21. ročník matematické olympiády

III. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 21. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1971-1972. 14. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. pp. 70–124.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404624

III. Soutěžní úlohy I. kola

1. *KATEGORIE A*

A–I–1

1. Utvoříme všechny možné konečné posloupnosti

$$1 . e_1, \quad 2 . e_2, \ldots, n e_n,$$

kde každé z čísel $e_1, e_2, \ldots, e_n$ je buď 1, nebo —1. Součet všech členů takovéto posloupnosti označme $s(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Dokažte větu:

Ke každému přirozenému číslu k se dá nalézt takové přirozené číslo p, že pro každé $n > p$ je mezi součty $s(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ aspoň $k + 1$ čísel, která jsou si rovna.

ŘEŠENÍ. Protože je

$$-1 - 2 - \ldots - n \leqq s(e_1, e_2, \ldots, e_n) \leqq 1 + 2 + \ldots + n,$$

je mezi součty $s(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nejvýše $2 . \frac{n(n+1)}{2} + 1 = n^2 + n + 1$ různých čísel; přitom všech možných součtů $s(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je 2^n. Kdyby se každé z čísel $-\frac{n(n+1)}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$ vyskytlo mezi čísly $s(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nejvýše k-krát (kde k je další přirozené číslo), platilo by

$$k . (n^2 + n + 1) \geqq 2^n .$$

Abychom dokončili důkaz sporem, postačí dokázat, že pro každé přirozené číslo k platí od určitého indexu n počínaje

$$a_n = \frac{2^n}{n^2+n+1} > k\,. \tag{1}$$

Vypočteme podíl

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^n}{n^2+n+1} \cdot \frac{n^2-n+1}{2^{n-1}} = 2\,.\,\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$$

a dále

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} - \frac{2n}{n^2+n+1}\right) =$$

$$= 2\,.\left(1 - \frac{2}{n+1+\frac{1}{n}}\right). \tag{2}$$

Pro všecka $n > 5$ je

$$\frac{2}{n+1+\frac{1}{n}} < \frac{2}{5+1+\frac{1}{5}}\,,$$

neboť $5 + \frac{1}{5} < 6 < n + \frac{1}{n}$, když $n > 5$. Podle (2) je tedy

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 2\,.\left(1 - \frac{2}{5+1+\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= 2\,.\left(1 - \frac{10}{31}\right) > 2\,.\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\,.$$

Je tedy

$$a_n > \frac{4}{3}\,a_{n-1}\,,$$

$$a_{n-1} > \frac{4}{3} a_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_6 > \frac{4}{3} a_5,$$

tj.

$$a_n > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-5} . a_5 = \left(\frac{4}{3}\right)^n . \left(\frac{3}{4}\right)^5 . a_5,$$

tj. pro všecka $n > 5$ platí

$$a_n > b . \left(\frac{4}{3}\right)^n, \qquad (3)$$

kde b je pevné kladné číslo. Protože čísla $b\left(\frac{4}{3}\right)^n$ tvoří rostoucí geometrickou posloupnost s kvocientem $\frac{4}{3} > 1$, lze nalézt ke každému přirozenému číslu k přirozené číslo q tak, že pro každé $n > q$ je $a_n > k$; je-li $p = \max(5, q)$, pak pro všecka $n > p$ platí (1) a věta je dokázána.

A–I–2

2. Komplexní číslo z není nezáporné, právě když existuje přirozené číslo n a kladná čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ tak, že platí

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0 .$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Především je jasné, že nezáporné číslo z nemůže být kořenem polynomu, jehož všechny koeficienty jsou kladné.

Buď tedy z libovolné komplexní číslo, které není nezáporné.

Je-li Re $z < 0$, pak můžeme položit

$$a_0 = z\bar{z}, \quad a_1 = -(z + \bar{z}), \quad a_2 = 1$$

a číslo z splňuje rovnici

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

v níž všechny koeficienty jsou kladné.

V případě Re $z \geqq 0$ můžeme předpokládat, že Im $z > 0$ (jinak bychom přešli k číslu $\bar{z}$, které rovněž musí být kořenem hledaného polynomu). Pak obraz čísla z leží v I. kvadrantu roviny komplexních čísel, nikoli na reálné ose. Proto (vzhledem k *Moivrově větě*) pro vhodné přirozené číslo n bude Re $z^n < 0$. Podobně jako v předchozím odstavci najdeme kladná čísla a_0, a_1 taková, že platí

$$z^{2n} + a_1 z^n + a_0 = 0.$$

Číslo z splňuje samozřejmě i rovnici

$$(z^{2n} + a_1 z^n + a_0)(z + 1)^n = 0.$$

Úpravou levé strany (postupným násobením trojčlenu $z^{2n} + a_1 z^n + a_0$ výrazem $z + 1$) se dostane polynom (stupně $3n$), jehož všechny koeficienty jsou kladné.

Tím je věta dokázána.

A–I–3

3. Jsou-li čísla a, b, c délky stran trojúhelníka $\mathbf{T}_1$, pak existuje trojúhelník $\mathbf{T}_2$, jehož strany mají délky

$$\frac{a}{a+1}, \quad \frac{b}{b+1}, \quad \frac{c}{c+1}. \tag{1}$$

Dokažte.

Může být trojúhelník $\mathbf{T}_1$ podobný trojúhelníku $\mathbf{T}_2$?

ŘEŠENÍ. a) Zvolíme označení tak, aby platilo $a \leqq b \leqq c$, a dokážeme, že pak platí

$$\frac{a}{a+1} \leqq \frac{b}{b+1} \leqq \frac{c}{c+1}\,. \tag{2}$$

Podle předpokladu je $b - a \geqq 0$; dále je

$$\frac{b}{b+1} - \frac{a}{a+1} = \frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \geqq 0\,,$$

záměnou písmen dostaneme druhou nerovnost (2).

b) Protože a, b, c jsou délkami stran trojúhelníka, platí

$$c < a + b\,. \tag{3}$$

K tomu, aby čísla (1) byla délkami stran trojúhelníka, *stačí*, aby největší z nich, tj. $\dfrac{c}{c+1}$ podle (2), bylo menší než součet obou ostatních, tj. aby platilo

$$\frac{c}{c+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}\,. \tag{4}$$

Provedeme výpočet

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1} = \frac{M}{(a+1)(b+1)(c+1)}\,,$$

kde

$M = a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) - c(a+1)(b+1)$;

vyšetříme, zda je $M > 0$ nebo $M \leqq 0$.

Platí

$$M = c(2ab + a + b - ab - a - b - 1) + 2ab + a + b\,,$$

$$M = c(ab - 1) + 2ab + a + b\,. \tag{5}$$

Rozlišíme dva případy: I) $ab - 1 \geqq 0$, II) $ab - 1 < 0$.
V případě I) je

$$c(ab - 1) \geqq b(ab - 1),$$

neboť podle volby označení je $b \leqq c$. Je tedy podle (5)

$$M \geqq b(ab - 1) + 2ab + a + b = ab^2 + 2ab + a > 0.$$

V případě II) je vzhledem k (3)

$$c(ab - 1) > (a + b)(ab - 1),$$

a tedy podle (5)

$$M > (a + b)(ab - 1) + 2ab + (a + b) = \\ = (a + b) . ab + 2ab > 0.$$

V každém případě je tedy $M > 0$ a platí (4).

c) Vzhledem k (2) je $\mathbf{T}_1 \sim \mathbf{T}_2$, právě když

$$a : b : c = \frac{a}{a + 1} : \frac{b}{b + 1} : \frac{c}{c + 1}.$$

Z rovnice $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{a + 1} : \dfrac{b}{b + 1}$ plyne $a = b$, záměnou písmen dostaneme $b = c$. Je tedy $\mathbf{T}_1 \sim \mathbf{T}_2$, právě když oba trojúhelníky jsou rovnostranné.

A–I–4

4. Označme α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, $s = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$. Dokážte tieto vety:

a) Ak nie je trojuholník rovnoramenný, nemôže byť príslušné číslo s maximálne.

b) Medzi rovnoramennými trojuholníkmi má najväčší súčet s trojuholník rovnostranný.

RIEŠENIE. a) Nech je $\alpha \neq \beta$. Zvoľme označenie tak, aby bolo $\alpha > \beta$. Potom je

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,. \quad (1)$$

Je totiž $0 < \frac{\alpha-\beta}{2} < \pi$ a teda $-1 < \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 1$. Z (1) vyplýva $s = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma < \sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} + {}$

$+ \sin\gamma$. Čísla $\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \gamma$ sú veľkosti uhlov rovnoramenného trojuholníka.

b) Nech je teda $\alpha = \beta$, $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - 2\alpha$. Potom je

$$s = 2\sin\alpha + \sin 2\alpha\,.$$

Postupnými úpravami dostaneme:

$$s = \sin\alpha + (\sin\alpha + \sin 2\alpha) = \sin\alpha + 2\sin\frac{3\alpha}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \right.$$
$$\left. + \sin\frac{3\alpha}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} = 8\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Ak označíme $x = \cos^2\frac{\alpha}{2}$, potom z poslednej rovnosti dostaneme

$$s^2 = 64x^3(1 - x)\,. \quad (2)$$

Vzhľadom na to, že $x > 0$, bude nadobúdať s maximálnu hodnotu práve vtedy, keď s^2 bude maximálne.

Budeme teda hľadať maximum funkcie $y = x^3 - x^4$ (bez použitia matematickej analýzy*) a to v intervale $0 < x < 1$.

Pri hľadaní maxima tejto funkcie možno použiť tiež vetu 12 na str. 93, zv. 17 *Školy mladých matematikov (Hroník: Úlohy o maximech a minimech funkcí)*. Tu podáme dôkaz, ktorý sa opiera len o priebeh kvadratickej funkcie:

Rovnostranný trojuholník dostaneme pre $\alpha = 60°$, $\frac{\alpha}{2} = 30°$, $x = \cos^2 30° = \frac{3}{4}$. Príslušné hodnoty s^2 a s sú: $s^2 = 64 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4}$, $s = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dokážeme, že funkcie $f(x) = \frac{s^2}{64} = x^3 - x^4$ nadobúda maximum pre $x = \frac{3}{4}$. Urobíme nasledujúci výpočet:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)^3 + \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)^4 = -\frac{27}{16}\varepsilon - \frac{9}{4}\varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \frac{27}{16}\varepsilon + \frac{27}{8}\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 + \varepsilon^4 = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \frac{9}{8}\right).$$ Teda

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right) = \varepsilon^2\left[(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{8}\right].$$

Keďže pri každej voľbe $\varepsilon \neq 0$ je $(\varepsilon + 1)^2 + \frac{1}{8} > 0$, je $f\left(\frac{3}{4}\right) > f\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)$, čím je dôkaz skončený.

---

*) S použitím matematickej analýzy dostaneme $y' = 3x^2 - 4x^3$. Pre $y' = 0$, $x \neq 0$ vyjde $x = \frac{3}{4}$ čiže $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, z čoho $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, čo dáva $\frac{\alpha}{2} = 30°$, $\alpha = 60°$. Ľahko sa presvedčíme, že príslušná hodnota s je skutočne maximálna.

5. **M** je množina všetkých mrežových bodov roviny, t. j. tých bodov, ktorých kartézske súradnice sú celé čísla. Dokážte tieto vety:

a) Ak obsahuje priamka p dva body množiny **M**, potom ich obsahuje nekonečne mnoho.

b) Ak obsahuje priamka p dva body množiny **M**, potom všetky body množiny **M** ležia na sústave rovnobežiek obsahujúcej priamku p, pričom každé dve susedné rovnobežky majú rovnakú vzdialenosť.

RIEŠENIE. a) Nech priamka p obsahuje dva rôzne body P, Q množiny **M**. Kartézsku sústavu súradníc zvolíme tak, aby bod P bol jej počiatkom. Bod Q má potom celočíselné súradnice $[m, n] \neq [0, 0]$. Priamka $PQ = p$ má rovnicu

$$nx - my = 0\,. \tag{1}$$

Ak je najväčší spoločný deliteľ $D(m, n)$ čísel m, n rovný d, potom $m = kd$, $n = hd$, kde $D(k, h) = 1$. Ak dosadíme za m, n do rovnice (1), dostaneme rovnicu

$$hx - ky = 0\,,$$

ktorej všetky celočíselné riešenia majú tvar $x = kq$, $y = hq$, kde q je celé číslo. Na priamke p leží teda nekonečne mnoho mrežových bodov $[kq, hq]$.

b) Nech priamka p, ktorá obsahuje aspoň dva body množiny **M**, je daná rovnicou (1). Ak je $[x, y]$ ľubovoľný bod množiny **M**, potom

$$nx - my = hdx - kdy = d(hx - ky) = ds,$$

kde s je celé číslo. Daný bod množiny **M** leží teda na priamke

$$nx - my = ds, \tag{2}$$

ktorá je rovnobežná s priamkou p. Ak zvolíme, obrátene, ľubovoľnú priamku tvaru (2), potom všetky celočíselné riešenia rovnice (2) udávajú tie body množiny **M**, ktoré ležia na priamke (2). Táto rovnica má celočíselné riešenie pre každé celé číslo s.

