20. ročník matematické olympiády

III. Súťažné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970-1971. 13. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. pp. 47–92.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404612

III. Súťažné úlohy I. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{x_i}{i}\right)^2 = 2\left[x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{x_i \cdot x_{i+1}}{i(i+1)}\right],$$

kde n je dané prirodzené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú neznáme.

RIEŠENIE. Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre reálne čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 1)$ platí nerovnosť

$$a_0^2 + \binom{n}{1} a_1^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^2 \geqq 2\left[a_0a_1 + \binom{n-1}{1}a_1a_2 + \right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{2} a_2a_3 + \ldots + \binom{n-1}{n-1} a_{n-1}a_n\right], \qquad (1)$$

pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Pre $n = 1$ naše tvrdenie platí, pretože potom sa (1) redukuje na známu nerovnosť $a_0^2 + a_1^2 \geqq 2a_0a_1$.

Predpokladajme teda, že naše tvrdenie platí pre nejaké $n \geqq 1$ a uvažujme o ľubovoľných reálnych číslach $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Podľa indukčného predpokladu platí okrem (1) tiež nerovnosť

$$a_1^2 + \binom{n}{1} a_2^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_{n+1}^2 \geqq 2 \left[a_1 a_2 + \binom{n-1}{1} a_2 a_3 + \right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{2} a_3 a_4 + \ldots + \binom{n-1}{n-1} a_n a_{n+1} \right], \qquad (2)$$

pričom vieme, že rovnosť v (1) nastane práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$ a v (2) práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$. Sčítaním (1) a (2) dostaneme žiadanú nerovnosť

$$a_0^2 + \binom{n+1}{1} a_1^2 + \binom{n+1}{2} a_2^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} a_{n+1}^2 \geqq$$

$$\geqq 2 \left[a_0 a_1 + \binom{n}{1} a_1 a_2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n a_{n+1} \right],$$

v ktorej platí rovnosť práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$.

Tým je naše tvrdenie dokázané. Z neho bezprostredne vyplýva, že jediným riešením danej rovnice sú čísla

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n.$$

2. Najděte všechna přirozená čísla, která není možno vyjádřit jako součet aspoň dvou, ale méně než 1970, za sebou následujících přirozených čísel.

ŘEŠENÍ. Hledaná čísla jsou
(1) všechny celé nezáporné mocniny čísla 2;
(2) čísla tvaru $1024 \cdot 2^c \cdot M$, kde c je celé nezáporné číslo a M je součinem prvočísel větších než 1970.

Důkaz. I. Nechť $N = 2^\alpha$, α je celé nezáporné, a nechť

$$2^\alpha = N = \sum_{j=0}^{r-1} (n + j) = \frac{1}{2} r (2n + r - 1)$$

je vyjádřením čísla N ve tvaru součtu r ($\geqq 2$) sčítanců n, $n + 1, \ldots, n + r - 1$. Je tedy

$$2^{\alpha+1} = r(2n + r - 1)\,;$$

avšak jedno z čísel r, $2n + r - 1$ je nutně liché a větší než než 1.

II. Nechť N není mocninou 2; budiž p nejmenší prvočíslo větší než 2, které je dělitelem čísla N. Číslo N lze tedy psát ve tvaru

$$N = 2^\alpha p^\beta m\,, \tag{3}$$

kde $\beta > 0$, $\alpha \geqq 0$ (celá čísla), a m je buď 1, nebo součin prvočísel větších než p. Takové číslo N lze vyjádřit ve tvaru

$$N = \sum_{j=0}^{r-1} (n + j)\,, \tag{4}$$

kde n je přirozené a $r = \min\,[2^{\alpha+1}, p]$.

