# 20. ročník matematické olympiády

## IV. Súťažné úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970-1971. 13. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. pp. 93–122.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404613

# IV. Súťažné úlohy II. kola

## 1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

**1a.** Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, $a \geqq 1$ reálne číslo a nech pre reálne čísla $x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$x_1 = 1, \quad \frac{x_{k+1}}{x_k} = a + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{1}$$

pričom čísla $\alpha_k$ vyhovujú nerovnosti

$$|\alpha_k| \leqq \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Potom platí: $\sqrt[n-1]{x_n} < a + \dfrac{1}{n-1}$; dokážte.

(Použite známu nerovnosť: Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla $b_1, b_2, \ldots, b_m$ platí:

$$\sqrt[m]{b_1 b_2 \ldots b_m} \leqq \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_m}{m}.\Big) \qquad \text{(5 bodov)}$$

RIEŠENIE. Z (1) jednoduchým výpočtom dostaneme

$$x_n = (a + \alpha_1) \ldots (a + \alpha_{n-1}). \tag{3}$$

Keďže z (2) pre každé $k = 1, 2, \ldots, n-1$ vyplýva

$$a + \alpha_k \geqq 1 - \frac{1}{k(k+1)} > 0,$$

dostaneme z (3) na základe vety o geometrickom a aritmetickom priemere

$$\sqrt[n-1]{x_n} = \sqrt[n-1]{(a+\alpha_1)\dots(a+\alpha_{n-1})} \leqq$$

$$\leqq \frac{(n-1)a + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k}{n-1}$$

čiže

$$\sqrt[n-1]{x_n} \leqq a + \frac{\sum\limits_{n=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}}{n-1}. \tag{4}$$

Zrejme však platí

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

na základe čoho už zo (4) vyplýva nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

**1b.** Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice $x$, $y$ splňují soustavu nerovnic

$$|x| < 2, \qquad |y| < 2, \tag{1}$$

$$\cos \pi xy \leqq 0, \tag{2}$$

$$\cos \pi(x^2 - y^2) \leqq 0. \tag{3}$$

Načrtněte obrázek. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. A) Množinou všech bodů, pro které je splněno (1), je vnitřek čtverce, který omezuje přímky

$$x = 2, \quad x = -2, \quad y = 2, \quad y = -2.$$

B) Z nerovnice (2) plyne

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqq \pi xy \leqq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

tj.

$$2k + \frac{1}{2} \leqq xy \leqq 2k + \frac{3}{2},$$

kde $k$ je celé číslo. Množinou všech bodů, pro které je splněno (2), jsou všechny body ležící mezi rovnoosými hyperbolami

$$xy = 2k + \frac{1}{2}, \quad xy = 2k + \frac{3}{2}, \quad k \text{ celé číslo}, \tag{4}$$

a na těchto hyperbolách.

C) Z nerovnice (3) plyne

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqq \pi(x^2 - y^2) \leqq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

tj.

$$2k + \frac{1}{2} \leqq x^2 - y^2 \leqq 2k + \frac{3}{2},$$

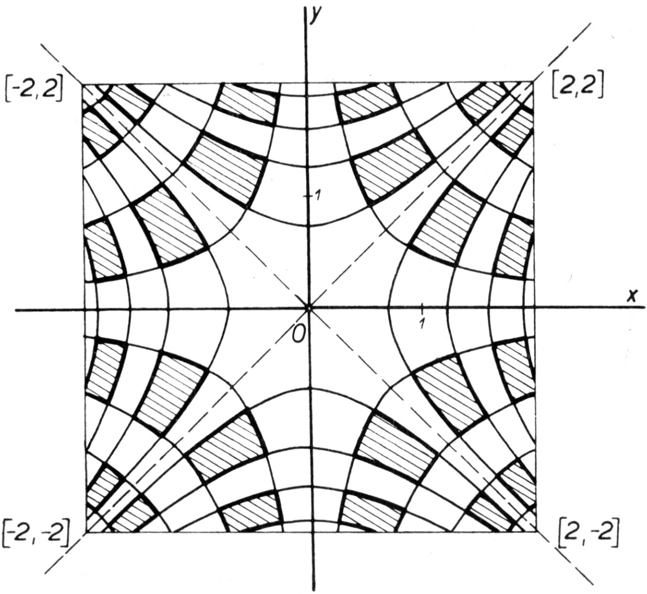
kde $k$ je celé číslo. Množinou všech bodů, pro které je splněno (3), jsou všechny body ležící mezi rovnoosými hyperbolami

$$x^2 - y^2 = 2k + \frac{1}{2}, \quad x^2 - y^2 = 2k + \frac{3}{2}, \quad k \text{ celé číslo}, \tag{5}$$

a na těchto hyperbolách.

D) Hledaná množina je průnikem množin nalezených v A), B), C). Na obr. 32 je vyšrafována. Při určování tohoto průniku stačí v případě B) uvažovat jen body mezi hyperbolami (4) a na nich pro

$k = -2, -1, 0, 1,$ neboť pro $k \geqq 2$ ($k \leqq -3$) platí




Obr. 32

$xy \geqq \dfrac{9}{2} \left( xy \leqq -\dfrac{9}{2} \right)$, takže je $|x| > 2$ nebo $|y| > 2$.

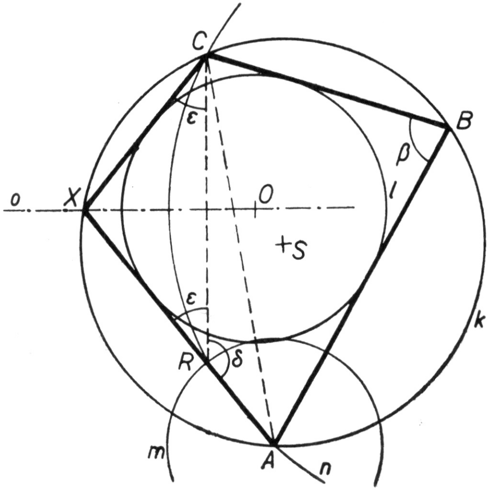
Podobně v případě C) stačí uvažovat jen body mezi hyperbolami (5) a na nich pro $k = -2, -1, 0, 1$, neboť pro $k \geqq 2$ $(k \leqq -3)$ je $x^2 - y^2 \geqq \dfrac{9}{2} \left( x^2 - y^2 \leqq -\dfrac{9}{2} \right)$, takže $|x| > 2$ nebo $|y| > 2$.

**2a.** Je dán $\triangle ABC$. Sestrojte všechny takové body $X$, které mají tu vlastnost, že čtyřúhelníku s vrcholy $A$, $B$, $C$,

$X$ lze opsat i vepsat kružnici. Konstrukci proveďte eukleidovsky (tj. kružítkem a pravítkem).