Všetky priamky (2) tvoria sústavu rovnobežiek, z ktorých každé dve susedné dostaneme pre hodnotu parametrov s, $s + 1$. Vzdialenosť v priamky

$$nx - my = d(s + 1)$$

od priamky (2) je

$$v = \frac{|d(s+1) - ds|}{\sqrt{n^2 + m^2}} = \frac{d}{\sqrt{n^2 + m^2}}$$

a nezávisí teda na čísle s.

A–I–6

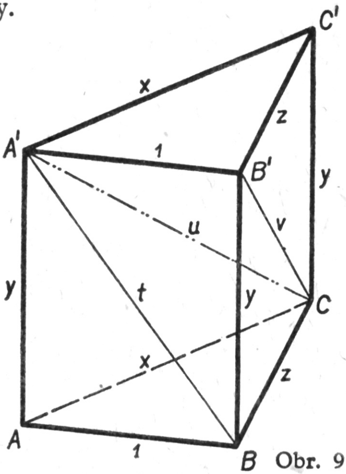
6. Trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavou ABC, jehož hrany mají délky $AB = 1$, $AC = x$, je rozdělen rovinami $A'BC$ a $A'B'C$ ve tři shodné čtyřstěny.

a) Vyjádřete délky všech jeho hran pomocí x.

b) Ukažte, že existuje trojboký hranol této vlastnosti.

Poznámka. Dva čtyřstěny jsou shodné, právě když existuje shodné zobrazení v prostoru, které převádí jeden v druhý.

ŘEŠENÍ. a) Obr. 9. Zavedeme tato označení délek $AC = A'C' = x$, $AA' = BB' = CC' = y$, $BC = B'C' = z$, $A'B = t$,



Obr. 9

$A'C = u$, $B'C = v$. Tetraedry $A'BCA$, $A'BCB'$, $A'B'C'C$, které jsou po dvou navzájem shodné, mají tyto délky hran:

$$\begin{aligned} &A'BCA: t, y, 1, x, z, u; \\ &A'BCB': t, y, 1, v, z, u; \\ &A'B'C'C: x, z, 1, y, v, u. \end{aligned} \tag{1}$$

Z (1) plyne porovnáním:

$$v = x, \quad t = x. \tag{2}$$

Stěny uvedených tří tetraedrů jsou trojúhelníky s těmito délkami stran:

$$\begin{array}{llllll} AA'B & x, y, 1; & A'BC & x, z, u; & A'B'C' & 1, x, z; \\ AA'C & x, y, u; & A'BB' & 1, x, y; & A'B'C & 1, x, u; \\ A'BC & x, z, u; & A'CB' & 1, x, u; & A'C'C & x, y, u; \\ ABC & 1, x, z; & BCB' & x, y, z; & B'CC' & x, y, z. \end{array} \tag{3}$$

Z (3) dostaneme porovnáním buď $z = u$ nebo $y = 1$ a dále buď $u = 1$ nebo $y = z$. Kombinováním dostaneme tyto čtyři případy

I) $z = u = 1$, II) $y = u = 1$, III) $y = z = u$, IV) $y = z = 1$. Případy I) a III) lze řešit společně, obdobně II) a IV). V případě I) je situace v rovině ABA' tato (obr. 10a). Kosinová věta pro $\triangle BB'C_0$, $\triangle A'B'C_0$ (kde C_0 je pravoúhlý průmět bodu C do roviny ABA') dá

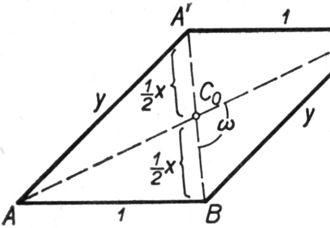
$$y^2 = d^2 + \frac{x^2}{4} - dx\,.\cos\omega, \qquad 1 = d^2 + \frac{x^2}{4} + dx.\cos\omega.$$

Sečtením

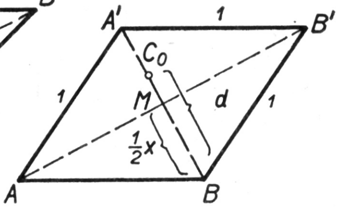
$$y^2 + 1 = 2d^2 + \frac{x^2}{2}. \tag{4}$$

Z $\triangle B'CC_0$, $\triangle A'CC_0$ dostaneme

$$x^2 - d^2 = 1 - \frac{x^2}{4},$$



Obr. 10a



Obr. 10b

odtud

$$d^2 = \frac{5x^2}{4} - 1 . \tag{5}$$

Dosadíme-li z (5) do (4), vyjde

$$y^2 + 1 = \frac{5}{2}x^2 - 2 + \frac{1}{2}x^2,$$

tj.

$$y^2 = 3(x^2 - 1).$$

Délky hran jsou tedy x, $\sqrt{3(x^2 - 1)}$, 1, x, 1, x .
V případě III) dostaneme obdobně

$$3y^2 = 3x^2 - 1,$$

dále je $z = u = y$, $v = t = x$.

V případě II) dostaneme (viz obr. 10b) z $\triangle\, A'CC_0$, $\triangle\, BCC_0$, $\triangle\, ACC_0$, $\triangle\, A'AM$:

$$1 - (x - d)^2 + \left(d - \frac{x}{2}\right)^2 + 1 - \frac{x^2}{4} = x^2,$$

tj. po úpravě

$$dx = 2x^2 - 2 . \tag{6}$$

Dále je

$$z^2 = d^2 + 1 - (x - d)^2,$$

tj.

$$z^2 = 1 - x^2 + 2dx\,. \tag{7}$$

Dosadíme-li ze (6) do (7), vyjde

$$z^2 = 1 - x^2 + 4x^2 - 4\,,$$

tj.

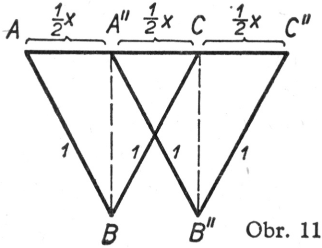
$$z^2 = 3(x^2 - 1)\,.$$

Délky hran jsou tedy

$$x,\ 1,\ \sqrt{3(x^2 - 1)}\,,\ x,\ 1,\ x.$$

V případě IV) se vymění u, z.

b) Existence hranolu. Zvolíme $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ *). Pak je $\sqrt{3(x^2 - 1)} = 1$ a lze sestrojit trojúhelník o stranách délek $1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}}$. Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABC o stranách $AB = BC = 1$, $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ a doplníme jej na hranol $ABCA'B'C'$ tak, aby bylo $AA' = BB' = CC' = 1$, $A'C = 1$ a aby body A', C' ležely v rovině kolmé k ABC procházející přímkou AC. Situace v rovině ABC je na obr. 11; přitom A'', B'', C'' jsou pravoúhlé průměty bodů A', B', C' do roviny ABC.



Obr. 11

---

*) Obecnější volba by byla x z intervalu $1 < x < 2$.

Body A'', C'' padnou pak na přímku AC a je $AC = A''C'' = \frac{2}{\sqrt{3}}$;
pak bod A'' je středem úsečky AC ($AA' = A'C = 1$) a je tedy $AA'' = A''C = \frac{x}{2}$. Vypočteme $A'B$, $B'C$. Platí

$$A'A'' = A''B = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

a dále

$$A'B = \sqrt{\frac{2}{3}} \,.\, \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = x\,.$$

Dále je obdobně

$$B'C = \sqrt{\frac{2}{3}} \,.\, \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = x\,.$$

Na základě délek hran snadno ověříme shodnost každých dvou ze čtyřstěnů $A'BAC$, $A'B'BC$, $A'B'C'C$.

2. *KATEGORIE B*

B–I–1

1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro něž se ciferný součet čísla 2^n rovná číslu 5.

ŘEŠENÍ. Je-li n hledané číslo, pak 2^n může končit buď číslicí 2, nebo číslicí 4 (jinak by součet jeho cifer byl > 5).

Končí-li 2^n číslicí 2, pak má 2^n nejvýše ještě tři další nenulové číslice. Má-li jen jedinou, je to číslice 3 a 2^n má tedy tvar $3 . 10^k + 2$. Nemůže být $k > 1$, neboť pak by bylo též $n > 1$. Číslo 2^n by bylo dělitelné čtyřmi, ale číslo $3 . 10^k + 2$ nikoli. Je tedy $k = 1$ a $n = 5$ vyhovuje úloze. Má-li 2^n právě dvě další nenulové číslice, jsou to 1 a 2. Číslo 2^n nemůže mít na místě desítek číslici 2; jinak bychom zase odvodili spor s dělitelností čtyřmi. Je nutně $n \geqq 3$ a číslo 2^n může končit dvojčíslím buď 02 nebo 12; obě možnosti pak vedou ke sporu s dělitelností čtyřmi, popř. osmi. Má-li 2^n právě tři další nenulové číslice, jsou to 1, 1, 1. Číslo 2^n je tedy aspoň čtyřciferné, a proto je $n \geqq 10$. Jeho poslední možná trojčíslí jsou 002, 012, 102, 112. Prvé tři možnosti opět vedou ke sporu s dělitelností osmi. Dále čísla 1 112, 10 112 nejsou celočíselné mocniny čísla 2, a proto naše číslo 2^n je ve tvaru $10^k + 112$, kde $k \geqq 5$. Z toho však plyne spor s dělitelností číslem 32, neboť 32 nedělí 112.

Končí-li číslo 2^n číslicí 4, pak má právě jednu další nenulovou číslici, a to 1. Protože čísla 14 ani 104 nejsou celočíselnou mocninou čísla 2, stojí tato číslice 1 alespoň na místě tisícovek, což zase vede ke sporu s dělitelností osmi.

ZÁVĚR. Daná úloha má jediné řešení $n = 5$.

B-1-2

2. Určete všecky společné kořeny rovnic

$$2x^5 - 13x^4 + 24x^3 - x^2 - 28x + 12 = 0, \qquad (1)$$

$$2x^4 - 9x^3 + x^2 + 36x - 36 = 0. \qquad (2)$$

ŘEŠENÍ. Stupeň rovnice (1) při zachování jejich společných kořenů s rovnicí (2) lze snížit, odečteme-li od ní rovnici (2), jejíž pravou i levou stranu vynásobíme x. Dostaneme tak rovnici

$$-4x^4 + 23x^3 - 37x^2 + 8x + 12 = 0. \qquad (1a)$$

Stupeň rovnice (1a) snížíme ještě dále přičtením rovnice (2) znásobené 2. Obdržíme rovnici

$$5x^3 - 35x^2 + 80x - 60 = 0. \qquad (1b)$$

Rovnice (1b) a (2) mají zřejmě tytéž společné kořeny jako rovnice (1) a (2), pokud tyto společné kořeny existují. Dvojice rovnic (1b) a (2) je zcela obdobná dvojici rovnic (1) a (2), a proto budeme dále postupovat obdobně. Z rovnice (1b) vyplývá rovnice (násobením $\frac{2}{5}x$)

$$2x^4 - 14x^3 + 32x^2 - 24x = 0\,,$$

kterou odečteme od rovnice (2). Dostáváme tak rovnici

$$5x^3 - 31x^2 + 60x - 36 = 0\,, \tag{2a}$$

od níž odečteme rovnici (1b), abychom dále snížili její stupeň. Touto úpravou plyne rovnice

$$x^2 - 5x + 6 = 0\,. \tag{2b}$$

Rovnice (2b) má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, které přicházejí v úvahu jako společné kořeny rovnic (1) a (2). Dosazením se přesvědčíme, že čísla 2 a 3 jsou skutečně společnými kořeny rovnic (1) a (2).

Levou stranu rovnice (2) můžeme rozložit

$$(x - 2)(x - 3)(2x^2 + x - 6) = 0\,.$$

Zbývající kořeny rovnice (2) jsou kořeny rovnic

$$2x^2 + x - 6 = 0\,,$$

tj. $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = -2$, které však rovnici (1) nevyhovují.