A. Nechť $2^{\alpha+1} < p$, takže $r = 2^{\alpha+1}$. Číslo

$$p^\beta m - 2^{\alpha+1}$$

je nutně liché ($p^\beta m$ je liché) a kladné; označme je $2n - 1$, $n \geqq 1$. Pro toto přirozené n pak máme

$$\sum_{=}^{n-1} (n + j) = \frac{1}{2} r\,(2n - 1 + r) = \frac{1}{2}\, 2^{\alpha+1}(p^\beta m - 2^{\alpha+1} +$$

$$+ 2^{\alpha+1}) = 2^\alpha p^\beta m = N\,.$$

B. Nechť $p < 2^{\alpha+1}$, takže $r = p$. Číslo

$$2^{\alpha+1} p^{\beta-1} m - p$$

je nutně iché ($\alpha + 1 > 1$, p je liché) a kladné ($p^{\beta-1} m \geqq 1$); označm je $2n - 1$, $n \geqq 1$. Pro toto přirozené n pak máme

$$\sum_{j=0}^{r-1}(n+j) = \frac{1}{2} r(2n-1+r) =$$

$$= \frac{1}{2} p(2^{\alpha+1} p^{\beta-1} m - p + p) = 2^\alpha p^\beta m = N\,.$$

C. Mějme N tvaru (3) a vyjádříme je ve tvaru (4) s nějakým přirozeným r, $r \geqq 2$; dokážeme, že $r \geqq \min\,[2^{\alpha+1}, p]$.

C. a) Nechť r je sudé,

$$2^\alpha p^\beta m = \sum_{j=0}^{r-1}(n+j) = \frac{1}{2} r(2n+r-1)\,;$$

číslo $2n + r - 1$ je pak liché, takže z rovnosti

$$2^{\alpha+1} p^\beta m = r(2n+r-1)$$

plyne $r \geqq 2^{\alpha+1} \geqq \min\,[2^{\alpha+1}, p]$.

C. b) Nechť r je liché, a tedy nutně dělitelné nějakým prvočíslem $q > 2$. Je

$$N = 2^\alpha p^\beta m = \sum_{j=0}^{r-1}(n+j) = \frac{1}{2} r(2n+r-1)\,.$$

Také číslo N je tedy dělitelné prvočíslem q, takže $q \geqq$ $\geqq p \geqq \min\,[p,\ 2^{\alpha+1}]$.

Čísla N tvaru $1024 \,.\, 2^c \,.\, M$ tedy nelze vyjádřit ve tvaru součtu méně než 1970 po sobě následujících přirozených čísel, neboť i 2048 i dělitelé čísla M jsou větší než 1970.

Naopak čísla N, která nejsou tvaru ani (1), ani (2) buď nejsou dělitelná číslem 1024, takže ve vyjádření (3) je $2^{\alpha+1} \leqq 1024 < 1970$, anebo jsou dělitelná prvočíslem p,

$2 < p < 1970$; v obou případech je

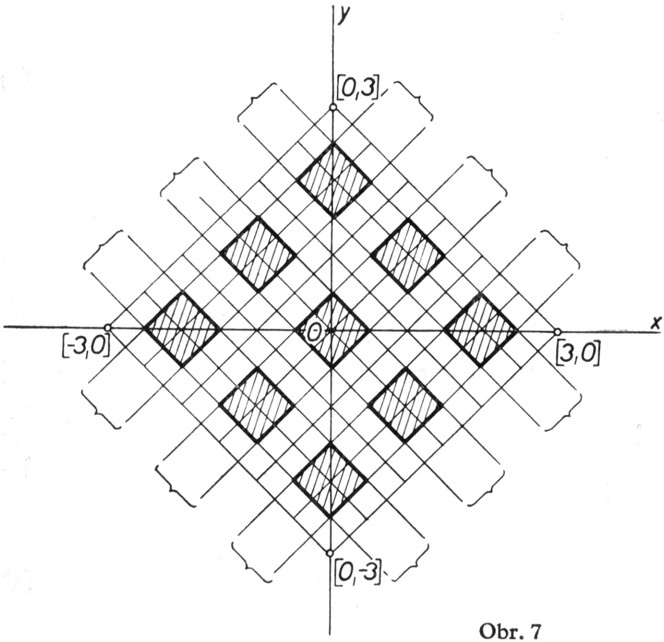
$$r = \min\,[2^{\alpha+1}, p] < 1970$$

a N lze vyjádřit podle toho, co bylo dokázáno před C ve tvaru (4).

3. Nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice x, y vyhovujú sústave nerovností

$$|x| + |y| < 3,$$

$$\sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2}\right) \geqq 0\,, \qquad \sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2}\right) \geqq 0\,.$$



Obr. 7

RIEŠENIE. Nerovnosť $\sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2}\right) \geqq 0$ je splnená práve vtedy, keď platí

$$2k\pi \leqq \pi \left(x + y + \frac{1}{2}\right) \leqq 2k\pi + \pi$$

čiže

$$-x + 2k - \frac{1}{2} \leqq y \leqq -x + 2k + \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

kde k je celé číslo.

Podobne nerovnosť $\sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2}\right) \geqq 0$ je splnená práve vtedy, keď platí

$$x + 2m - \frac{1}{2} \leqq y \leqq x + 2m + \frac{1}{2}, \qquad (2)$$

kde m je celé číslo.

Hľadaná množina bodov je potom prienikom štvorca $|x| + |y| < 3$ a pásov (1) a (2); pozri obr. 7.

4. Jsou dána kladná čísla a, b, c, d. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ tak, aby jeho obsah byl co největší. Najděte podmínku řešitelnosti.

ŘEŠENÍ. Nutnou podmínkou, aby existoval vůbec nějaký čtyřúhelník daných rozměrů, je, aby největší z čísel a, b, c, d bylo menší než součet tří zbývajících. Budeme proto předpokládat, že tato podmínka je splněna (a nakonec uvidíme, že je i postačující pro existenci hledaného čtyřúhelníka). Máme tedy

$$\left.\begin{aligned} a &< b + c + d, \\ b &< a + c + d, \\ c &< a + b + d, \\ d &< a + b + c. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(Jedna z těchto nerovností právě vyjadřuje naši podmínku a zbývající tři jsou pak triviálně splněny.)

Předpokládejme, že $ABCD$ je čtyřúhelník daných rozměrů; označme S jeho obsah, α resp. γ velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, resp. C, $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. Pak platí

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma) ,$$
$$4S = 2(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma). \tag{2}$$

Z dvojího vyjádření BD^2 podle kosinové věty plyne

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma . \tag{3}$$

Vztahy (2), (3) umocníme dvěma

$$16S^2 = 4a^2d^2 \sin^2 \alpha + 8abcd \sin \alpha \sin \gamma + 4b^2c^2 \sin^2 \gamma ,$$
$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$
$$= 4a^2d^2 \cos^2 \alpha - 8abcd \cos \alpha \cos \gamma + 4b^2c^2 \cos^2 \gamma$$

a pak sečteme.

$$16S^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 -$$
$$- 8abcd \cos (\alpha + \gamma) .$$

Dosadíme sem $\cos (\alpha + \gamma) = 2\cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} - 1$ a dostaneme

$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 -$$
$$- 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} .$$

Upravíme

$$4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$
$$= (a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + 2ad + 2bc) .$$
$$. (-a^2 - d^2 + b^2 + c^2 + 2ad + 2bc) =$$

$$= [(a + d)^2 - (b - c)^2] \,.$$
$$. [(b + c)^2 - (a - d)^2] = (a + d + b - c) \,.$$
$$. (a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) =$$
$$= 16 (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) \,.$$

Odvodili jsme tedy vzorec

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}} \,. \tag{4}$$

Úloha bude rozřešena, sestrojíme-li (za předpokladů (1)) tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ a dokážeme-li, že existuje jediný takový tětivový čtyřúhelník. V něm bude $\alpha + \gamma = 180°$, takže podle (4) bude jeho obsah větší než obsah každého jiného (tedy netětivového) čtyřúhelníka daných rozměrů.

