem bodu X v otočení okolo středu S v kladném smyslu o úhel velikosti $\omega°$. Podle konstrukce je též splněna podmínka, že bod A leží na úsečce XX'.

DISKUSE. Kružnice k a l lze sestrojit vždy a platí $r' < r$, neboť $r' = r . \cos \frac{\omega}{2}$ a $0 < \frac{\omega}{2} < 90°$. K tomu, aby bod A ležel na tětivě XX' kružnice k a aby bylo možno jím vést tečnu ke kružnici l, je nutné a stačí, aby platilo

$$r' \leqq SA \leqq r,$$

tj.

$$\frac{d}{2} . \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} \leqq SA \leqq \frac{d}{2 \sin \frac{\omega}{2}}, \qquad (P)$$

odkud plyne

$$2 . SA . \sin \frac{\omega}{2} \leqq d \leqq 2 . SA . \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} . \qquad (P')$$

Tedy (P), resp. (P'), je podmínka řešitelnosti úlohy. Pro $d = 2SA \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ existuje jedno řešení, neboť $A \in l$ a tedy existuje právě jedna tečna t ke kružnici l; pro

$$2 SA \sin \frac{\omega}{2} \leqq d < 2 . SA . \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

existují dvě řešení, neboť bodem A lze vést dvě různé tečny ke kružnici l.

Řešil KARFL HORÁK,
žák 3. b gymnasia ve Strakonicích