Rovnice (1) a (2) mají společné kořeny 2 a 3 a žádné jiné.

$\boxed{\text{B–I–3}}$

3. Určete délky stran pravoúhelníka *ABCD* tak, aby to byla přirozená čísla a aby se obsah pravoúhelníka rovnal p-násobku obvodu trojúhelníka ABC; přitom p je vhodné prvočíslo. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k číslu p.

ŘEŠENÍ. Označíme-li strany obdélníka $ABCD$ a, b, má pro tato čísla platit

$$a.b = p(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

To je ekvivalentní s podmínkami

$$a.b - p(a + b) > 0 \tag{1}$$

$$a^2b^2 - 2abp(a + b) + p^2.2ab = 0.$$

Má tedy platit (1) a

$$a.b - 2p(a + b) + 2p^2 = 0. \tag{2}$$

Z (2) dosadíme do (1) za $a.b$ a současně (2) upravíme. Dostaneme

$$a + b - 2p > 0, \qquad (a - 2p)(b - 2p) = 2p^2. \tag{3}$$

Vzhledem k tomu, že je p prvočíslo a že nezáleží na pořadí stran a, b, je splněna poslední rovnice pouze v těchto případech (předpokládáme $a \leqq b$):

1)	$a-2p=1$	$b-2p=2p^2$	a tedy	$a+b-2p=2p+2p^2+1$
2)	2	p^2		$2p+p^2+2$
3)	p	$2p$		$5p$
4)	$-2p^2$	-1		$2p-2p^2-1$
5)	$-p^2$	-2		$2p-p^2-2$
6)	$-2p$	$-p$		$-p$

Vzhledem k nerovnosti v (3) splňují úlohu jen dvojice

1)	$a = 2p + 1$	$b = 2p + 2p^2$
2)	$2p + 2$	$2p + p^2$
3)	$3p$	$4p$

Kdyby se první dvě řešení sobě rovnala, muselo by být

$$2p + 1 = 2p + 2 \quad \text{a} \quad 2p + 2p^2 = 2p + p^2,$$

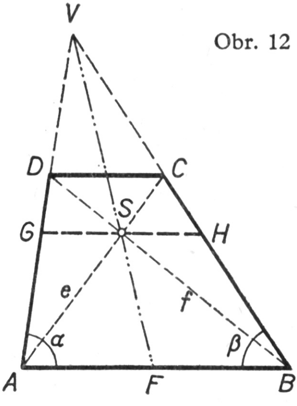
což nemůže nastat. Podobně se zjistí, že také dvojice 1) a 3) jsou různé pro každé prvočíslo p.

Řešení 2) a 3) jsou stejná právě tehdy, když je

$$2p + 2 = 3p \quad \text{a} \quad 2p + p^2 = 4p,$$

což nastane jen v případě $p = 2$.

Úloha má tedy pro $p = 2$ dvě různá řešení, jinak vždy tři různá řešení.



Obr. 12

B–1–4

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$); jsou dány délky jeho úhlopříček $AC = e$, $BD = f$ a velikost $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$. Proveďte diskusi.

ŘEŠENÍ. ROZBOR. Jestliže $\alpha = \beta$, pak je lichoběžník $ABCD$ rovnoramenný a také $e = f$. Zřejmě i *obráceně*: Jestliže $e = f$, pak $\alpha = \beta$.

Předpokládejme, že $\alpha \neq \beta$ a $e \neq f$ a že $\alpha + \beta < \pi$ (obr. 12). Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ASB \sim \triangle CSD$ plyne

$$\frac{SC}{SA} = \frac{SD}{SB},$$

takže

$$\frac{SC + SA}{SA} = \frac{SD + SB}{SB}, \tag{1}$$

z čehož vyplývá

$$\frac{SA}{SB} = \frac{e}{f}.$$

Protože je $e \neq f$, leží bod S na Apolloniově kružnici l, jejíž body mají od bodů A a B stálý poměr vzdáleností rovný číslu $\frac{e}{f}$.

Vedeme-li průsečíkem S úhlopříček příčku $GH \parallel AB$, je

$$\frac{DC}{GS} = \frac{AC}{AS} = \frac{BD}{BC} = \frac{DC}{SH}$$

a odtud plyne

$$GS = SH\,.$$

Bod S tedy leží na těžnici VF trojúhelníka ABV, kde V je průsečík přímek AD a BC a F je střed strany AB.

KONSTRUKCE. I. Nechť $\alpha + \beta < \pi$. Rozlišme dva případy:

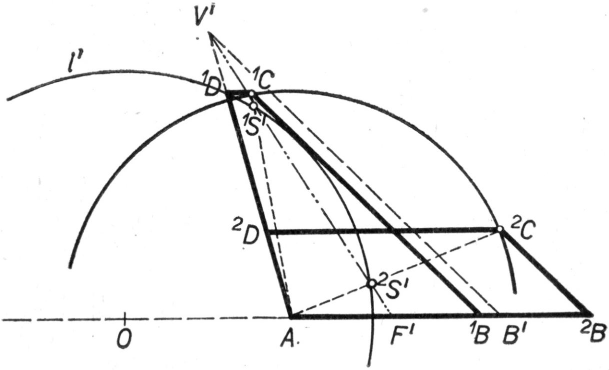
a) Je-li $\alpha = \beta$ a také $e = f$, pak $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Zvolíme úsečku $BD = f$ a sestrojíme kružnici k procházející body BD takovou, že z každého bodu jejího menšího oblouku BD je vidět úsečku BD pod úhlem $\pi - \alpha$. Na tomto oblouku zvolíme bod C. Bodem B pak vedeme rovnoběžku s CD a její průsečík s k označíme A.

Čtyřúhelník $ABCD$ je potom hledaný lichoběžník.

b) Je-li $\alpha \neq \beta$ a tedy také $e \neq f$, pak použijeme následujícího postupu (obr. 13, kde $e = 6, f = 9, \alpha = 105°, \beta = 45°$):

1. Zvolíme úsečku AB'. V jedné z polorovin určených přímkou AB' sestrojíme $\triangle\, AB'V'$ takový, že $\sphericalangle\, B'AV' = \alpha$ a $\sphericalangle\, AB'V' = \beta$.
2. Sestrojíme těžnici $V'F'$, kde F' je střed strany AB'.
3. Sestrojíme Apolloniovu kružnici l', jakožto geom. místo bodů majících od bodů A a B' poměr vzdáleností $\frac{e}{f}$.
4. Určíme průsečíky ${}^iS'$ kružnice l' s těžnicí $V'F'$.
5. Na polopřímce A^iS' sestrojíme bod ${}^iC$ takový, že $A^iC = e$.
6. Bodem ${}^iC$ vedeme rovnoběžku s AB' a její průsečík s AV' označíme ${}^iD$.

7. Bodem ${}^{i}C$ vedeme rovnoběžku s $V'B'$ a její průsečík s AB' označíme ${}^{i}B$.
8. Čtyřúhelník $A\ {}^{i}B\ {}^{i}C\ {}^{i}D$ je hledaný lichoběžník.



Obr. 13

II. Nechť $\alpha + \beta > \pi$ (a $\alpha < \pi, \beta < \pi$). Označme $A^\star = D$, $B^\star = C$, $C^\star = B$, $D^\star = A$. Pak na konstrukci lichoběžníka $A^\star B^\star C^\star D^\star$ lze použít buď postupu a), nebo b) z případu I., neboť $\alpha^\star + \beta^\star < \pi$ ($\alpha^\star = \pi - \alpha$, $\beta^\star = \pi - \beta$).

III. Je-li $\alpha + \beta = \pi$, pak hledaný čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník. Ke konstrukci tohoto rovnoběžníka je třeba umět sestrojit $\triangle\ ABD$. Jde však o známou úlohu — dána je strana $BD = f$, $\sphericalangle\ BAD = \alpha$ a těžnice na stranu DB je $AS = \dfrac{e}{2}$.

V případě $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}$ bude řešením pravoúhelník.

ZKOUŠKA. Zabývat se budeme jen případem I.
a) Body A a C leží vždy v opačných polorovinách určených přímkou BD, a proto $ABCD$ je čtyřúhelník. Z konstrukce dále plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je osově souměrný podle osy

úsečky DC, a proto je rovnoramenný a $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \alpha$ a $DB = AC = e$.

b) Podle 5. bodu je bod ${}^iC$ vnitřním bodem $\sphericalangle {}^iDA\,{}^iB$, podle 6. bodu je $A^iB \parallel {}^iD^iC$, takže $A^iB^iC^iD$ je lichoběžník. Podle bodů 1., 7. je $\sphericalangle {}^iBA^iD = \alpha$, $\sphericalangle A^iB^iC = \beta$. Z 5. bodu vyplývá, že $A^iC = e$. Dále ${}^iB^iD = f$, což plyne z toho, že podle konstrukce je $\triangle AB'{}^iS' \sim \triangle A^iB^iS$, kde ${}^iS$ je průsečík úhlopříček lichoběžníka $A^iB^iC^iD$; totiž $A^iS : {}^iB^iS = A^iS' : B'{}^iS' = e : f$ a podle (1) z rozboru je $A^iS : {}^iB^iS = e : {}^iB^iD$.

DISKUSE. Samozřejmě $\alpha < \pi$ a $\beta < \pi$, neboť v textu úlohy se užívá symbolu $\sphericalangle$.

I. a) Je-li $\alpha = \beta$ a $e = f$, má úloha nekonečně mnoho řešení. Za bod C lze totiž zvolit libovolný vnitřní bod menšího oblouku $\overset{\frown}{DB}$ kružnice k.

b) Je-li $\alpha \neq \beta$ a také $e \neq f$, je počet řešení úlohy roven počtu společných bodů vnitřku úsečky $V'F'$ a Apolloniovy kružnice ze 3. bodu. Počet řešení je tedy 0,1 nebo 2.

V případech II a III je tomu obdobně jako v případě I. (V případě III je ovšem třeba považovat rovnoběžník za zvláštní případ lichoběžníka.)

ZÁVĚR DISKUSE:

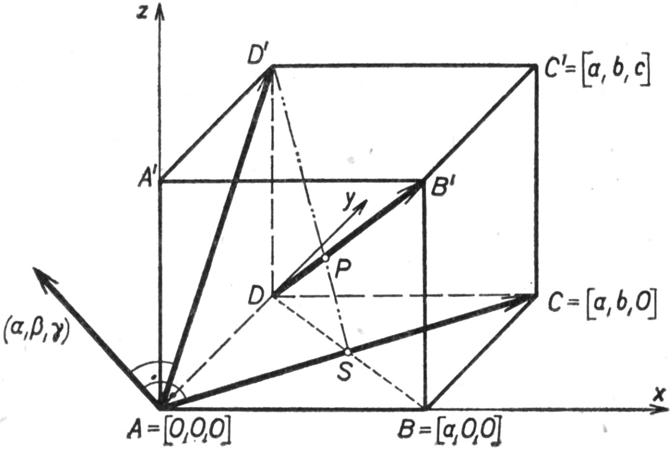
1. Je-li $\alpha = \beta$ a $e = f$, pak má úloha nekonečně mnoho řešení.
2. Je-li $\alpha \neq \beta$ a $e \neq f$, pak má úloha 0,1 nebo 2 řešení.
3. Je-li $\alpha \neq \beta$ a $e = f$ nebo $\alpha = \beta$ a $e \neq f$, pak úloha nemá řešení.

B–I–5

5. Dĺžky strán kvádra $ABCDA'B'C'D'$ označme $a = AB = A'B' = CD = C'D'$, $b = BC = B'C' = DA = D'A'$, $c = AA' = BB' = CC' = DD'$. Vypočítajte odchýlku priamky $B'D$ od roviny ACD' pomocou jej sínusu.

RIEŠENIE. Zaveďme kartézsku súradnicovú sústavu tak ako na obr. 14. Priamka DB' je rovnobežná s vektorom

$$\overrightarrow{DB'} = B' - D = (a, -b, c)\,. \tag{1}$$



Obr. 14

Ďalej určíme vektor kolmý k rovině ACD'. Nech (α, β, γ) je taký vektor. Potom musí platiť

$$(\alpha, \beta, \gamma).(C - A) = 0 \text{ a } (\alpha, \beta, \gamma).(D' - A) = 0$$

čiže

$$(\alpha, \beta, \gamma).(a, b, 0) = \alpha a + \beta b = 0, \tag{2}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma).(0, b, c) = \beta b + \gamma c = 0. \tag{3}$$

Rovnosti (2) a (3) možno splniť napr. vtedy, keď položíme

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = -\frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c},$$

t. j. hľadaný vektor kolmý k rovine ACD' je napr.