Sestrojme $\triangle ABD$ s

$$AB = a, \quad AD = d, \quad BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} \,.$$

(Dvojím užitím kosinové věty snadno plyne, že úhlopříčka BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ musí mít tuto velikost.) Je zřejmé, že úsečku BD lze sestrojit eukleidovskými konstrukcemi; musíme však ověřit trojúhelníkové nerovnosti. To provedeme metodou ekvivalentních úprav:

$$a + d > \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} \,,$$

$$(a^2 + 2ad + d^2)(ad + bc) > (ab + cd)(ac + bd) \,,$$

$$a^3d + 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc + 2abcd + bcd^2 >$$
$$> a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2 \,,$$

$$a^2 + 2ad + d^2 + 2bc > b^2 + c^2 \,,$$

$$0 < (a + d)^2 - (b - c)^2 ,$$

$$0 < (a + b - c + d)(a - b + c + d) ,$$

což podle (1) platí. Podobně

$$|a - d| < \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} ,$$

$$(a^2 - 2ad + d^2)(ad + bc) < (ab + cd)(ac + bd) ,$$

$$a^3d - 2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc - 2abcd + bcd^2 <$$

$$< a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2 ,$$

$$a^2 - 2ad + d^2 - 2bc < c^2 + b^2 ,$$

$$0 < (b + c)^2 - (a - d)^2 ,$$

$$0 < (a + b + c - d)(-a + b + c + d) ,$$

což opět platí podle (1).

Nakonec v polorovině opačné k BDA sestrojíme trojúhelník BCD s $BC = b$, $CD = c$: jeho existence plyne analogicky z (1).

Podle kosinové věty vypočteme

$$\cos \alpha = \frac{1}{2ad} \left[a^2 + d^2 - \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \right] =$$

$$= \frac{1}{2ad} \cdot \frac{a^3d + ad^3 + a^2bc + bcd^2 - a^2bc - ac^2d - ab^2d - bcd^2}{ad + bc} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} ; \quad \text{analogicky}$$

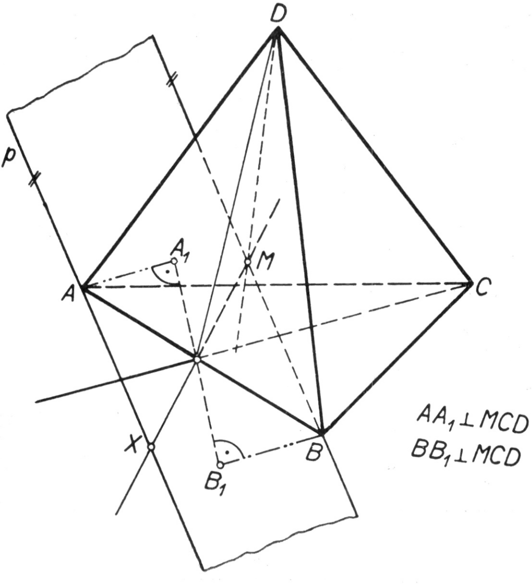
$$\cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{ad + bc} .$$

Je tedy $\cos \alpha = - \cos \gamma$, takže $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník.

Dokázali jsme, že úloha má jediné řešení, jakmile je splněna podmínka vyslovená na začátku.

5. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod M; objemy čtyřstěnů $MBCD$, $MACD$, $MABD$, $MABC$ označme po řadě V_A, V_B, V_C, V_D. Dokažte, že platí

$$V_A \,.\, \vec{MA} + V_B \,.\, \vec{MB} + V_C \,.\, \vec{MC} + V_D \,.\, \vec{MD} = \vec{o}\,.$$



Obr. 8

ŘEŠENÍ. Veďme bodem A přímku $p \parallel MB$ a označme X její průsečík s rovinou MCD. Buďte A_1, B_1 pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny MCD (obr. 8). Platí

$$\frac{AX}{BM} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{V_B}{V_A}\,.$$