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Rozbor (obr. 33). Budiž $k$ kružnice opsaná $\triangle ABC$. Hledané body $X$ potom leží na $k$. Nechť čtyřúhelník $ABCX$, jehož vrchol $X$ leží uvnitř oblouku $AC$




Obr. 33

neobsahující bod $B$, splňuje podmínky úlohy. Protože jde o čtyřúhelník tečnový, platí

$$AB + CX = BC + AX$$

čili

$$AB - BC = AX - CX = d, \tag{1}$$

což je konstanta.

a) Jestliže

$$AB = BC,$$

je

$$AX - CX = 0\,,$$

tj. bod $X$ leží na ose úsečky $AC$. V případě a) je tedy KONSTRUKCE bodu $X$ jednoduchá: Bod $X$ je průsečíkem osy úsečky $AC$ s vyšetřovaným obloukem $AC$, a to zřejmě vždy jediným.

b) Nechť např. $AB > BC$, potom body $X$, pro něž platí (1), leží na té větvi hyperboly s ohnisky $A$, $C$ a s hlavní osou $d$, která obsahuje bod $B$. Určení průsečíku příslušné větve hyperboly s uvažovaným obloukem by byla *jen přibližná* konstrukce.

Bod $X$ je však vrcholem trojúhelníka $ACX$ daného stranou $AC$, úhlem $\sphericalangle\, AXC = 180° - \beta$ a rozdílem stran $AX - CX = d$. Tuto *pomocnou úlohu* vyřešíme nejprve:

Předpokládejme, že trojúhelník $ACX$ na obr. 33 je řešením této pomocné úlohy. Rozdíl $AX - CX = d$ sestrojíme jako úsečku $AR = AX - XC$. Potom trojúhelník $RCX$ je rovnoramenný; jeho úhly při základně $RC$ mají velikost $\varepsilon = \frac{1}{2}\,[180° - (180° - \beta)] = \frac{1}{2}\beta$. Potom úhel $\sphericalangle\, CRA = \delta = 180° - \frac{1}{2}\beta$ je tupý, úsečka $AR = AX - CX$ je menší než $AC$ (z trojúhelníka $ACX$). Je tedy bod $R$ sestrojitelný podle *Ssu* v pomocném obrázku nebo jako průsečík kružnice $m = (A; d)$ a menšího oblouku příslušného úhlu $\delta = 180° - \frac{1}{2}\beta$ nad tětivou $AC$, který leží v polorovině opačné k polorovině $ACB$. Bod $X$ je pak společným bodem uvažovaného oblouku $AC$ a osy $o$ úsečky $RC$. Z toho vyplývá KONSTRUKCE:

1. Sestrojíme kružnici $k$ opsanou $\triangle\ ABC$.
2. Sestrojíme kružnici $m = (A; d)$ a oblouk $n$ příslušný úhlu $\delta$ (viz rozbor).
3. $R = m \cap n$ v polorovině opačné k polorovině $ACB$.
4. Sestrojíme osu $o$ úsečky $CR$.
5. $X = o \cap \widehat{AC}$ (na $k$ v polorovině opačné k $ACB$).
6. $ABCX$ je hledaný čtyřúhelník.

ZKOUŠKA. Obrácením výpočtu z rozboru vyplývá, že $\sphericalangle AXC = 180° - \beta$ a tedy $ABCX$ je tětivový čtyřúhelník. Podle konstrukce je $AB - CB = d = AR = AX - CX$, a tedy $AB + CX = AX + CB$, čili $ABCX$ je tečnový čtyřúhelník.

DISKUSE. V uvedené konstrukci má každý krok právě jeden výsledek, takže na uvažovaném oblouku dostaneme jediný bod $X$. Obdobnou konstrukcí i pro zbývající oblouky $AB$ a $BC$ dostaneme po jednom bodu $X$. Celkem má tedy úloha tři řešení.

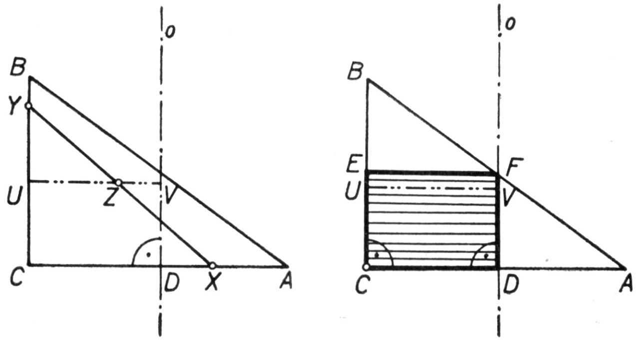
Obdobně tři řešení dostaneme i v případě a).

**2b.** Je daný pravouhlý trojuholník $ABC$ s preponou $AB$. Na odvesne $AC$ zvoľme bod $X$, na odvesne $BC$ zvoľme bod $Y$. V rovine $ABC$ zostrojme kružnicu s priemerom $XY$.

Určite množinu **P** všetkých bodov všetkých takto zostrojených kružníc. (6 bodov)

RIEŠENIE. I. Označme **K** množinu všetkých kružníc roviny $ABC$, ktoré boli zostrojené podľa textu úlohy. Dokážeme, že množina stredov všetkých kružníc z **K** je pravouholník $CDFE$ bez bodu $C$, pričom $D$, $E$, $F$ sú v uvedenom poradí stredy strán $AC$, $BC$, $AB$ (obr. 34a, b).

Skutočne, ak je $Y$ pevný bod odvesny $BC$ a ak prebieha $X$ odvesnu $AC$, prebieha stred $Z$ úsečky $XY$ úsečku



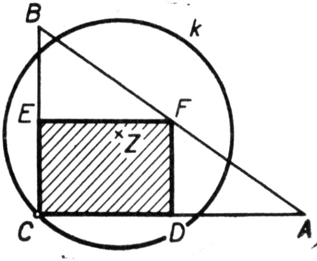

a) Obr. 34 b)

$UV \parallel AC$, kde $U$ je bod odvesny $BC$, $V$ bod osi $o$ úsečky $AC$. Ak je $Y = C$, je treba vylúčiť prípad $X = C$. Ku každému bodu $Y$ odvesny $BC$ je teda priradená jediná úsečka $UV$ (obr. 34a) a všetky tieto úsečky $UV$ vyplnia pravouholník $CDFE$ bez bodu $C$. Túto skutočnosť možno jednoducho dokázať tiež metódou súradníc, ak zvolíme za súradnicové osi kartézskej sústavy súradníc priamky $AC$, $BC$.