$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right). \tag{4}$$

Ak je ω odchýlka priamky DB' a kolmica k rovine ACD', potom podľa definície skalárneho súčinu je vzhľadom na (1) a (4)

$$\cos\omega = \frac{\left|(a, -b, c).\left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}},$$

t. j.

$$\cos\omega = \frac{3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

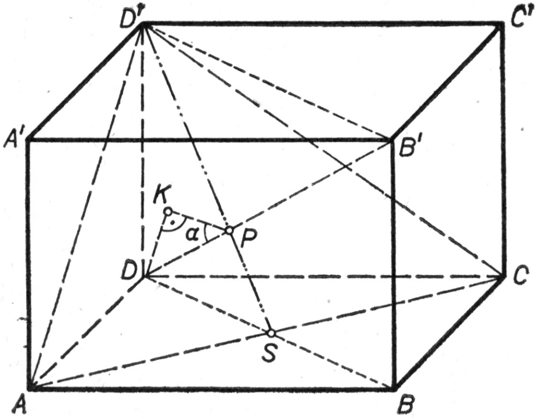
Pre odchýlku φ priamky DB' od roviny ACD' potom platí

$$\sin\varphi = \sin(90° - \omega) = \cos\omega = 3(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}\,.$$
$$.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

POZNÁMKY. 1. Pri hľadaní vektora kolmého k rovine ACD' možno použiť tiež vektorový súčin vektorov.

2. Základné poznatky o počítaní s vektormi a ich použití pri riešení geometrických úloh čitateľ nájde v zv. 28 *Školy mladých matematikov (Budinský, Šmakal: Vektory v geometrii)*.

INÉ RIEŠENIE. Nech α je hľadaná odchýlka, S stred $ABCD$, P priesečník priamky $B'D$ s rovinou ACD', K kolmý priemet bodu D do roviny ACD'. Potom P je priesečníkom priamok $B'D$ a SD', čo sa ľahko zistí, ak pretneme rovinu ACD' rovinou DBB', ktorá obidve spomínané priamky obsahuje (obr. 15).



Obr. 15

Z podobnosti trojuholníkov PDS, $PB'D'$ vyplýva

$$PD : PB' = DS : B'D' = 1 : 2, \text{ čiže } PB' = 2\,DP.$$

To však znamená, že platí

$$DP = \frac{1}{3}\,DB' = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{1}$$

Ak $K \neq P$, je podľa definície bodu K $\sphericalangle\, DKP = 90°$ a preto

$$\sin \alpha = DK : DP. \tag{2}$$

Keď $K = P$, je $\alpha = 90°$, $\sin \alpha = 1 = DK : DP$ a teda aj v tomto prípade platí vzťah (2). Stačí nám preto vypočítať dĺžku úsečky DK, ktorá je výškou ihlana $ACD'D$. Pre objem V tohto ihlana platí

$$V = \frac{1}{6}\,abc = \frac{1}{3}\,P_{ACD'}.DK\,,$$

z čoho

$$DK = \frac{abc}{2\,P_{ACD'}}, \tag{3}$$

kde $P_{ACD'}$ znamená plošný obsah trojuholníka ACD'.

Vypočítame $P = P_{ACD'} = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, kde $s = \frac{1}{2}(x+y+z)$, $x = \sqrt{b^2+c^2}$, $y = \sqrt{a^2+c^2}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$.

Zrejme platí:

$$P^2 = \frac{1}{16}[(x+y)+z].[(x+y)-z].[z+(x-y)].$$

$$.[z-(x-y)] = \frac{1}{16}[(x+y)^2 - z^2].[z^2-(x-y)^2] =$$

$$= \frac{1}{16}[2\,xy + (x^2+y^2-z^2)]\,.\,[2\,xy - (x^2+y^2-z^2)] =$$

$$= \frac{1}{16}(2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4).$$

Po dosadení za x, y, z a úprave dostaneme

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \tag{4}$$

Zo vzťahov (2), (3), (4), (1) vyplýva

$$\sin\alpha = \frac{3abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.\,\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

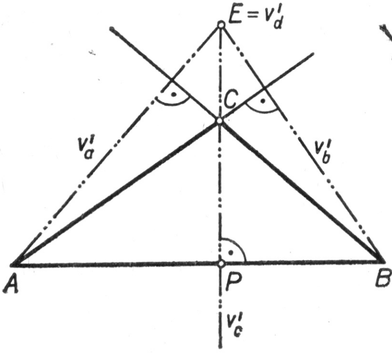
B–I–6

6. a) Ak všetky štyri výšky štvorstena prechádzajú tým istým bodom, potom aspoň jeden z jeho vrcholov má tú vlastnosť, že päta výšky z neho spustenej leží vo vnútri protiľahlej steny. Dokážte.

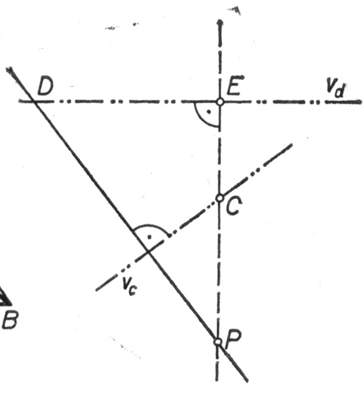
b) Zostrojte sieť takého štvorstena, ktorého každá výška má pätu mimo príslušnej steny.

RIEŠENIE. a) Nech ABC je stena, ktorej vnútro neobsahuje pätu E výšky spustenej z vrcholu D. Výška v_a (priamka) spustená z vrcholu A na rovinu BCD je kolmá na priamku BC. Preto priamkou v_a možno viesť rovinu α kolmú k BC. Rovina α pretne rovinu ABC v priamke $v_a' \perp BC$ a prechádzajúcej vrcholom A, t. j. vo výške trojuholníka ABC. Analogicky zostrojíme výšky v_b', v_c' trojuholníka ABC ako pravouhlé priemety výšok v_b, v_c štvorstena $ABCD$.

Výšky v_a', v_b', v_c' sa pretínajú v bode, ktorý je podľa dokazovanej vety pätou E výšky v_d. Pretože bod E nepatrí do vnútra $\triangle ABC$, je $\triangle ABC$ tupouhlý alebo pravouhlý. Nech je napr. $\sphericalangle ACB$ tupý (obr. 16). Situácia v rovine $\varrho \perp AB$ a obsahujúcej výšku $v_d = DE$ na obr. 17. Pritom P označuje priesečník ϱ, AB. Pretože bod P leží medzi bodmi A, B, patrí vnútro úsečky DP do vnútra trojuholníka ABD. Pretože bod C patrí do vnútra odvesny PE trojuholníka DEP, leží päta výšky v_c, t. j. kolmice



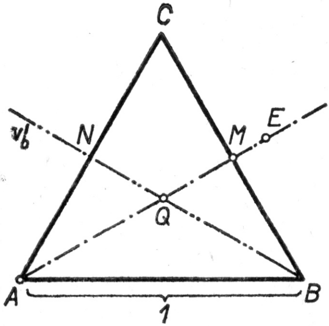
Obr. 16



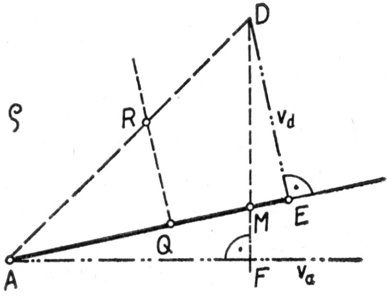
Obr. 17

spustenej z bodu C na preponu DP vo vnútri úsečky DP, t. j. vo vnútri trojuholníka ABD.

b) Zvoľme za $\triangle ABC$ rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 1. Bod E (pätu výšky v_d) zvoľme na osi uhla $\sphericalangle BAC$ tak, aby bolo $AE = 1$. Kladnú dĺžku výšky v_d označme $DE = v$ (obr. 18). Označme ešte M stred strany BC. Situácia v rovine $\varrho \perp BC$ a prechádzajúcej bodom D je znázornená na obr. 19.



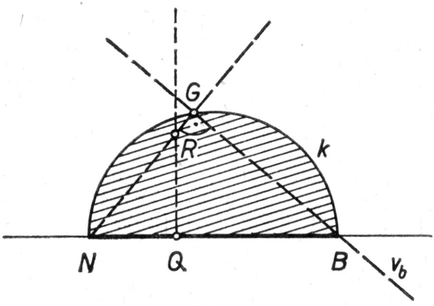
Obr. 18



Obr. 19

Pretože bod M leží medzi A a E a pretože $\sphericalangle AED$ je pravý, je $\sphericalangle AMD$ tupý a päta F výšky v_a, t. j. kolmice spustenej z bodu A na priamku DM, leží mimo úsečky DM, t. j. mimo $\triangle BCD$.

Zostáva ešte dokázať, že päta G výšky v_b leží mimo $\triangle ACD$ a v dôsledku symetrie štvorstena $ABCD$ podľa roviny ϱ, že i päta výšky v_c leží mimo $\triangle ABD$. Pravouhlý priemet výšky v_b



Obr. 20

do roviny ABC je výška v_b' trojuholníka ABC prechádzajúca stredom N strany AC. Situácia v rovine $\sigma \perp AC$ a prechádzajúcej vrcholom B je znázornená na obr. 18, 19 a 20. Pritom Q je priesečník výšok AM, BN. Označme R bod roviny ACD, ktorý leží na kolmici vztýčenej v bode Q na rovinu ABC. Bod G leží na polkružnici k zostrojenej nad priemerom BN. Ak zvolíme bod R vo vnútri vyšrafovaného polkruhu (čo znamená voľbu výšky v), leží bod G mimo úsečky NR, t. j. mimo $\triangle ACD$.

Tým je žiadaný štvorsten zostrojený.

3. *KATEGORIE C*

C–I–1

1. Je dán čtverec, jehož strana má velikost a. Přímky, spojující středy stran s vrcholy protějších stran, dělí čtverec na 25 obrazců, mezi nimiž je celkem 5 navzájem neshodných druhů. Vypočtěte obsah každého z těchto pěti navzájem neshodných obrazců.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Úloha je příkladem, který vyžaduje jistou dávku představivosti a kombinačního smyslu. V podstatě jde při řešení úloh tohoto typu o uplatnění některé z následujících složek nebo o jejich kombinaci:

a) určení velikosti určitých úseček a úhlů metodami ryze geometrickými nebo trigonometricky nebo pomocí souřadnic;

b) použití vztahů mezi obsahy obrazců, z nichž jsou sestaveny hledané obrazce.

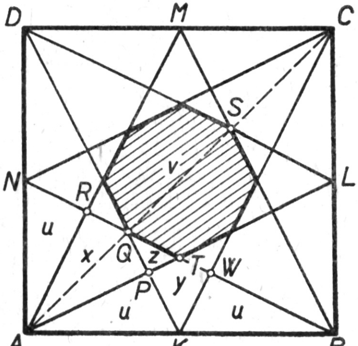
Při postupu b) často užíváme věty (V): Jsou-li p_1, p_2 obsahy dvou překrývajících se obrazců, q obsah jejich průniku, s obsah jejich sjednocení, pak platí

$$p_1 + p_2 = s + q\,.$$

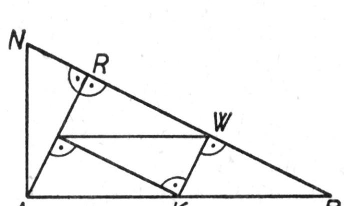
V naší úloze budete postupovat asi polointuitivně; pravděpodobně nedokážete exaktně shodnost určitých obrazců — rozumný důkaz se opírá o užití shodných zobrazení (otočení) a ta vám nejsou asi v potřebné míře běžná. Ovšem těžiště úlohy je jinde; přesto bychom měli provést aspoň náznak důkazu shodnosti. Výsledek zkoumání je tento:

Čtverec $ABCD$ je rozdělen v 25 nepřekrývajících se obrazců, a to (viz obr. 21):

(1) v 4 shodné čtyřúhelníky, z nichž jeden je $APQR$; jeho obsah je označen x;
(2) v 4 shodné čtyřúhelníky, z nichž jeden je $KWTP$; jeho obsah je označen y;
(3) v 8 shodných trojúhelníků, z nichž jeden je PTQ; jeho obsah je označen z;
(4) v 8 shodných trojúhelníků, z nichž jeden je ARN; jeho obsah je označen u;
(5) v jeden osmiúhelník (na obr. 21 vyšrafovaný), jehož obsah je označen v.