Poněvadž rovina MCD odděluje body A, B, jsou vektory $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{MB}$ souhlasně rovnoběžné a máme

$$\overrightarrow{AX} = \frac{V_B}{V_A} \cdot \overrightarrow{MB} . \qquad (1)$$

Veďme dále bodem X přímku $q \parallel MC$ a označme Y její průsečík s rovinou MBD. Buďte C_1, X_1, A_2 pravoúhlé průměty bodů C, X, A na rovinu MBD. Poněvadž $AX \parallel MB$, máme $XX_1 = AA_2$. Nyní platí

$$\frac{XY}{CM} = \frac{XX_1}{CC_1} = \frac{AA_2}{CC_1} = \frac{V_C}{V_A} .$$

Přímka p (a tedy i její bod X) leží v poloprostoru $MBDA$, takže rovina MBD odděluje body X, C a můžeme psát

$$\overrightarrow{XY} = \frac{V_C}{V_A} \cdot \overrightarrow{MC} . \qquad (2)$$

Přímka q leží v rovině MCD, neboť v této rovině leží její bod X (podle konstrukce) a je $q \parallel MC$. Proto i bod Y (přímky q) leží v rovině MCD. Avšak (podle konstrukce) Y leží také v rovině MBD. Z toho plyne, že Y leží na přímce MD. Označme nyní D_1, Y_1, X_2, A_3 pravoúhlé průměty bodů D, Y, X, A na rovinu MBC. Body X, Y určují přímku $q \parallel MC$; je $YY_1 = XX_2$ a protože $p \equiv \equiv AX \parallel MB$, je také $XX_2 = AA_3$; z toho plyne, že $YY_1 = AA_3$. Poněvadž body Y, M, D leží na jedné přímce, platí

$$\frac{YM}{DM} = \frac{YY_1}{DD_1} = \frac{AA_3}{DD_1} = \frac{V_D}{V_A} .$$

Jelikož vektory $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{MB}$ jsou souhlasně rovnoběžné, leží oba body X, B v témž poloprostoru určeném rovinou MAC, tj. v $MACB$. Proto i přímka $q \parallel MC$ leží v tomto poloprostoru, takže její bod Y na MD je oddělen bodem

M od D. Tak můžeme psát

$$\overrightarrow{YM} = \frac{V_D}{V_A} \cdot \overrightarrow{MD}. \tag{3}$$

Vzhledem k výsledkům (1), (2), (3) nakonec dostáváme

$$V_A . \overrightarrow{MA} + V_B . \overrightarrow{MB} + V_C . \overrightarrow{MC} + V_D . \overrightarrow{MD} =$$
$$= V_A . \left(\overrightarrow{MA} + \frac{V_B}{V_A} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{V_C}{V_A} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{V_D}{V_A} \cdot \overrightarrow{MD}\right) =$$
$$= V_A . (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YM}) ;$$

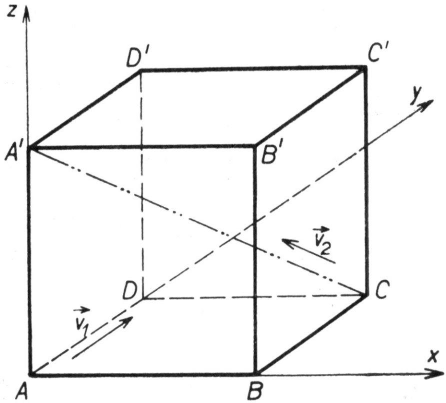
avšak vektor v poslední závorce je zřejmě nulový. Tím je důkaz hotov.

POZNÁMKA. Rychlejší důkaz se dostane užitím tzv. Carathéodoryho věty (dokonce pro simplex v $\mathbf{E}_n$).

6. Je daná jednotková kocka $ABCDA'B'C'D'$. Z vrcholov A a C vylezú súčasne dva chrobáky. Jeden z nich lezie po hrane AD a za časovú jednotku dolezie do bodu D. Druhý je rýchlejší a za tú istú časovú jednotku sa dostane po telesovej uhlopriečke CA' do bodu A'. Zistite, kedy si budú oba chrobáky najbližšie a aká bude v tom okamihu ich vzdialenosť, ak predpokladáme, že sa pohybujú rovnomerne.