II. Stredom každej kružnice $k$ z **K** je teda nejaký bod $Z$ z pravouholníka $CDFE$ (mimo $C$) a pre jej polomer $CZ$ platí (obr. 35)

$$CZ \leqq BZ, \quad CZ \leqq AZ,$$

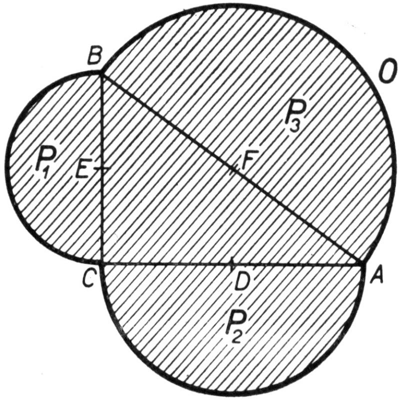
pretože priamky $DF$, $EF$ sú v uvedenom poradí osi strán $AC$, $BC$. Preto kružnica $k$ pretína úsečku $AC$ i $BC$ (pokiaľ sa priamok $AC$ alebo $BC$ v bode $C$ nedotýka) okrem bodu $C$ ešte v jej




Obr. 35

vnútornom bode. Analogické tvrdenie platí pre jej priesečníky s preponou $AB$, ak ovšem existujú.

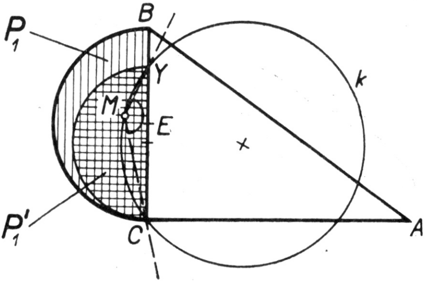
Intuitívne zistíme: Hľadanou množinou **P** je obrazec **O**, ktorý sa skladá z trojuholníka $ABC$ a z troch polkruhov zostrojených nad priemermi $AB$, $AC$, $BC$ (obr. 36). Tieto polkruhy sú ohraničené kružnicami z **K**, ktoré




Obr. 36

majú stredy v bodoch $D$, $E$, $F$. Dokážeme teraz, že každý bod každej kružnice $k$ z **K** patrí do obrazca **O**. Ak kružnica $k$ neleží v $\triangle ABC$, potom tá jej časť, ktorá leží napr. v polkruhu $\mathbf{P}_1$ (obr. 37), je polkružnica alebo menší oblúk nad tetivou $CY$, ktorá je časťou príslušnej strany trojuholníka $ABC$, t. j. odvesny $BC$. Ak je $M$ ľubovoľný bod tohto oblúka kružnice $k$, je $\sphericalangle CMY$ pravý alebo tupý a patrí preto do polkruhu $\mathbf{P}_1'$ zostrojeného nad priemerom $CY$ a teda aj do polkruhu $\mathbf{P}_1$. Analogická úvaha platí pre polkruhy $\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_3$.

III. Zostáva dokázať, že každý bod $M$ obrazca **O** patrí aspoň jednej kružnici $k$ z **K**, t. j. kružnici, ktorá prechádza bodom $C$ a jej stredom je niektorý bod $Z$ pravouholníka $CDEF$ (okrem bodu $C$). K tomu stačí dokázať, že os $p$ úsečky $CM$ (predpokladáme $C \neq M$), má s pra-




Obr. 37

vouholníkom $CDEF$ aspoň jeden spoločný bod $Z$. Pre hraničné body obrazca **O** nie je treba nič dokazovať. Pre každý iný bod $M$ polkruhu $\mathbf{P}_3$ a $\triangle ABC$ (ktorý leží v doplňkovom polkruhu) platí $MF < CF$. Preto medzi bodmi $C$, $F$ leží aspoň jeden bod osi $p$.*) Os $p$ obsahuje teda vždy aspoň jeden bod pravouholníka $CDFE$.

ZÁVER. Hľadaná množina **P** je množina všetkých bodov obrazca **O** (pozri obr. 36).

POZNÁMKA. Nie je výhodné riešiť túto úlohu metódou súradníc, pretože výsledný obrazec nemá v súradniciach jednoduché vyjadrenie.

**3a.** Mějme posloupnost celých čísel

*) Analogicky pre každý nehraničný bod polkruhu $\mathbf{P}_1$ ($\mathbf{P}_2$) platí $ME < CE$ ($MD < DC$) a preto medzi bodmi $C$, $E$ ($C$, $D$) leží aspoň jeden bod osi $p$.

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{1}$$

v níž pro všechna $n \geqq 1$ platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_1 a_n . \tag{2}$$

a) Může být taková posloupnost posloupností aritmetickou?

b) Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby v takové posloupnosti platilo

$$a_{n+k} + a_{n-k} = a_k a_n \tag{3}$$

pro všechna $n$, $k$, $n \geqq k \geqq 0$.

c) Jestliže $a_0 = 2$, pak existuje komplexní číslo $z$ takové, že pro všechna $n \geqq 0$ je

$$a_n = z^n + z^{-n} ; \tag{4}$$

dokažte. (7 bodů)

ŘEŠENÍ. a) Ano, může. Např. posloupnost (1), ve které je $a_n = 0$ pro všechna $n \geqq 0$, je aritmetická (s diferencí 0) a vyhovuje (2). Kromě toho také všechny posloupnosti (1) splňující (2), v nichž je $a_1 = 2$, jsou aritmetické, jak je ihned vidět, napíšeme-li (2) ve tvaru

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} .$$

POZNÁMKA. Lze dokázat, že toto jsou také všechny aritmetické posloupnosti vyhovující (2).

b) Vztah (3) platí pro všechna $n \geqq k \geqq 0$ právě tehdy, jestliže je buď $a_n = 0$ pro všechna $n \geqq 0$, anebo $a_0 = 2$.

DŮKAZ. I. Jestliže je $a_n = 0$ pro všechna $n \geqq 0$, platí (3) triviálně.

II. Nechť $a_0 = 2$. Potom (3) platí pro všechna $n \geqq 0$ a $k = 0$. Pro $k = 1$ je však (3) totéž co (2). Obecnou platnost (3) dokážeme nyní indukcí. Předpokládejme, že (3) platí pro $k = 0, 1, \ldots, m$, kde $m \geqq 1$, a dokážeme, že platí také pro $k = m + 1$. Jest

$$a_{n+m+1} + a_{n-m-1} = a_{n+m+1} + a_{n+m-1} - a_{n+m-1} + \\ + a_{n-m-1} + a_{n-m+1} - a_{n-m+1} = \\ = (a_{n+m+1} + a_{n+m-1}) + (a_{n-m-1} + a_{n-m+1}) - \\ - (a_{n+m-1} + a_{n-m+1}) .$$

Na první dvě závorky aplikujeme (2), na třetí závorku pak (3) pro $k = m - 1$.
Dostaneme

$$a_1 a_{n+m} + a_1 a_{n-m} - a_{m-1} a_n = a_1(a_{n+m} + a_{n-m}) - a_{m-1} a_n .$$

Znovu užijeme (3) pro $k = m$ a máme

$$a_1 a_n a_m - a_{m-1} a_n = a_n(a_1 a_m - a_{m-1}) .$$

Avšak podle (2) je

$$a_1 a_m - a_{m-1} = a_{m+1} ,$$

takže celkem

$$a_{n+m+1} + a_{n-m-1} = a_{m+1} a_n ,$$

což jsme měli dokázat. Vztah (3) tedy při $a_0 = 2$ platí pro všechna $n \geqq k \geqq 0$.