Obr. 21



Obr. 22

Prvním krokem může být např. určení obsahu u. Obr. 22 ukazuje, jak lze trojúhelník ABN rozdělit v 5 navzájem shodných trojúhelníků, z nichž jeden je ARN; je proto

$$u = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{20} . \tag{1}$$

Dále je např. možno rozdělit trojúhelník ABN ve dva trojúhelníky ABT, ANT, které mají obsahy sobě rovné (je totiž $BT = NT$, neboť úsečky AL, BN se navzájem půlí). Je tedy

$$2u + y = \frac{a^2}{8} , \tag{2}$$

$$x + z + u = \frac{a^2}{8} . \tag{3}$$

Z (2) a (1) se vypočte y; vyjde

$$y = \frac{a^2}{40} . \tag{4}$$

Pro x, z máme pak jen jednu rovnici; potřebujeme ještě rovnici další. Můžeme ji získat třeba dvojím vyjádřením obsahu čtyřúhelníka $AKQN$, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé; přitom je $KN = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $AQ = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, neboť body Q, S dělí úhlopříčku AC čtverce $ABCD$ na tři shodné úsečky, jak plyne z trojúhelníků CDQ a ABS.

Je tedy $AKQN = x + 2u = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2}{6}$,

tj.

$$x + 2u = \frac{a^2}{6} . \tag{5}$$

Z (5) a (1) vypočteme

$$x = \frac{a^2}{15} \tag{6}$$

a konečně z (3)

$$z = \frac{a^2}{120}\,. \tag{7}$$

Zbývá obsah v; z rozdělení čtverce $ABCD$ dostaneme

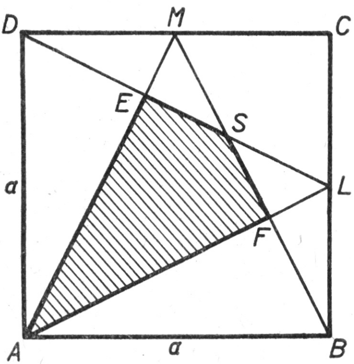
$$4x + 4y + 8z + 8u + v = a^2$$

a odtud

$$v = \frac{a^2}{6}\,. \tag{8}$$

Vzorce (1), (4), (6), (7), (8) dávají řešení úlohy.

Jinak je možno zvolit polopřímky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ za kladné poloosy souřadnic a vypočítat souřadnice některých bodů, např. P, Q, R, T, pomocí nichž pak určíme hledané obsahy. Zpravidla přitom potřebujeme vzorec pro vzdálenost dvou bodů; je to jednoduchá aplikace Pythagorovy věty.



Obr. 23

Řešení je dost trikové, jistý systém se do něho vnese použitím metody souřadnic. Rozhodně byste se měli při řešení úlohy C–I–1 seznámit s větou (V) a jejím použitím. Zde je třeba zdůraznit, že zpravidla známe čísla p_1, p_2. V tomto případě vypočteme to číslo z čísel q, s, pro něž je výpočet jednodušší, a zbývající z čísel q, s určíme podle věty (V).

Ukázka související se situací úlohy C–I–1. Je dán čtverec $ABCD$ (obr. 23) a máme určit obsah sjednocení a průniku trojúhelníků ABM, ADL. Zde je $p_1 = p_2 = \frac{a^2}{2}$. Bude asi pohodlnější určit obsah q průniku vyšrafovaného čtyřúhelníka $AFSE$ než obsah s sjednocení $\triangle ABM \cup \triangle ADL$.

Zvolíme-li polopřímky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ za poloosy, určíme-li rovnice přímek AL, AM, DL, BM, vyjde $S = \left[\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a\right]$, $E = \left[\frac{2}{5}a; \frac{4}{5}a\right]$, $F = \left[\frac{4}{5}a; \frac{2}{5}a\right]$ (všimněme si symetrie podle přímky AC a jejích důsledků!). Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů vypočteme

$$AS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}, \quad EF = \frac{2}{5}a\sqrt{2},$$

a tedy

$$AESF = \frac{1}{2}AS \,.\, EF = \frac{1}{2} \,.\, \frac{2}{3}a\sqrt{2} \,.\, \frac{2}{5}a\sqrt{2} = \frac{4}{15}a^2 .$$

V každém případě vyžaduje tato úloha dosti času.

C–I–2

2. Dokážte, že každé prirodzené číslo $n > 10$ sa dá rozložiť aspoň dvomi spôsobmi na súčet dvoch prirodzených čísel tak, že prvý sčítanec je prvočíslo a druhý sčítanec je číslo zložené.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Jde o jednoduchou úlohu z číselné teorie. Snad by bylo vhodné uvést ji některou obměnou, která by vám napověděla zejména to, že se doporučuje rozlišit lichá a sudá n.

Varianta: Dokažte, že každé přirozené číslo $n > 10$ lze vyjádřit aspoň jedním způsobem jako součet tří přirozených čísel, z nichž dvě jsou prvočísla a třetí je číslo složené.

Pokusíme se zachovat prvočísla konstantní (pak ovšem musí být malá).

a) Je-li n liché, zvolíme prvočísla 2, 3; protože je $n > 10$, je $n - 2 - 3 = n - 5 > 5$. Mimoto je $n - 5$ číslo sudé, a tudíž složené.

b) Je-li n sudé, zvolíme prvočísla 3, 5; protože je $n > 10$, je $n - 3 - 5 = n - 8 > 2$. Mimoto je $n - 8$ číslo sudé, a tudíž složené.

Při řešení soutěžní úlohy je ovšem třeba hledat dva rozklady čísla n; pro n liché je snadno dostaneme pomocí čísel $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$. Pro n sudé dostaneme jeden rozklad pomocí čísla $n - 2$; druhý najdeme z faktu, že právě jedno z čísel $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$ je násobek tří; nápad dokázat tuto pomocnou větu je jedním z klíčů k řešení úlohy.

C–I–3

3. Stejně velké utěrky čtvercového tvaru pokrývají obdélník *ABCD*, aniž se navzájem překrývají. Pověsí-li se jedna těsně vedle druhé na šňůru, je potřebná délka šňůry rovna obvodu trojúhelníka *ABC*. Kolik je utěrek?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato úloha náleží svou tematikou do číselné teorie, i když má nátěr geometrický, popř. je to slovní úloha, kterou lze formulovat geometricky.

Snad nejvhodnějším uvedením do úlohy C–I–3 by byla její trochu složitější *varianta*:

Délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka jsou přirozená čísla a, b; jeho obsah je roven jeho obvodu. Určete délky jeho stran.

Z textu úlohy plyne

$$\frac{1}{2}ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\ ;$$

odtud

$$\frac{a^2b^2}{4} - a^2b - ab^2 + 2ab + a^2 + b^2 = a^2 + b^2$$

a nadále

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0\,.$$

Protože je $a \neq 0$, $b \neq 0$, je $ab - 4a - 4b + 8 = 0$, tj.

$$(a - 4)(b - 4) = 8\,. \tag{1}$$

Upozorňujeme na způsob, jak se upravuje bilineární funkce $ab - 4a - 4b + 8$ na součin dvou lineárních dvojčlenů doplněný absolutním členem.

Protože a, b jsou čísla přirozená, jsou $a - 4$, $b - 4$ sdružení dělitelé čísla 8 (ne nutně kladní). Přehled o všech možných řešeních dává tabulka:

$a-4$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$b-4$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1
a	-4	0	2	3	5	6	8	12
b	3	2	0	-4	12	8	6	5

Úloha má tedy dvě řešení: 6; 8; 10 a 5; 12; 13.

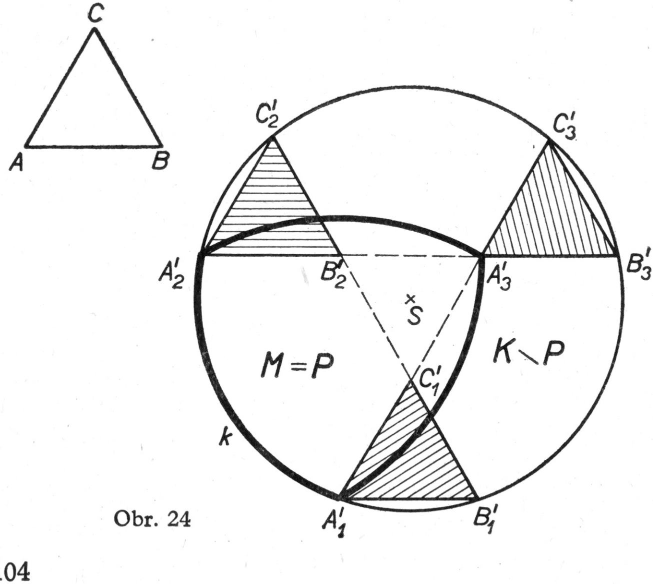
V soutěžní úloze č. 3, která je jednodušší, zní základní rovnice $ab = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Její řešení je $a = 3$, $b = 4$ nebo $a = 4$, $b = 3$; počet utěrek je tedy vždy $ab = 12$.

C–I–4

4. Je daný kruh **K** so stredom S a polomerom r; mimo kruhu **K** je daný rovnostranný trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžku a. Označme $A'B'C'$ trojuholník, ležiací v kruhu **K**, ktorý vznikol posunutím trojuholníka ABC. Určte a narysujte množinu **M** všetkých takto zostrojených bodov A'.

KOMENTÁŘ. Řešení úlohy vyžaduje nezbytně experimentování. Doporučujeme narýsovat kruh **K** o poloměru $r = 6$ cm a z tuhého papíru vystřihnout rovnostranné trojúhelníky $A'B'C'$ o straně 4 cm a $A''B''C''$ o straně 9 cm; trojúhelník $A''B''C''$ bude sloužit k opakování pokusu.

Posouváním trojúhelníka $A'B'C'$ vyexperimentujeme „extrémní" polohy $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$, $A_3'B_3'C_3'$ takové, že body A_1', B_1', B_3', C_3', C_2', A_2' leží na obvodu kruhu **K**, body C_1', A_3', B_2' v jeho vnitřku a že úsečky $A_1'B_1'$, $B_3'C_3'$ a $C_2'A_2'$ vzniknou postupně posunutím stran AB, BC, CA. Intuitivně zjistíme, že proměnný bod A' vyplní trojúhelníkový obrazec **P**, omezený shodnými kruhovými oblouky $\widehat{A_1'A_2'}$, $\widehat{A_2'A_3'}$, $\widehat{A_3'A_1'}$



Obr. 24

(obr. 24). Přitom oblouk $\widehat{A_1'A_2'}$ náleží obvodu kruhu **K**, oblouk $\widehat{A_2'A_3'}$ vznikne posunutím oblouku $\widehat{C_2'C_3'}$, které je dáno dvojicí $C_2' \to A_2'$, oblouk $\widehat{A_3'A_1'}$ vznikne posunutím oblouku $\widehat{B_3'B_1'}$, které je dáno dvojicí $B_3' \to A_3'$.

Snadno se i dokáže, že každý bod oblasti **P**, omezené tlustě narýsovanými kruhovými oblouky, je vrcholem A' některého z trojúhelníků $A'B'C'$ a že žádný bod z $\mathbf{K} \setminus \mathbf{P}$ není vrcholem A' takového trojúhelníka. Je tedy $\mathbf{P} = \mathbf{M}$.

C–I–5

5. V rovině jsou dány body A, M, N, které neleží v přímce. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ tak, aby přímky BC, CD procházely po řadě body M, N a aby platilo $AB : BC = 2 : 5$.

KOMENTÁŘ. Jeden z principů řešení této úlohy (a snad nejjednodušší) je použití obvodových úhlů. Úlohu lze uvést obdobnou úlohou (U): Jsou dány tři body A, P, Q, které leží v přímce, a to tak, že A odděluje body P, Q. Máme sestrojit čtverec $ABCD$ tak, aby přímky BC, CD procházely po řadě body P, Q.