RIEŠENIE. Zvoľme v priestore kartézsku súradnicovú sústavu tak, že $A = (0, 0, 0)$, $D = (0, 1, 0)$, $A' = (0, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ (obr. 9). Rýchlosť prvého chrobáka je $\overrightarrow{\mathbf{v}_1} = (D - A) = (0, 1, 0)$, rýchlosť druhého $\overrightarrow{\mathbf{v}_2} = (A' - C) = (-1, -1, +1)$ (príslušných jednotiek). V okamihu $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ sa prvý chrobák nachádza v bode

$$A + t . \overrightarrow{\mathbf{v}_1} = (0, t, 0)$$



Obr. 9

a druhý chrobák v bode

$$C + t \,.\, \vec{\boldsymbol{v}}_2 = (1 - t,\ 1 - t,\ t)\,.$$

Štvorec ich vzdialenosti $d(t)$ v čase t teda je

$$d^2(t) = (1 - t)^2 + [(1 - t) - t]^2 + t^2 = 6t^2 - 6t + 2 =$$

$$= 6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,.$$

Táto kvadratická funkcia nadobúda minimum zrejme pre $t = \frac{1}{2}$, čo je hodnota z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, na ktorom o nej uvažujeme. Chrobáky budú teda k sebe najbližšie v okamihu

$$t = \frac{1}{2}$$

a ich najmenšia vzdialenosť bude $d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

(Komentáře byly určeny hlavně pro žáky 1. ročníků gymnasií a středních odborných škol.)

1. Jestliže a, b jsou kladná čísla menší než 1, platí nerovnost

$$|a-b| \leqq \frac{|\sqrt{a(1-b)}-\sqrt{b(1-a)}|}{\sqrt{a(1-b)}+\sqrt{b(1-a)}}\,; \qquad (1)$$

dokažte. Zjistěte, kdy nastane rovnost.

KOMENTÁŘ. První úloha je v podstatě část řešení nerovnice o dvou proměnných; úloha je usnadněna tím, že se nežádají všechna řešení dané nerovnice; má se **provést jen zkouška** pro udaná řešení

$$(0 < a < 1, \quad 0 < b < 1).$$

Můžeme pohlížet na úlohu také tak, že daná nerovnice se má řešit v oboru

$$\{[a, b] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,; \quad 0 < a < 1, \quad 0 < b < 1\}\,.$$

Tímto omezením je usnadněno řešení, neboť můžeme celkem snadno provést **rozbor** úlohy. Důležitá jsou tato fakta:

- Daná nerovnice je souměrná v a, b; proto *můžeme volit označení* tak, že je např. $a \geqq b$. Tím dosáhneme zjednodušení při práci s absolutními hodnotami. Bylo by ovšem třeba uvést ještě jiné příklady, třeba označení úhlu v trojúhelníku podle rostoucí velikosti apod.
- Je třeba zjistit, zda všechny výrazy mají v daném oboru smysl, neboť jsou tu zlomky a odmocniny. Z předpokladů však skutečně plyne

$$0 < 1 - a < 1, \quad 0 < 1 - b < 1\,.$$

• Volbou označení a, b zmizí z dané nerovnice absolutní hodnoty, neboť je $a - b \geqq 0$ i $a(1 - b) \geqq b(1 - a)$, tj. $\sqrt{a(1 - b)} \geqq \sqrt{b(1 - a)}$. (Můžeme ovšem postupovat obvyklým způsobem, tj. např. umocněním. Sami pak budeme hledat obratnější způsob, abychom se vyhnuli komplikovaným výpočtům; tím dojdeme nenásilně k volbě označení.)