III. Nechť platí (3) pro všechna $n \geqq k \geqq 0$ a nechť není $a_n = 0$ pro všechna $n \geqq 0$. Budiž $m$ takové, že $a_m \neq 0$. Položíme-li v (3) $n = m$, $k = 0$, dostaneme

$$2a_m = a_m + a_m = a_{m+0} + a_{m-0} = a_0 a_m ,$$

a tedy nutně $a_0 = 2$.

c) Vezměme kvadratickou rovnici

$$x^2 - a_1 x + 1 = 0 . \tag{5}$$

Součin jejích kořenů je roven 1, jejich součet je $a_1$. Označme $z$ jeden z těchto kořenů; druhý kořen bude pak $z^{-1}$ a bude

$$z + z^{-1} = a_1 .$$

Poněvadž pak zřejmě $z^0 = 1$, $(z^{-1})^0 = 1$, a tedy

$$z^0 + z^{-0} = 2 = a_0,$$

vidíme, že — při této volbě čísla $z$ — platí (4) pro $n = 0, 1$. Indukcí dokážeme, že pak platí pro všechna $n \geqq 0$. Předpokládejme, že (4) platí pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots, m$; $m \geqq 1$, a dokážeme, že platí i pro $n = m + 1$. Podle (2) máme

$$a_{m+1} = a_1 a_m - a_{m-1}$$

a tedy podle (4) pro $n = m$ a $n = m - 1$ jest

$$a_{m+1} = (z + z^{-1})(z^m + z^{-m}) - (z^{m-1} + z^{1-m}) =$$
$$= z^{m+1} + z^{m-1} + z^{1-m} + z^{-m-1} - z^{m-1} - z^{1-m} =$$
$$= z^{m+1} + z^{-m-1},$$

což jsme měli dokázat. Platí tedy (4) pro všechna $n \geqq 0$, jestliže za $z$ zvolíme jeden (kterýkoli) kořen rovnice (5).

**3b.** Je daný štvorsten $ABCD$. Vo vnútri jeho steny $ABC$ zvoľte bod $M$ a veďte ním priamky $MC_1 \parallel CD$, $MB_1 \parallel BD$, $MA_1 \parallel AD$, kde $C_1$, $B_1$, $A_1$ sú priesečníky s rovinami $ABD$, $ACD$, $BCD$.

a) Dokážte, že pre každý taký bod $M$ platí

$$\frac{MA_1}{AD} + \frac{MB_1}{BD} + \frac{MC_1}{CD} = 1. \qquad (1)$$

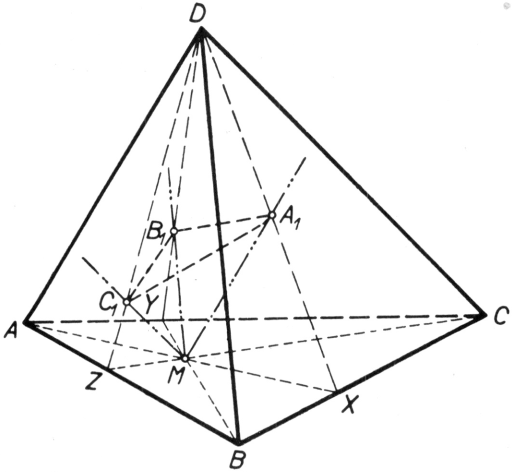
b) Vyjadrite pomer objemov štvorstenov $A_1B_1C_1M$ a $ABCD$ len pomocou veľkostí úsečiek $AD$, $BD$, $CD$, $MA_1$, $MB_1$, $MC_1$.

c) Zistite, ako treba zvoliť bod $M$, aby objem štvorstena $A_1B_1C_1M$ bol maximálny. (7 bodov)

RIEŠENIE. Body $A_1$, $B_1$, $C_1$ ležia na priesečniciach rovín $AMD$ a $BCD$, $BMD$ a $ACD$, $CMD$ a $ABD$.

(Pozri obr. 38.) Označme veľkosti úsečiek $MA_1 = a_1$, $MB_1 = b_1$, $MC_1 = c_1$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$.

a) Štvorsteny $MBCD$, $ABCD$ majú spoločnú podstavu




Obr. 38

a preto ich objemy sú v pomere veľkostí ich výšok, t. j.

$$\frac{\text{objem } MBCD}{\text{objem } ABCD} = \frac{a_1 \,.\, \sin \varepsilon}{a \,.\, \sin \varepsilon} = \frac{a_1}{a} \tag{2a}$$

kde $\varepsilon$ je odchýlka $AD$ a $BCD$. Pre štvorsteny $MACD$ a $MABD$ analogicky dostaneme

$$\frac{\text{objem } MACD}{\text{objem } ABCD} = \frac{b_1}{b}, \quad \frac{\text{objem } MABD}{\text{objem } ABCD} = \frac{c_1}{c}. \tag{2b, c}$$

Sčítaním rovností (2a, b, c) dostaneme

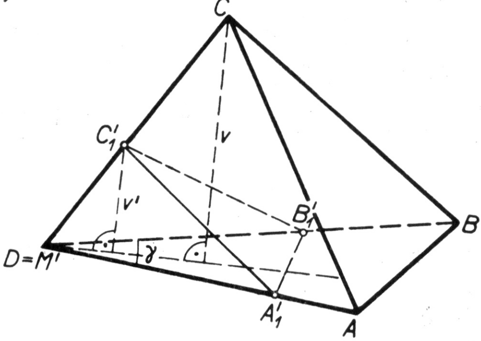
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1\,;$$

čo je už rovnosť (1).

b) Platí

$$\sphericalangle\, A_1MB_1 = \sphericalangle\, ADB = \gamma\,, \quad \sphericalangle\, A_1MC_1 = \sphericalangle\, ADC\,,$$
$$\sphericalangle\, C_1MB_1 = \sphericalangle\, CDB$$

a možno preto zostrojiť štvorsten $M'A_1'B_1'C_1'$ zhodný so štvorstenom $MA_1B_1C_1$, pričom $M' \equiv D$, $A_1'$, $B_1'$, $C_1'$ ležia v uvedenom poradí na polpriamkach $DA$, $DB$, $DC$ (obr. 39).