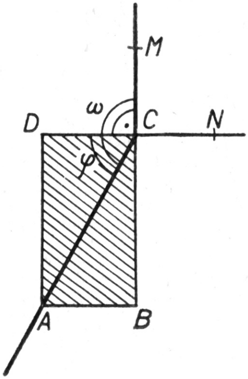
Princip řešení: Je zřejmé, že bod C náleží třem množinám bodů: kružnici $\mathbf{M}_1$ sestrojené nad průměrem PQ, množině $\mathbf{M}_2$ složené ze dvou oblouků kružnic, definované takto:

$$\mathbf{M}_2 = \{X;\, X \neq A, P \wedge \sphericalangle\, AXP = 45°\},$$

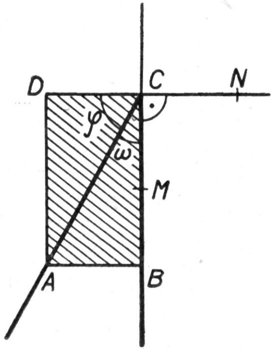
a množině $\mathbf{M}_3$ vytvořené obdobně nad úsečkou AQ.

Při řešení soutěžní úlohy C–I–5 hledáme opět dvě množiny bodů, jimž náleží vrchol C. Jedna z nich je kružnice k sestrojená nad průměrem MN. Druhá je množina **M** bodů X, z nichž je vidět úsečku AM pod daným úhlem ω. Je-li $\varphi = \sphericalangle\, ACD$, je buď $\omega = 90° + \varphi$, nebo $\omega = 90° - \varphi$. Množina **M** se tedy bude skládat ze dvou shodných kružnic k_1, k_2 (bez bodů A, M)

se společnou tětivou AM; každá z kružnic k_1, k_2 má mimo bod M s kružnicí k ještě jeden další společný bod. Diskusi úlohy nebudou asi řešitelé provádět exaktně, spokojíme se s náznakem. Musí si ovšem uvědomit obě možnosti $\omega = 90° + \varphi$, $\omega = 90° - \varphi$; jsou načrtnuty na obr. 25 ab.



Obr. 25a



Obr. 25b

Jde ještě o určení úhlu φ. Ten zjistíme, narýsujeme kdekoli pravoúhlý trojúhelník KLP s přeponou KP, pro který platí $KL : LP = AB : BC$.

Impulsy, které vedou k řešení úlohy C–I–5, budou asi tyto:

a) pomocná úloha (U);

b) vyšetření situací: bod M náleží polopřímce $\overrightarrow{CB}$ nebo polopřímce opačné;

c) určení úhlu φ.

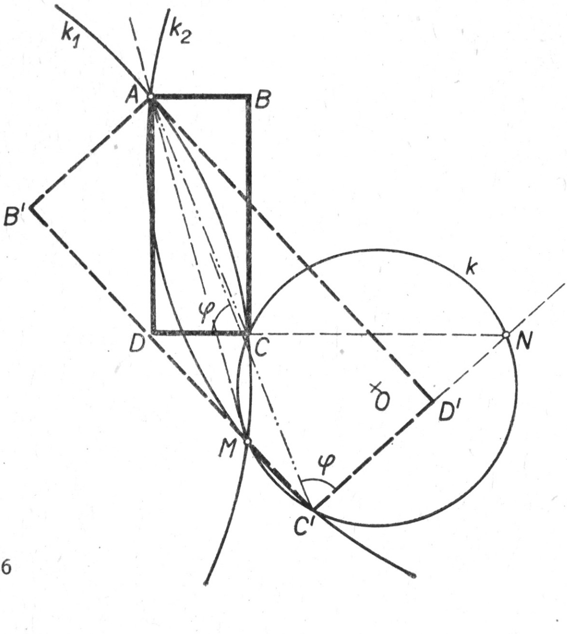
Nezapomeňme na kontrolu: jako v úloze (U) máme i zde třetí množinu bodů pro vrchol C; jsou to dvě kružnice se společnou tětivou AN.

Uvedeme nyní ještě podrobné ŘEŠENÍ ÚLOHY č. 5:

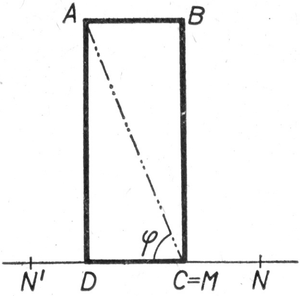
ROZBOR. Předpokládejme, že úloha je vyřešena a že $C \neq M$, $C \neq N$ (obr. 26). V komentáři k úloze je uvedeno, že vrchol C pak náleží dvěma množinám bodů. Jedna z nich je kružnice k (bez bodů M, N) sestrojená nad průměrem MN. Druhá je množina **M** bodů X, z nichž je vidět úsečku AM pod úhlem $\omega = 90° - \varphi$ nebo $\omega = 90° + \varphi$, kde $\varphi = \sphericalangle ACD$. Množina **M** se skládá ze dvou shodných kružnic k_1, k_2 (bez bodů A, M) se společnou tětivou AM.

Je-li $C = M$, pak podle obr. 27 je $\sphericalangle AMN$ buď φ, nebo $180° - \varphi$.

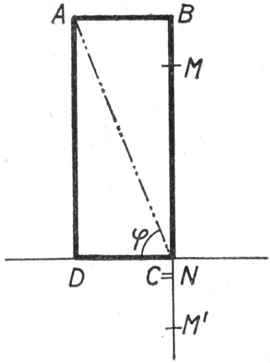
Je-li $C = N$, pak podle obr. 28 je $\sphericalangle ANM$ buď $90° - \varphi$, nebo $90° + \varphi$.



Obr. 26



Obr. 27



Obr. 28

KONSTRUKCE. Úhel φ se sestrojí v pomocném pravoúhlém trojúhelníku, neboť z textu úlohy víme, že $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{2}{5}$.

1. Vrchol C určíme jako bod průniku $(k \setminus \{M, N\} \cap \mathbf{M}$. Na přímce CN pak sestrojíme bod D tak, aby bylo $AD \parallel MC$; na přímce CM určíme bod B tak, aby bylo $AB \parallel CN$. Čtyřúhelník $ABCD$ je hledaný pravoúhelník.

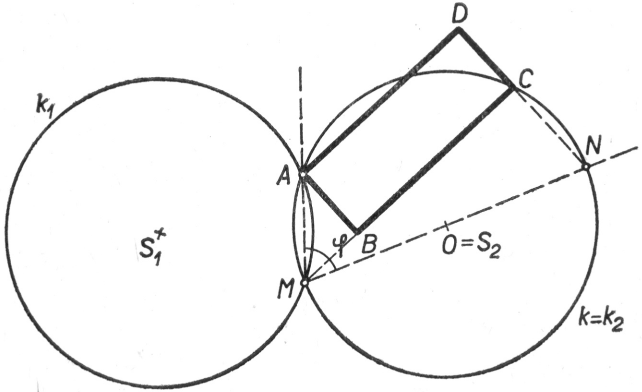
2. Pokud $\sphericalangle\ AMN$ je φ nebo $180° - \varphi$ a nebo $\sphericalangle\ ANM$ je $90° - \varphi$ nebo $90° + \varphi$, dostaneme další řešení podle obr. 27 a obr. 28.

ZKOUŠKA. Ad bod 1. konstrukce. Čtyřúhelník $ABCD$ je pravoúhelník, neboť byl sestrojen jako rovnoběžník a $\sphericalangle\ DCB = \sphericalangle\ MCN = 90°$, neboť $C \in k$, $C \neq M$, $C \neq N$. Podle konstrukce též přímky BC, CD procházejí po řadě body M, N. Pro $\sphericalangle\ ACM$ jsou dvě možnosti:

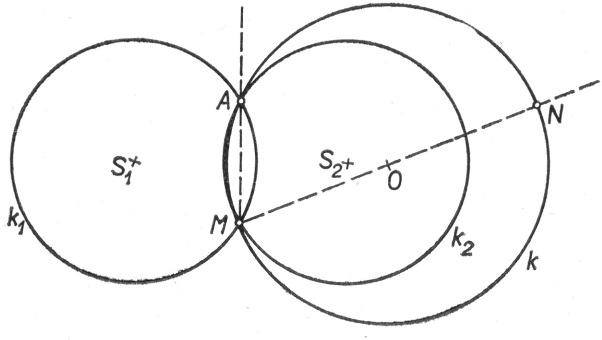
a) Je-li $\sphericalangle\ ACM = 90° + \varphi$, pak $\sphericalangle\ ACM > 90°$, a proto M leží na polopřímce opačné k polopřímce CB, takže $\sphericalangle\ ACD = \varphi$, tj. $AB : BC = 2 : 5$.

b) Je-li $\sphericalangle ACM = 90° - \varphi$, pak $\sphericalangle ACM < 90°$, tj. bod M leží na polopřímce CB, takže $\sphericalangle ACD = \varphi$, tj. $AB : BC = 2 : 5$.

K bodu 2. konstrukce. Z obr. 27 a 28 je vidět, že v těchto případech mají sestrojené pravoúhelníky $ABCD$ všechny vlastnosti požadované úlohou.



Obr. 29



Obr. 30

DISKUSE.

I. Leží-li bod A na k, pak jsou dvě možnosti:

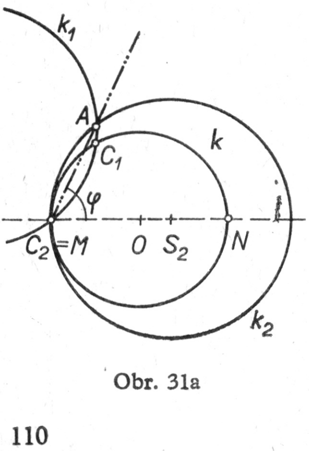
a) $\sphericalangle\ AMN = \varphi$ (tj. $\sphericalangle\ ANM = 90° - \varphi$), pak jedna z kružnic k_1, k_2 splyne s k (viz obr. 29). Pak má úloha *nekonečně mnoho řešení.* Za vrchol C lze zvolit každý bod kružnice k různý od bodu A.

b) $\sphericalangle\ AMN \neq \varphi$ (tj. $\sphericalangle\ ANM \neq 90° - \varphi$ a také $\sphericalangle\ AMN \neq$ $\neq 180° - \varphi$, $\sphericalangle\ ANM \neq 90° + \varphi$), pak úloha *nemá řešení*, protože kružnice k, k_1, k_2 mají společné jen body A, M (viz obr. 30).

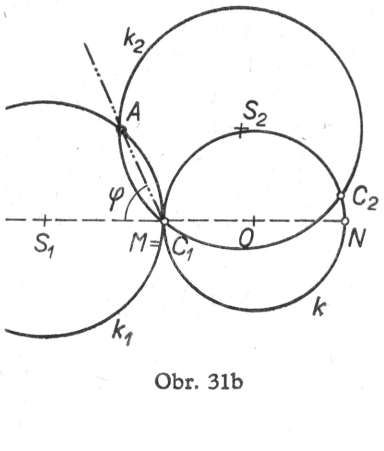
II. Neleží-li bod A na k, pak má úloha *vždy dvě řešení*. Průnik $(k \setminus \{M, N\}) \cap \mathbf{M}$ obsahuje nejvýše dva body. Počet bodů tohoto průniku se zmenšuje ze dvou vždy o 1 bod právě když:

a) Kružnice k má s jednou z kružnic k_1, k_2 dotyk v bodě M. Pak ovšem $\sphericalangle\ AMN$ je roven φ, nebo $180° - \varphi$ (obr. 31a, 31b) a lze najít další jedno řešení takové, že $C = M$.

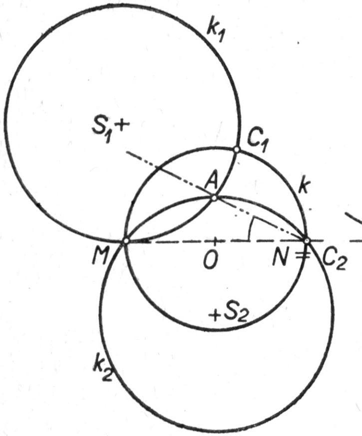
b) Jedna z kružnic k_1, k_2 prochází bodem N. Pak však $\sphericalangle\ ANM$ je buď $90° - \varphi$, nebo $90° + \varphi$ (obr. 32a, b), tj. lze najít další jedno řešení takové, že $C = N$.