• Když se rozborem určila všechna možná řešení úlohy, tj. všechny dvojice $[a, b]$, pro něž platí $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, provede se **zkouška obrácením postupu z rozboru, neboť jde o nekonečně mnoho dvojic čísel.**

• Nerovnice

$$0 \leqq \left(\sqrt{a(1 - a)} - \sqrt{b(1 - b)}\right)^2,$$

ke které dojdeme naznačeným způsobem, umožňuje i vyšetřit, pro které dvojice $[a, b]$ platí rovnost. Tyto dvojice jsou řešením rovnice

$$\sqrt{a(1 - a)} = \sqrt{b(1 - b)}$$

neboli rovnice

$$(a - b)(1 - a - b) = 0. \tag{1}$$

Z (1) plyne buď $a = b$, nebo $a + b = 1$.

Můžeme tak pokládat a, b za ortonormální souřadnice v rovině a prozkoumat řešení dané rovnice graficky. Jako úvodní úlohu můžeme porovnat aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných čísel u, v. Je $a = \dfrac{u + v}{2}$, $g = \sqrt{uv}$, $h = \dfrac{2uv}{u + v}$; porovnáním dostaneme

$$a \geqq g \geqq h;$$

rovnost platí jen v případě $u = v$.

ŘEŠENÍ. Za daných předpokladů $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ mají zřejmě všechny výrazy v nerovnosti (1) smysl.

Pro $a = b$ vztah (1) platí, dokonce v něm nastává rovnost.

Vyšetříme případ, kdy $a \neq b$. Vzhledem k tomu, že výrazy na obou stranách nerovnosti (1) jsou souměrné v a, b, můžeme označení a, b volit tak, že

$$0 < b < a < 1. \tag{2}$$

Označme r rozdíl pravé a levé strany nerovnosti (1). Pak vzhledem k (2) platí

$$r = \frac{\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}}{\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}} - (a - b)\,. \tag{3}$$

Protože je $a \neq b$, můžeme zlomek v rovnosti (3) rozšířit výrazem $\left(\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}\right)$. Po dalších úpravách pak dostaneme

$$r = \frac{\left(\sqrt{a(1-a)} - \sqrt{b(1-b)}\right)^2}{a - b}\,. \tag{4}$$

Ze (4) plyne, že pro každou dvojici čísel a, b splňujících (2) platí

$$r \geqq 0\,,$$

tj. také nerovnost (1). Tím je platnost nerovnosti (1) dokázána pro všechna kladná čísla a, b menší než 1.

Zbývá vyšetřit, kdy v (1) nastává nerovnost. Je třeba zjistit, zda může v (1) nastat rovnost i pro nějakou dvojici a, b splňující podmínky (2). Pak by bylo $r = 0$, tj.

$$a(1-a) = b(1-b)\,,$$

tedy

$$(a-b)(1-a-b) = 0\,.$$

Vzhledem k (2) je $a - b \neq 0$, takže

$$a + b = 1. \tag{5}$$

Dosazením do (1) se snadno přesvědčíme, že pro kladná čísla a, b splňující (5) platí v (1) skutečně rovnost. Ověříme ještě případ $a = b$, který jsme během úprav vyloučili. Po dosazení do (1) zjistíme, že i pro $a = b$ platí ve vztahu (1) rovnost. Závěr tedy zní:

Rovnost v (1) nastává pro dvojici kladných čísel a, b menších než 1 právě když

$$a = b \quad \text{nebo} \quad a + b = 1.$$

2. Nechť n je přirozené číslo a $f(x)$ polynom jedné proměnné x s celočíselnými koeficienty. Písmenem $\mathbf{M}$ označme množinu všech celých čísel x takových, že n dělí $f(x)$. Rozhodněte, zda se počet prvků množiny $\mathbf{M}$ může rovnat číslu 1970 nebo 1971.

KOMENTÁŘ. Na scestí nás mohou zavádět určitá čísla 1970 a 1971 (současně letopočty), která jsou však pro řešení úlohy nepodstatná.