Obr. 39

Nech $v$ je výška štvorstena $ABCD$ z vrcholu $C$ na stenu $ABD$ a $v'$ výška štvorstena $A_1'B_1'C_1'M'$ z vrcholu $C_1'$ na stenu $M'A_1'B_1'$. Potom

$$\frac{v'}{v} = \frac{c_1}{c}\,, \quad \text{t. j.} \quad v' = \frac{c_1}{c}\cdot v\,.$$

Objem $V$ štvorstena $ABCD$ je

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,a\,.\,b \sin\gamma\right).\,v\,,$$

objem $V'$ štvorstena $A_1'B_1'C_1'M'$ a teda tiež štvorstena $A_1B_1C_1M$ je

$$V' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_1b_1 \sin \gamma\right) \cdot \frac{c_1}{c} \,.\, v\,,$$

t. j.

$$\frac{V'}{V} = \frac{a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1}{a \,.\, b \,.\, c}\,.$$

c) Objem $V'$ bude maximálny práve vtedy, keď bude maximálny súčin $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c}$. Keďže súčet všetkých troch faktorov sa rovná jednej, zo vzťahu medzi aritmetickým a geometrickým priemerom nezáporných čísel $\frac{a_1}{a}, \frac{b_1}{b}, \frac{c_1}{c}$ vyplýva nerovnosť $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c} \leqq \frac{1}{27}$, takže

$$V' \leqq \frac{1}{27} V,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{1}{3}$ čiže pre

$$\frac{MX}{AX} = \frac{MY}{BY} = \frac{MZ}{CZ} = \frac{1}{3}$$

(pozri obr. 38). Z rovnoľahlosti úsečiek $AB$ a $XY$ so stredom rovnoľahlosti $M$ a koeficientom $-2$ vyplýva, že $X$, $Y$ sú stredy strán $BC$, $AC$, takže bod $M$ je ťažisko trojuholníka $ABC$.

ZÁVER. Objem $V'$ štvorstena $A_1B_1C_1M$ je maximálny práve vtedy, keď bod $M$ je ťažiskom trojuholníka $ABC$.

**1a.** Nechť $p$, $q$ jsou prvočísla větší než 3. Potom číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23 \tag{1}$$

není prvočíslem; dokažte. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Dosadíme-li do výrazu (1) několik dvojic prvočísel $p$, $q$ větších než 3, dostaneme vždy číslo větší než 3 a přitom dělitelné 3. Nabízí se nám domněnka, že pro každou dvojici prvočísel $p, q$ větších než 3 je číslo (1) větší než 3 a dělitelné třemi. Dokážeme-li ji, znamená to, že číslo (1) není prvočíslo.

Pro $p > 3$ a $q > 3$ je číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23 > 9 + 63 - 23 > 3. \tag{2}$$

Protože $p, q$ jsou prvočísla větší než 3, není žádné z nich dělitelné 3, a proto je lze psát ve tvaru

$$p = 3k \pm 1, \qquad q = 3l \pm 1,$$

kde $p$, $q$ jsou vhodná přirozená čísla. Platí

$$\begin{aligned} p^2 + 7q^2 - 23 &= (3k \pm 1)^2 + 7(3l \pm 1)^2 - 23 = \\ &= (9k^2 \pm 6k + 1) + 7 \,.\, (9l^2 \pm 6l + 1) - 23 = \\ &= 3 \,.\, (3k^2 \pm 2k + 21l^2 \pm 14l - 5). \end{aligned} \tag{3}$$

Podle (2) a (3) tedy číslo (1) není prvočíslo.

JINÉ ŘEŠENÍ. Každé prvočíslo větší než 3 je tvaru $6k + 1$ nebo $6k - 1$. Nechť tedy $p = 6k \pm 1, q = 6m \pm$ $\pm 1$. Potom číslo

$$\begin{aligned} p^2 + 7q^2 - 23 &= (36k^2 \pm 12k + 1) + \\ &+ 7 \,.\, (36m^2 \pm 12m + 1) - 23 = \\ &= 12 \,.\, (3k^2 \pm k + 21m^2 \pm 7m) - 15 \end{aligned}$$

je zřejmě dělitelné 3, a tedy vzhledem k (2) není prvočíslem.

**1b.** Sú dané štyri rôzne body $A$, $B$, $C$, $D$ v priestore. Pre každý bod $X$ priestoru platí

$$AX + BX + CX + DX >$$
$$> \frac{1}{3}(AB + AC + AD + BC + BD + CD).$$

Dokážte. (5 bodov)

RIEŠENIE. Ak je $X$ ľubovoľný bod priestoru, potom podľa trojúholníkovej nerovnosti platí:

$$AX + BX \geqq AB, \tag{a}$$
$$AX + CX \geqq AC, \tag{b}$$
$$AX + DX \geqq AD, \tag{c}$$
$$BX + CX \geqq BC, \tag{d}$$
$$BX + DX \geqq BD, \tag{e}$$
$$CX + DX \geqq CD. \tag{f}$$

Rovnosť v nerovnosti (a) nastava práve vtedy, keď je $X$ bodom úsečky $AB$ a analogicky je tomu v ostatných prípadoch. Keďže body $A$, $B$, $C$, $D$ sú podľa predpokladu navzájom rôzne, nemôže v nerovnostiach (a) — (f) nastať rovnosť vo všetkých súčasne. Ich sčítaním preto dostaneme

$$3(AX + BX + CX + DX) > AB + AC + AD +$$
$$+ BC + BD + CD,$$

skadiaľ po vynásobení $\frac{1}{3}$ už dostávame nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

**2a.** Nech $n$ je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky skupiny siedmich za sebou nasledujúcich prirodzených čísel tej vlastnosti, že súčin všetkých čísel skupiny je menší než $n^7$. (6 bodov)

RIEŠENIE. Súčin prvých siedmich prirodzených čísel za sebou nasledujúcich je $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 =$

$= 5040$. Je zrejme väčší než $2^7 = 128$ i ako $3^7 = 2187$, ale je menší než $4^7 = 16\,384$. Najmenším prirodzeným číslom $n$, pre ktoré má daná úloha riešenie, je teda číslo 4. Vzhľadom na to, že najbližší väčší súčin siedmich za sebou nasledujúcich prirodzených čísel je $2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 = 40\,320 > 4^7$, je to aj riešenie jediné.

Ukážeme, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 4$ má daná úloha práve týchto $n - 3$ riešení:

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]; \quad [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]; \ldots [n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3]. \tag{1}$$

K tomu stačí, aby sme ukázali, že súčin všetkých čísel poslednej skupiny je menší než $n^7$, ale súčin všetkých čísel skupiny

$$[n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4],$$

ktorá je nasledujúcou skupinou prichádzajúcou do úvahy, je už väčší než $n^7$.