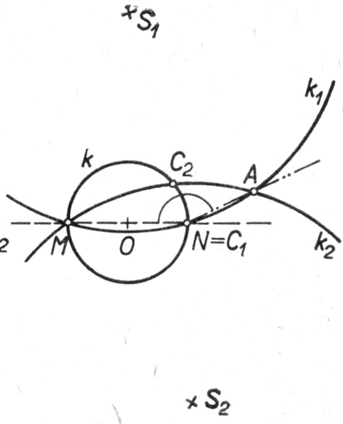
Obr. 31a



Obr. 31b



Obr. 32a



Obr. 32b

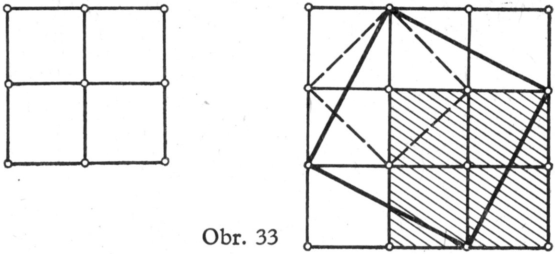
C–I–6

6. Je dána čtvercová šachovnice o 25 polích. Určete počet všech čtverců, z nichž každý má všechny své vrcholy ve vrcholech čtverců šachovnice.

KOMENTÁŘ. Úloha nevyžaduje nic jiného než určitý systém sčítání čtverců. Tento systém můžeme s žáky probrat na šachovnici s n^2 poli pro $n < 5$, tedy $n = 1, 2, 3, 4$; příslušné počty čtverců označíme s_n. Je zřejmě $s_1 = 1$, $s_2 = 6$ (viz obr. 33). Pro $n = 3$ dostaneme mimo devět malých čtverců a jeden základní čtverec o straně 3, čtyři čtverce o straně $\sqrt{2}$, čtyři čtverce o straně 2 (šrafovaný) a dva čtverce o straně $\sqrt{5}$; celkem tedy je

$$s_3 = 1 + 4 + 4 + 2 + 9 = 20.$$

Pro $n = 4$ už se začíná objevovat systém. Nejprve spočteme



Obr. 33

čtverce složené z polí šachovnice. Čtverce složené z k^2 polí ($k = 1, 2, \ldots, n$) leží v $n - k + 1$ různých pásech složených z k sloupců a zároveň v $n - k + 1$ různých pásech složených z k řad (zde můžeme uvažovat zcela obecně pro libovolné n a $k \leqq n$). Počet těchto čtverců je tedy

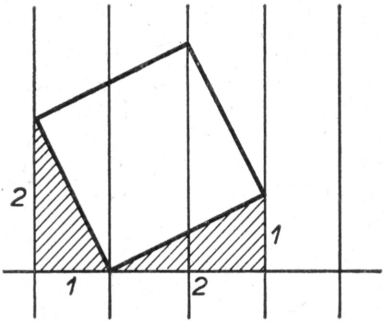
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

V případě $n = 4$ dostaneme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30. \qquad (1)$$

Ostatní čtverce nemají strany rovnoběžné se stranami polí šachovnice. Zvolíme-li stranu pole za jednotku délky, pak delky průmětu dvou sousedních stran čtverce jsou přirozená čísla a, b, pro která platí (viz obr. 34)

$$a + b \leqq 4.$$



Obr. 34

V úvahu tedy přicházejí jen dvojice čísel 3; 1, dále 2; 2, 2; 1 a konečně

1; 1. Pokud je $a \neq b$, určíme dva čtverce této vlastnosti a posouváme je ve směru přímek šachovnice. Je-li $a = b$, stačí jeden výchozí čtverec. Celkem tak dostaneme další čtverce podle tabulky:

(a, b)	(3,1)	(2,2)	(2,1)	(1,1)
Počet čtverců	2	1	8	9

Celkem dalších 20 čtverců. Spolu s (1) dostaneme

$$s_4 = 20 + 30 = 50$$

čtverců. Podle tohoto návodu mohou řešitelé vypočítat samostatně s_5.

Lze odvodit obecnou rekurentní formuli pro s_n a z ní indukcí dokázat explicitní vzorec pro s_n.

Podrobné ŘEŠENÍ ÚLOHY č. 6:

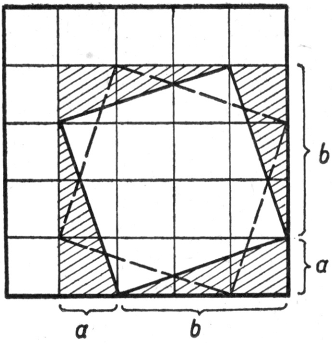
Pro případy šachovnice s n^2 poli, kde $n = 1, 2, 3, 4$, bylo řešení provedeno v komentáři. Při řešení soutěžní úlohy budeme postupovat obdobně.

Nejdříve určíme počet čtverců skládajících se z polí šachovnice. Těchto čtverců je celkem

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55. \tag{1}$$

Ostatní čtverce nemají strany rovnoběžné se stranami polí šachovnice. Zvolíme-li stranu pole za jednotku délky, pak délky průmětů dvou sousedních stran čtverce jsou přirozená čísla a, b, pro která platí (viz obr. 35)

$$a + b \leqq 5.$$



Obr. 35

Je-li $a \neq b$, pak čtverců tohoto druhu je dvojnásobek počtu čtverců skládajících se z $(a + b)^2$ polí šachovnice (viz obr. 35). Je-li $a = b$, pak čtverců tohoto druhu je stejný počet jako čtverců skládajících se z $(a + b)^2 = (2a)^2$ polí šachovnice. Počty všech těchto čtverců zachycuje tabulka:

(a, b)	(4,1)	(3,2)	(3,1)	(2,2)	(2,1)	(1,1)
Počet čtverců	$2.1 = 2$	$2.1 = 2$	$2.2^2 = 8$	$2^2 = 4$	$2.3^2 = 18$	$4^2 = 16$

Počet všech čtverců z tabulky je 50. Spolu s (1) je celkem všech čtverců

$$s_5 = 55 + 50 = 105.$$

4. *KATEGORIE Z*

Z–I–1

1. Ve sklepě *JZD* jsou dva sudy vína; v jednom je 80 litrů vína po 10,— Kčs, v druhém 120 litrů vína po 8,— Kčs.

a) Jaké stejné množství vína je třeba vzít z každého sudu a nalít do druhého sudu tak, aby v obou sudech vzniklo víno téže ceny za jeden litr a jaká bude cena za jeden litr směsi při zachování celkové ceny vína?

b) Řešte tuto úlohu obecně: V sudě A je a litrů vína po m Kčs, v druhém sudě B je b litrů vína po n Kčs.

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Úloha náleží do rozsáhlé a oblíbené kategorie tzv. *slovních úloh o směsi.* Často vám asi působí potíže už pochopení samotné formulace textu (také text úlohy Z–I–1 není právě nejjasnější); nesnáze působí i matematická formulace úlohy, která je klíčem k řešení; matematická formulace se obvykle skládá z několika rovnic a dále z nerovnic, které vyjadřují případné omezující podmínky. Domníváme se, že by se při řešení měly více zdůraznit grafické metody; i když grafické metody nedávají zpravidla numerické řešení s potřebnou přesností, poskytnou řešiteli přehled o situaci — předvádějí mu totiž grafický model reálné situace, podobně jako je tomu např. u grafických jízdních řádů.

Konkrétně v úloze Z–I–1 jde o toto: z množství a litrů vína ceny c_1 Kčs za litr se ubere x litrů a přidá se stejné množství jiného vína ceny c_2 Kčs za litr. Tato situace se vyskytuje v úloze b), kde je označení m, n místo c_1, c_2. Základní úloha formulovaná z této situace je asi tato: *Jaká je cena y Kčs za litr směsi?*

Dvojice $[x; y]$ tvoří část lineární funkce

$$y = \frac{1}{a}(c_1(a - x) + c_2 x)$$

neboli

$$y = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a} x \, ; \qquad (1)$$

říkáme „část“ proto, že x, y jsou vázány podmínkami $0 \leqq x \leqq a$, $y \geqq 0$. Zde je vhodná příležitost zamyslit se nad definičním oborem funkce a nad oborem funkčních hodnot. Jistě by bylo užitečné sestrojit grafy funkcí (1) pro různé hodnoty „konstant – parametrů a, c_1, c_2“ a zkoumat případy $c_1 > c_2$ i $c_1 < c_2$.

Chceme-li řešit úlohu b), užijeme mimo funkci (1) ještě funkce

$$y = c_2 + \frac{c_1 - c_2}{b} x\,, \tag{2}$$

která vznikne z (1), vyměníme-li zároveň a, b a c_1, c_2. Z (1), (2) vyjde podle textu úlohy b)

$$c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a} \,.\, x = c_2 + \frac{c_1 - c_2}{b} x$$

neboli

$$(c_1 - c_2)\, x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = c_1 - c_2\,. \tag{4}$$

Je-li $c_1 = c_2$, jsou řešením rovnice (4) všecka x z intervalu $0 \leqq x \leqq \min(a, b)$ (proč?). Je-li $c_1 \neq c_2$, má rovnice (4) jediné řešení

$$x = \frac{ab}{a + b}\,. \tag{5}$$

Spojením (5), (1) nebo (5), (2) dostaneme společnou cenu y směsi vín

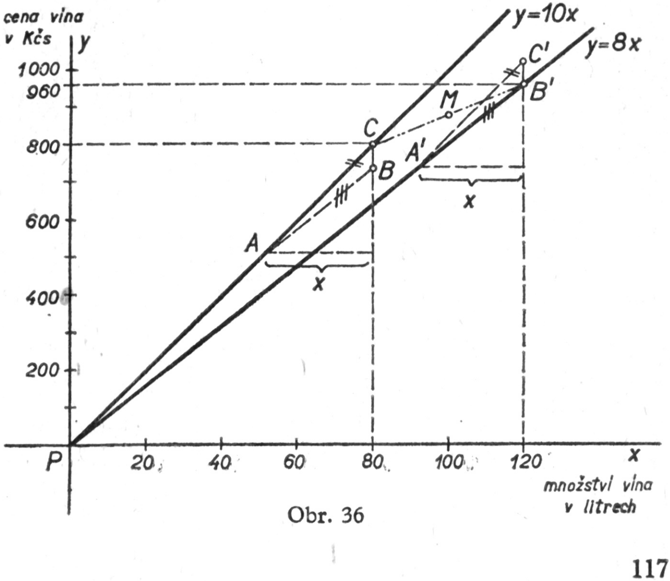
$$y = \frac{ac_1 + bc_2}{a + b}\,. \tag{6}$$

Vzorec (6) platí i v případě $c_1 = c_2$.

Je pravděpodobne, že by bylo nejúčelnější studovat jako průpravu lineární funkci (1), pak rozřešit úlohu b) a teprve nakonec úlohu a). Zdá se totiž, že v tomto případě numerické řešení celý postup spíše zatemňuje než zjednodušuje. Zejména se přitom zcela ztrácí fakt, že množství x závisí jen na a, b a nikoli na cenách c_1, c_2. Úlohu a) pak řešíme dosazením $a = 80$, $b = 120$, $c_1 = 10$, $c_2 = 8$. Podle (5), (6) vyjde $x = 48$, $y = 8{,}8$.

Při grafickém řešení sestrojíme v soustavě pravoúhlých souřadnic grafy obou druhů vína podle obr. 36. Počáteční stavy obou druhů vína a jejich ceny jsou znázorněny body B', C. Ubereme-li v obou případech totéž množství vína x a doplníme-li je stejným množstvím druhého druhu, dostaneme stavy znázorněné body B, C'. Tak vzniknou dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, pro něž platí $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$ a mimoto jejich výšky na strany BC, $B'C'$ mají tutéž délku x. Trojúhelník $A'B'C'$ vznikne tedy z ABC rovnoběžným posunutím ($A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$). Z toho plyne, že střed dvojice BC' a dvojice $B'C$ je týž bod M, neboť $BCC'B'$ je rovnoběžník. Má-li podle textu úlohy vzniknout v obou sudech směs téže ceny za litr, musí ležet body P (počátek soustavy souřadnic), B, C' v přímce. Tato přímka se dá snadno sestrojit: je to přímka PM. Přímkou PM jsou pak určeny body B, C'.

Grafické řešení je tak jako i u jiných úloh o směsích zajíma-



Obr. 36

vou ukázkou použití konstrukce při řešení úloh z funkční teorie, tj. při manipulaci s grafy funkcí, což je v tradiční výuce neobvyklé. Účastníci olympiády by si zasloužili, aby se s těmito postupy blíže seznámili.

Z–I–2

2. Dokažte, že pro každá dvě čísla a, b nabývá výraz

$$V = a^4 + b^4 - 2ab(b^2 - ab - a^2)$$

nezáporné hodnoty.