Platí však

$$\begin{aligned} (n-3)(n+3) &= n^2 - 9 < n^2, \\ (n-2)(n+2) &= n^2 - 4 < n^2, \\ (n-1)(n+1) &= n^2 - 1 < n^2, \\ n &= \qquad\quad n; \end{aligned}$$

z čoho vynásobením ľavých a pravých strán nerovností, resp. rovnosti, dostaneme

$$(n-3)(n-2)(n-1)\, n(n+1)(n+2)(n+3) < n^7.$$

Na druhej strane pre $n > 4$ platí:

$$\begin{aligned} (n-2)(n+4) &= n^2 + 2n - 8 > n^2, \\ (n-1)(n+3) &= n^2 + 2n - 3 > n^2, \\ (n+2)(n+1)n &= n^3 + 3n^2 + 2n > n^3; \end{aligned}$$

z čoho opäť vynásobením ľavých i pravých strán nerovností máme

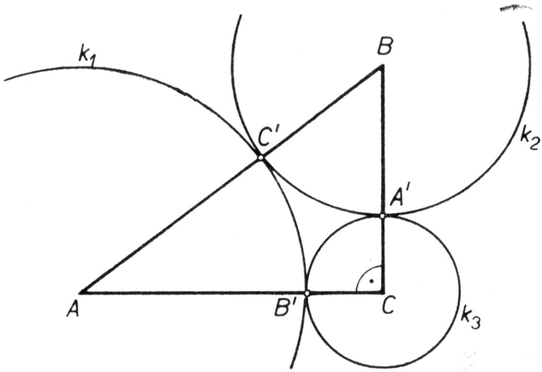
$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) > n^7.$$

ZÁVER. Úloha má pre $n \geqq 4$ práve $n - 3$ riešení uvedených v (1). Pre $n \leqq 3$ úloha riešenie nemá.

**2b.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s odvěsnami $AC = 4$, $BC = 3$. Kružnice $k_1$, $k_2$, $k_3$ mají středy ve vrcholech $A$, $B$, $C$ a každé dvě z nich mají vnější dotyk.

a) Vypočtěte poloměry kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$ a sestrojte je.

b) Vypočtěte poloměr kružnice, která má s každou z kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$ vnější dotyk. (6 bodů)




Obr. 40

ŘEŠENÍ. a) Označme $r_1$, $r_2$, $r_3$ poloměry kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$. Pak je (obr. 40)

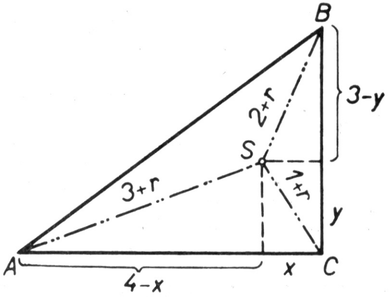
$$r_1 + r_2 = c, \quad r_2 + r_3 = a, \quad r_3 + r_1 = b. \tag{1}$$

Protože $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, dostaneme z (1)

$$r_1 + r_2 = 5, \; r_1 - r_2 = b - a = 1$$

a dále $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$. Kružnice $k$, která se dotýká obou odvěsen v bodech $A'$, $B'$ (viz obr. 40), má poloměr $A'C = B'C = 1$. Poněvadž kružnice vepsaná trojúhelníku $ABC$ má také poloměr $\varrho = 1$ (obsah $\triangle ABC$ je $P = \frac{1}{2} \cdot 3 \,.\, 4 = 6$, poloviční obvod je $s = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$, $\varrho = \frac{P}{s} = 1$) a dotýká se také obou odvěsen v bodech $A'$, $B'$, je $k$ kružnice vepsaná trojúhelníku $ABC$. Pomocí vepsané kružnice $k$ sestrojíme tyto body dotyku $A'$, $B'$, $C'$ kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$.

b) Označme $k_0$ kružnici, která má s každou z kružnic $k_1$, $k_2$, $k_3$ vnější dotyk, $S$ její střed, $r$ její poloměr. Pak je podle obr. 41



Obr. 41

$$x^2 + y^2 = (1 + r)^2, \; (4 - x)^2 + y^2 = (3 + r)^2,$$
$$(3 - y)^2 + x^2 = (2 + r)^2. \qquad (2)$$

Po úpravě (dosazení za $x^2 + y^2$ z první rovnice (2))

$$x = 1 - \frac{r}{2}, \qquad y = 1 - \frac{r}{3}. \qquad (3)$$

Dosadíme-li nyní za $x$, $y$ z (3) do první rovnice (2), vyjde po úpravě kvadratická rovnice pro $r$

$$23r^2 + 132r - 36 = 0. \qquad (4)$$

Jediný kladný kořen rovnice (4) je

$$r = \frac{-132 + \sqrt{132^2 + 4 \,.\, 36 \,.\, 23}}{46} = \frac{6}{23}.$$

**3a.** V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 + xy = a^2 + ab, \qquad (1)$$

$$y^2 + xy = a^2 - ab, \tag{2}$$

kde $x$, $y$ sú neznáme, $a$, $b$ reálne parametre. Urobte diskusiu. (7 bodov)

RIEŠENIE. Ak dvojica $[x, y]$ vyhovuje danej sústave, potom pre čísla $x$, $y$ dostaneme sčítaním oboch rovníc

$$(x + y)^2 = 2a^2 \tag{3}$$

a odčítaním (2) od (1)

$$x^2 - y^2 = 2ab$$

čiže

$$(x - y)(x + y) = 2ab. \tag{4}$$

V prípade, keď $a \neq 0$, vyplýva zo (4) po umocnení na druhú a využití rovnosti (3)

$$(x - y)^2 = 2b^2. \tag{5}$$

Z (3), (4), (5) však po jednoduchej úprave dostaneme

$$(2x)^2 = [(x + y) + (x - y)]^2 = 2(a + b)^2, \text{ resp.}$$
$$(2y)^2 = [(x + y) - (x - y)]^2 = 2(a - b)^2, \text{ z čoho}$$

$$|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}|a + b|, \tag{6}$$

$$|y| = \frac{\sqrt{2}}{2}|a - b|. \tag{7}$$

Zistili sme teda, že v prípade, keď $a \neq 0$, môžu danej sústave vyhovovať len tieto štyri dvojice reálnych čísel:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \ \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)\right], \tag{8a}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \ \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)\right], \tag{8b}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \ -\frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)\right], \tag{8c}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b);\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\right]. \tag{8d}$$

Dosadením sa presvedčíme, že sústave (1), (2) vyhovujú len dvojice (8a) a (8d), ktoré sú pre $a \neq 0$, navzájom rôzne. (Z rovnosti oboch dvojíc vyplýva totiž $a + b = 0$, $a - b = 0$ a stadiaľ priamo $a = 0$.)

Ak $a = 0$, má daná sústava tvar

$$x^2 + xy = 0,$$
$$y^2 + xy = 0$$

a má zrejme nekonečne mnoho riešení tvaru

$$[k, -k], \tag{9}$$

kde $k$ je ľubovoľné reálne číslo.

ZÁVER. Pre $a \neq 0$, $b$ ľubov. má daná sústava dve rôzne riešenia dané vzťahmi (8a) a (8d); pre $a = 0$, $b$ ľubov. má nekonečne mnoho riešení tvaru (9).

POZNÁMKA. V prípade $a \neq 0$ možno riešenie sústavy (1), (2) dostať tiež riešením sústavy

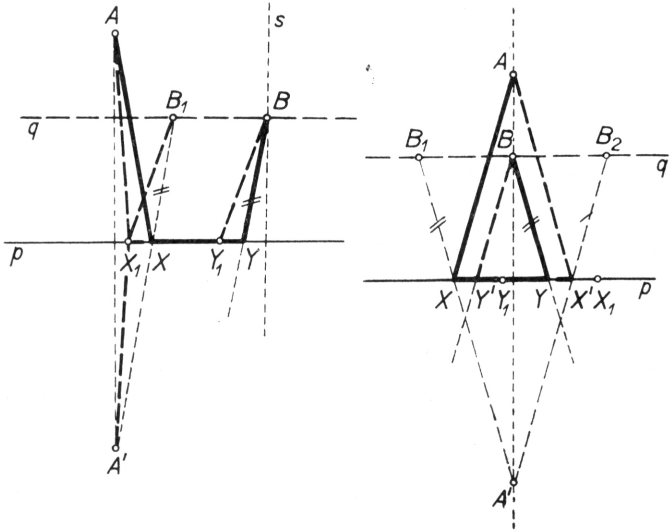
$$|x + y| = |a|\sqrt{2},$$
$$|x - y| = |b|\sqrt{2},$$

ktorú dostaneme odmocnením rovníc (3) a (5).

**3b.** V rovině je dána přímka $p$ a uvnitř jedné poloroviny s hranicí $p$ dva různé body $A$ a $B$. Dále je dáno kladné číslo $u$. Na přímce $p$ sestrojte body $X$ a $Y$ tak, aby $XY = u$ a aby délka lomené čáry $AXYB$ byla co nejmenší. (7 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 42a). Bodem $B$ sestrojme přímku $q \parallel p$ a přímku $s \perp p$. Na přímce $q$ sestrojme bod $B_1$ tak, aby $BB_1 = u$ a aby $B_1$ ležel v téže polorovině vzhledem k přímce $s$ jako bod $A$; leží-li bod $A$ na přímce $s$, sestrojíme na $q$ oba body $B_1$ a $B_2$ tak, že $BB_1 = BB_2 = u$ (obr. 42 b).

K bodu $A$ sestrojíme bod $A'$ souměrně sdružený podle přímky $p$. Hledaný bod $X$ je průsečík přímky $A'B_1$




a) Obr. 42 b)

s přímkou $p$, příslušný bod $Y$ je průsečík přímky $p$ s rovnoběžkou s $A'B_1$ bodem $B$. V případě, že bod $A$ leží na přímce $s$, vede i průsečík $X'$ přímky $A'B_2$ s přímkou $p$ k řešení.

K důkazu KONSTRUKCE budeme užívat pro délku lomené čáry $C$ symbolu $d(C)$. Nechť tedy $X_1$ a $Y_1$ jsou libovolné body na přímce $p$ takové, že $X_1Y_1 = u$. Rozlišujme dva případy (obr. 42a):

a) $X_1Y_1BB_1$ (v tomto pořadí) je rovnoběžník. Pak

$d(AX_1Y_1B) = d(AX_1B_1B) = d(A'X_1B_1B) \geqq d(A'B_1B) = = d(A'XB_1B) = d(AXYB)$, a přitom rovnost nastane, právě když $X_1 = X$.

b) $X_1Y_1BB_2$ (v tomto pořadí) je rovnoběžník, kde $B_2 \neq B_1$ (obr. 42b) je bod přímky $q$ takový, že $BB_2 = u$. Potom $d(AX_1Y_1B) = d(AX_1B_2B) = d(A'X_1B_2B) \geqq \geqq d(A'B_2B) \geqq d(A'B_1B) = d(AXYB)$. V nerovnosti $d(A'B_2B) \geqq d(A'B_1B)$ nastane rovnost, právě když bod $A$ leží na přímce $s$. Potom je $d(AX_1Y_1B) = d(AXYB)$, právě když $X_1$ je průsečík přímky $A'B_2$ s přímkou $p$ a body $A$, $B$ leží na přímce $s \perp p$.

ZÁVĚR. Úloha má jediné řešení, není-li přímka $AB$ kolmá k přímce $p$; je-li kolmá, má úloha dvě řešení.

## *3. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z*

**1.** Závory na železničním přejezdu se spouštějí 2 min. před příjezdem vlaku, spuštěny zůstávají celkem 3 min. Vlak jedoucí průměrnou rychlostí 60 km/h je 12 km před přejezdem. Po silnici jede auto, které je v téže době před přejezdem 14 km. Vypočtěte nejmenší a největší průměrnou rychlost auta, při které spuštěné závory auto zadrží.

ŘEŠENÍ. Představme si, že jsme zmáčkli stopky v okamžiku, kdy je vlak 12 km a auto 14 km od přejezdu. Když vlak přijede k přejezdu, bude na stopkách

$$\frac{12}{60}(\text{h}) = 12(\text{min.})$$

Přejezd tedy bude uzavřen od okamžiku, kdy stopky ukazují čas 10 min., do okamžiku, kdy je na stopkách čas 13 min. Přijede-li auto v tomto časovém intervalu, závory je zadrží. Době 10 min. odpovídá největší průměrná rychlost

$$v_{10} = \frac{14}{\frac{10}{60}} = 84\ (\mathrm{km/h})$$

a době 13 min. nejmenší průměrná rychlost

$$v_{13} = \frac{14}{\frac{13}{60}} = \frac{14 \,.\, 60}{13} = 64\frac{8}{13}\ (\mathrm{km/h})\,.$$

Závory zadrží auto, bude-li jeho průměrná rychlost aspoň $64\frac{8}{13}$ km/h a nejvýše 84 km/h.

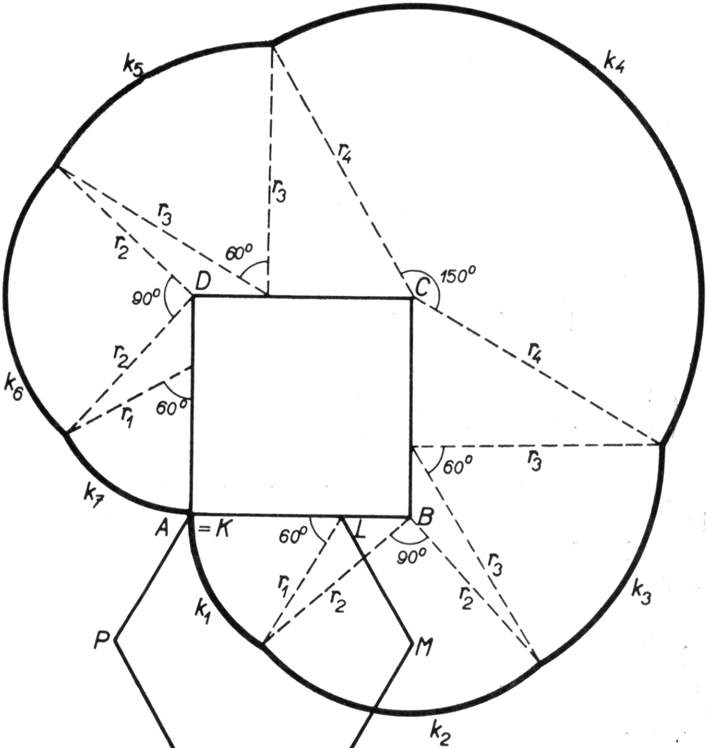
POZNÁMKA. Pro praxi nemá vlastně smyslu otázka, zda auto projede nebo nikoli, bude-li jeho průměrná rychlost „přesně" $64\frac{8}{13}$ km/h, neboť závory se nespouštějí okamžitě a též průměrná rychlost je jen pomocný abstraktní pojem. Podobně pro hodnotu 84 km/h.