V kterém případě je tento výraz roven nule?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Jde o typovou úlohu na úpravu tzv. *algebr. výrazů*, kde se směřuje k tomu, aby se daný výraz vyjádřil jako součet druhých mocnin polynomů; na rozdíl od obdobné přípravné úlohy je daný výraz V čtvrtého stupně v proměnných a, b, ale je homogenní. Autorské řešení je toto (upravujeme postupně):

$$V = a^4 + b^4 - 2ab^3 + 2a^2b^2 + 2a^3b\,, \tag{1}$$

$$V = (a^4 + 2a^3b + a^2b^2) + (a^2b^2 - 2ab^3 + b^4)\,,$$

$$V = a^2(a^2 + 2ab + b^2) + b^2(a^2 - 2ab + b^2)\,,$$

$$V = a^2(a + b)^2 + b^2(a - b)^2. \tag{2}$$

Je tedy $V \geqq 0$ pro všecka a, b. V předcházejících úpravách je jeden trochu umělý obrat – rozdělení členu $2a^2b^2 = a^2b^2 + a^2b^2$ a sdružení šesti členů do dvou trojčlenů.

Zjištění nutné a postačující podmínky pro to, aby bylo $V = 0$, je stereotypní. Platí podle (2):

$V = 0$ právě když $a^2(a + b)^2 = 0$ a zároveň $b^2(a - b)^2 = 0$.
Z obou součinů dostáváme tyto čtyři možné kombinace

I) $a^2 = 0,\ b^2 = 0$; III) $(a + b)^2 = 0,\ b^2 = 0$

II) $a^2 = 0,\ (a - b)^2 = 0$; IV) $(a + b)^2 = 0,\ (a - b)^2 = 0$.

Ve všech čtyřech případech vyjde $a = b = 0$; to je skutečně jediná dvojice a, b, pro kterou je $V = 0$.

Bylo by však záhodno vrátit se ještě jednou ke vztahu (1), který vznikl roznásobením daného výrazu. Při prvním pohledu na (1) nás asi napadne spíše jiná úprava, než je ta, kterou jsme uvedli jako autorské řešení; je to sdružení

$$V = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2ab(a^2 - b^2)$$

neboli

$$V = (a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 - b^2). \qquad (3)$$

První člen (3) je nezáporný, druhý *může být záporný*. Bude-li však absolutní hodnota druhého členu menší nebo rovna absolutní hodnotě prvního členu, bude určitě $V \geqq 0$. Místo porovnávání absolutních hodnot můžeme vypočítat rozdíl

$$V' = (a^2 + b^2)^4 - 4a^2b^2(a^2 - b^2)^2 =$$
$$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)^2 - 4a^2b^2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4).$$

Po nedlouhém výpočtu dostaneme

$$V' = a^8 + 14a^4b^4 + b^8.$$

Zřejmě je vždy $V' \geqq 0$, tedy i $V \geqq 0$. Je-li $V = 0$, je $V' = 0$, tj. $(a^4 + b^4)^2 + 12a^4b^4 = 0$ a odtud plyne $a = b = 0$. Dostáváme tedy opět *jedinou možnou* dvojici $a = b = 0$, pro kterou je $V = 0$.

Uvedený způsob porovnání absolutních hodnot obou členů (3) je v tomto případě trochu složitý, ale velmi často se ho používá. Výpočet lze však zjednodušit: dokážeme-li, že je

$$|a^2 + b^2| \geqq |2ab|, \quad |a^2 + b^2| \geqq |a^2 - b^2|, \qquad (4)$$

bude platnost nerovnice $V \geqq 0$ dokázána. Místo nerovnic (4) můžeme psát

$$a^2 + b^2 \geqq 2|ab|, \quad a^2 + b^2 \geqq |a^2 - b^2|. \qquad (5)$$

První z nerovnic (5) je ekvivalentní s nerovnicemi $(a + b)^2 \geqq 0$, $(a - b)^2 \geqq 0$, druhá je evidentní. Rovnost $V = 0$ nastane podle (5), právě když bude platit buď $a = 0$, nebo $b = 0$ (z druhé nerovnice (5)) a přitom zároveň $a + b = 0$ nebo $a - b = 0$ (z první nerovnice (5)).

Domníváme se, že byste se měli více zabývat různými možnostmi algebraických úprav (a to ovšem v I. kole), abyste získali větší počtářskou rutinu.

Z–I–3

3. Jsou dána čísla p, q ($p > q > 0$). Vypočtěte objem tělesa $ABCA'B'C'$ ohraničeného trojúhelníkem ABC se stranami $BC = p^2 + q^2$, $CA = p^2 - q^2$, $AB = 2pq$, dále trojúhelníkem $A'B'C'$ a lichoběžníkovými stěnami $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$, které jsou kolmé na rovinu ABC a mají základny o délkách

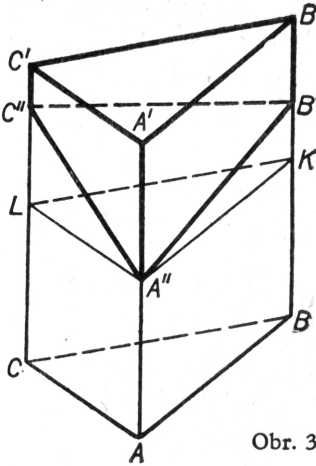
$$AA' = p - q, \quad BB' = p, \quad CC' = p + q.$$

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Tato stereometrická úloha je opět ukázkou toho, že se vyplatí často řešit úlohu obecnější, neboť její řešení bývá jednodušší a mimoto odhaluje podstatu situace. A zde jde skutečně o malou problémovou situaci: seříznutí kolmého hranolu rovinou a výpočet objemu torza hranolu. Doporučujeme tedy řešit tuto *průpravnou úlohu*:

Je dán trojboký hranol $ABCA'B'C'$, jehož podstava ABC má obsah P. Na jeho pobočných hranách AA', BB', CC' jsou zvoleny po řadě body A'', B'', C'' tak, že $AA'' = a$, $BB'' = b$, $CC'' = c$, $a \leqq b \leqq c$. Máme vypočítat objem torza hranolu $ABCA''B''C''$, které oddělí od hranolu řez rovinou $A''B''C''$ (obr. 37). Budeme předpokládat, že je $a < b < c$; výsledný vzorec pak snadno ověříme i pro zbývající případy.

Na hranách BB', CC' sestrojíme body K, L tak, aby platilo

$BK = CL = a$. Torzo hranolu je sjednocením kolmého trojbokého hranolu $ABCA''KL$ a čtyřbokého jehlanu $B''KLC''A''$, jehož podstavou je čtyřúhelník (lichoběžník) $B''KLC''$ a jehož výška v vedená na podstavu má tutéž délku jako výška trojúhelníka $A''KL$ nebo ABC vedená bodem A'', resp. A. Označme ještě V objem torza, V_1 objem hranolu $ABCA''KL$, V_2 objem jehlanu $B''KLC''A''$, h délku $BC = KL$. Pak platí



Obr. 37

$$V_1 = a\,P, \tag{1}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{B''K + C''L}{2} \,.\, h \,.\, v\,. \tag{2}$$

Protože je $B''K = b - a$, $C''L = c - a$, $\frac{1}{2}hv = P$, plyne z (2)

$$V_2 = \frac{P}{3}(b + c - 2a)\,. \tag{3}$$

Spojíme-li (1), (3), dostaneme

$$V = V_1 + V_2 = \frac{P}{3}(a + b + c), \tag{4}$$

což je výsledný vzorec.

Rozřešená průpravná úloha je dosti těžká; předpokládá připravený model, zopakování vzorců pro objem jehlanu, obsah lichoběžníka, trojúhelníka a intuitivní ověření rovnosti výšek trojúhelníků $A''KL$, ABC a výšky jehlanu $B''KLC''A''$.

Úplné řešení průpravné úlohy předpokládá i ověření vzorce

(4) v případech $a = b < c$, $a < b = c$, $a = b = c$. Vhodným doplňkem je výpočet objemu torza čtyřbokého hranolu, jehož podstava je rovnoběžník; při označení obdobném předchozímu dostaneme vzorec

$$V = \frac{P}{4}(a + b + c + d),$$

který je možno dále zobecňovat pro libovolný kolmý hranol.

Po rozřešení průpravné úlohy je ROZŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍ ÚLOHY Z–I–3 hračkou. Buď může řešitel sledovat předchozí postup, tj. odvodit znovu vzorec (4) ve speciálním případě, nebo může prostě dosadit do vzorce (4). Podle textu úlohy je

$$a = p - q, \quad b = p, \quad c = p + q; \tag{5}$$

zde je skutečně $a < b < c$, neboť p, q jsou kladná čísla, pro něž platí $p > q$. Protože platí

$$(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2,$$

je podle *obrácení Pythagorovy věty* trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou BC a jeho obsah je $P = \frac{1}{2}AB \,.\, AC$, neboli

$$P = pq(p^2 - q^2). \tag{6}$$

Spojením (4), (5), (6) vyjde

$$V = p^2q(p^2 - q^2).$$

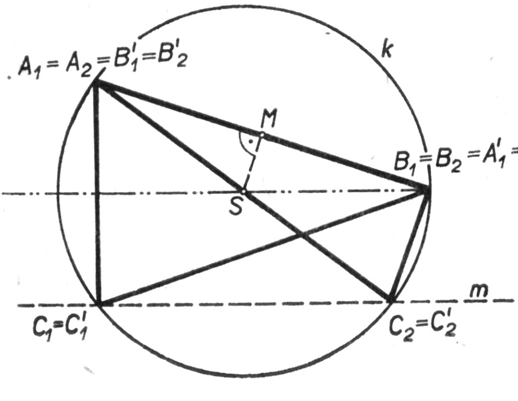
Úloha Z–I–3 je studijně vhodná nejen proto, že cvičí prostorovou představivost, ale také proto, že dává příležitost k algebraickým výpočtům, které mají geometrický význam.

Z–I–4

4. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r = 6 \text{ cm})$ a bod M, pro který platí $MS = d = 2$ cm.

Sestrojte trojúhelník ABC s vrcholy na kružnici k tak, aby bod M byl středem strany AB a přímka BS byla těžnicí trojúhelníka ABC. Kolik má úloha řešení?

KOMENTÁŘ A ŘEŠENÍ. Úloha je v zadané podobě tzv. *úloha záchytná*, kterou mohou rozřešit i slabší řešitelé bez pomoci. Sestrojí nejprve tětivu AB kružnice k, jejímž středem je bod $M(AB \perp SM)$. Třetí vrchol C trojúhelníka ABC leží na přímce $m \parallel BS$, jejíž vzdálenost od přímky BS je táž jako vzdálenost bodu A od přímky BS. Pro daná čísla d, r protne přímka m kružnici k ve dvou různých bodech C_1, C_2 a tak dostaneme dvě řešení úlohy: rovnoramenný trojúhelník ABC_1 se základnou AC_1 ($AB = BC_1$) a pravoúhlý trojúhelník ABC_2 s přeponou AC_2 ($\sphericalangle\, ABC_2$ je pravý). Oba tyto trojúhelníky jsou navzájem různé a tvoří I. skupinu řešení. Vyměníme-li označení vrcholů A, B, dostaneme další dvě řešení úlohy, která tvoří II. skupinu; v daném numerickém případě má tedy úloha čtyři různá řešení (obr. 38).



Obr. 38

Úloha je zajímavá teprve tehdy, když určitá čísla $r = 6$, $d = 2$, nahradíme parametry. Pak se ukáže, že je vždy řešitelná, že pro $d = \frac{r}{\sqrt{2}}$ splynou obě řešení I. skupiny v pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AC; právě tak splynou obě řešení II. skupiny; úloha má tedy dvě řešení. Je-li $d \neq \frac{r}{\sqrt{2}}$, jsou obě řešení I. skupiny i obě řešení II. skupiny navzájem různá. Zbývá otázka, zda může splynout některé řešení I. skupiny s některým řešením II. skupiny; to může nastat jen tehdy, je-li $\triangle ABC$ rovnoramenný se základnou AC i BC, tj. je-li rovnostranný; pak je ovšem $d = \frac{r}{2}$. V tomto případě má úloha tři řešení: trojúhelník rovnostranný a dva trojúhelníky pravoúhlé s úhly 30°, 60°.

Doporučujeme provést diskusi jako doplněk řešení soutěžní úlohy nebo aspoň vyšetřit případy $d = \frac{r}{\sqrt{2}}$ a $d = \frac{r}{2}$.