**2.** Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 6 cm. Ďalej je daný pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ so stranou dĺžky 4 cm tak, že vrcholy $A$ a $K$ splývajú a vrchol $L$ leží na polpriamke $AB$. Obidva obrazce ležia v opačných polrovinách s hranicou $AB$.

a) Zostrojte dráhu, ktorú opíše vrchol $K$ šesťuholníka $KLMNOP$, ktorý sa zvonka odvaľuje po obvode štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte dĺžku tejto dráhy.

RIEŠENIE. Dráha bodu sa skladá zo 7 kruhových oblúkov, ako je naznačené na obr. 43. Dĺžky jednotlivých oblúkov sú $k_1, k_2, \ldots, k_7$. Platí



Obr. 43

$$k_1 = k_7 = \frac{\pi r_1}{180} \cdot 60 = \frac{4\pi}{180} \cdot 60 = \frac{4}{3}\pi\,,$$

$$k_2 = k_6 = \frac{\pi r_2}{180} \cdot 90 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{4^2 + v^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\sqrt{16 + 4^2 - 2^2} = \pi\sqrt{7},$$

$$k_3 = k_5 = \frac{\pi r_3}{180} \cdot 60 = \frac{1}{3}\pi \,.\, KM = \frac{1}{3}\pi \,.\, \sqrt{8^2 - 4^2} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \,.\, \sqrt{3},$$

$$k_4 = \frac{\pi r_4}{180} \cdot 150 = \frac{8\pi}{180} \cdot 150 = \frac{20}{3}\pi \,.$$

Celková dĺžka dráhy bodu $K$ je teda

$$d = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2\sqrt{7} + \frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{20}{3}\right)\pi \doteq 19{,}2\,\pi \doteq 60{,}4 \text{ (cm)}.$$

**3.** Trojciferné číslo $n$ má v dekadickém zápise aspoň dvě cifry stejné. Jeho šestinásobek je čtyřciferné číslo, jehož dekadický zápis obsahuje a) nulu a b) tři stejné cifry. Určete všechna čísla $n$ těchto vlastností.

ŘEŠENÍ. a) Protože je $n < 1000$, je $6n < 6000$; jediná nenulová cifra čísla $6n$ je tedy 1, 2, 3, 4 nebo 5. *Obsahuje-li číslo* $6n$ *tři nuly*, platí $6n = 3000$, neboť čísla 1000, 2000, 4000, 5000 nejsou násobky šesti. Máme tedy jedno řešení úlohy:

$$n_1 = 500\,, \quad 6n_1 = 3000\,. \tag{1}$$

b) *Obsahuje-li číslo* $6n$ *jedinou nulu* a je-li jeho nenulová cifra 1, 3, 5, je nula na místě jednotek, neboť $6n$ je sudé. Dělíme-li čísla 1110, 3330, 5550 šesti, dostaneme po řadě 185, 555, 925. Dostáváme tedy další řešení úlohy:

$$n_2 = 555, 6n_2 = 3330. \tag{2}$$

c) Obsahuje-li číslo $6n$ jedinou nulu a je-li jeho nenulová cifra 2 nebo 4, je třeba prozkoumat 6 možných případů; výsledky jsou uvedeny v tabulce:

| $6n$ | 2022 | 2202 | 2220 | 4044 | 4404 | 4440 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 337 | 367 | 370 | 674 | 734 | 740 |

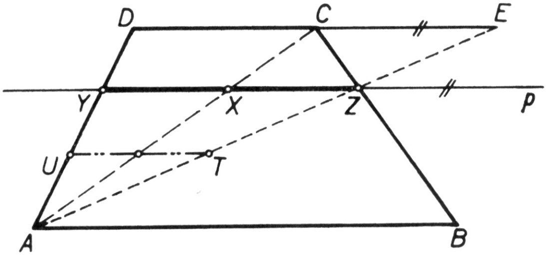
V této tabulce jen první sloupec dává řešení úlohy:

$$n_3 = 337\,, \quad 6n_3 = 2022\,. \tag{3}$$

Úloha má tedy celkem 3 řešení (1), (2), (3).

**4.** Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami $AB$, $CD$. Určite taký bod $X$ uhlopriečky $AC$, aby priamka $p$ rovnobežná s $AB$ vedená bodom $X$ pretala ramená $AD$, $BC$ v uvedenom poradí v bodoch $Y$, $Z$, pre ktoré platí $XY = XZ$. Vyjadrite dĺžku $XY$ pomocou $a = AB$, $c = CD$.

RIEŠENIE. a) Určíme množinu všetkých bodov $T$, pre ktoré platí: $Y$ leží na $AD$, $X$ leží na $AC$, $X$ je stredom úsečky $YT$, priamka $XY$ je rovnobežná s $AB$. Zostrojme bod $E$ tak, aby vrchol $C$ bol stredom úsečky $DE$ (obr. 44).




Obr. 44

Potom v trojuholníku $ADE$ je vnútro ťažnice $AC$ a bod $C$ množinou stredov všetkých úsečiek rovnobežných so stranou $DE$, ktorých koncové body $U$, $T$ ležia v uvedenom poradí na stranách $AD$, $AE$. Hľadaný bod $X$ dostaneme jedine v prípade, keď bod $T$ splynie s priesečníkom úsečiek $BC$, $AE$.

b) Zo vzťahu $\triangle ZCE \sim \triangle ZBA$ vyplýva

$$\frac{EZ}{AZ} = \frac{c}{a} \tag{1}$$

a ďalej podľa (1)

$$\frac{AE}{AZ} = \frac{AZ + EZ}{AZ} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a + c}{a}. \tag{2}$$

Zo vzťahu $\triangle AXZ \sim \triangle ACE$ vyplýva

$$\frac{XZ}{CE} = \frac{AZ}{AE}.$$

Podľa (2) je

$$XZ = \frac{AZ}{AE} \cdot CE = \frac{ac}{a + c},$$

a teda

$$XY = XZ = \frac{ac}{a + c}.$$