Osvědčená je metoda řešit nejprve problém pro speciální případy, tj. nejprve experimentovat, pak vyslovit hypotézu a dokázat ji popř. metodou, které jsme užili při experimentování. Jako první případ zvolíme lineární polynomické funkce.*) Nechť je tedy $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Impuls zní zkoumat hodnotu polynomické funkce pro $x + kn$ (kde k je celé číslo). Platí

$$f(x + kn) = a(x + kn) + b = (ax + b) + akn = \\ = f(x) + (ak) . n . \qquad (2)$$

Z (2) vyplývá pro lineární polynomické funkce: Je-li $x \in \mathbf{M}$, je také $x + kn \in \mathbf{M}$. Z toho plyne dále:

$$\text{Je-li } \mathbf{M} \neq \emptyset, \text{ je } \mathbf{M} \text{ množina nekonečná.} \qquad \text{(V)}$$

Dalším krokem bude zkoumání, zda věta (V) platí

*) Nebudeme ovšem volit numerické koeficienty, specializujeme jen stupeň.

i pro polynomické funkce druhého stupně. Je-li $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, je

$$f(x + kn) = a(x + kn)^2 + b(x + kn) + c = ax^2 + bx + c + (2akx + ak^2n + bk)n = f(x) + p \,.\, n\,, \quad (3)$$

kde p je celé číslo. Z (3) odvodíme (jako z (2)), že i pro polynomické funkce druhého stupně platí věta (V).

Snad nyní už lze vyslovit hypotézu o obecné platnosti věty (V); můžeme se o tom však ještě přesvědčit na některých zvláštních polynomických funkcích vyššího stupně, např.

$$f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = ax^4 + bx + c \quad \text{apod.}$$

Důkaz hypotézy (bez znalosti binomické formule) se může opřít o vztah platný pro každé přirozené a

$$(x + kn)^a = \underbrace{(x + kn) \,.\, (x + kn) \,.\, \ldots \,.\, (x + kn)}_{a\text{-krát}} = x^a + C \,.\, n\,,$$

kde C je celé číslo.

Problémem zůstává umělý obrat (trik) zkoumat vztah mezi funkčními hodnotami $f(x)$ a $f(x + kn)$ nebo jednodušeji mezi $f(x)$ a $f(x + n)$. Toto zkoumání lze **navodit** (v souvislosti s vyšetřováním lineárních funkcí) otázkou, zda dovedeme **z jednoho známého** prvku množiny určit nějaký její **další prvek.**

Z věty (V) ovšem plyne na otázku úlohy záporná odpověď.

ŘEŠENÍ. Buď x celé a k přirozené číslo. Uvědomme si nejprve, že $(x + n)^k = x^k + n \,.\, C$, kde C je celé číslo. Proto $f(x + n) = f(x) + n \,.\, F$, kde F je jisté celé číslo. Jakmile tedy $x \in \mathbf{M}$, pak také $x + n \in \mathbf{M}$. Z toho plyne, že množina $\mathbf{M}$ je buď prázdná, anebo nekonečná. Počet prvků naší množiny $\mathbf{M}$ se tedy nemůže rovnat číslu 1970 ani 1971. Tím je úloha vyřešena.

3. Najděte největší přirozené číslo n s touto vlastností: Množinu čísel $1, 2, 3, \ldots, n$ lze rozdělit na dvě části tak, že žádná z nich neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí.

KOMENTÁŘ. V textu úlohy má být místo „rozdělit", „rozložit" neboť jde skutečně o nalezení dvou **disjunktních** částí $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ tak, že

$$\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 = \{1, 2, 3, \ldots, n\}\,.$$

Předně asi bude třeba vysvětlit si termín trojčlenná aritmetická posloupnost. Podle textu úlohy se mají všechna přirozená čísla n roztřídit do dvou skupin:

Skupina **I** obsahuje všechna taková n, že existuje aspoň jeden rozklad množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ v části $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ tak, že ani $\mathbf{M}_1$, ani $\mathbf{M}_2$ neobsahuje žádnou trojčlennou aritmetickou posloupnost.

Skupina **II** obsahuje všechna taková n, že **každý** rozklad množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ v části $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ má tu vlastnost, že buď $\mathbf{M}_1$, nebo $\mathbf{M}_2$ obsahuje nějakou trojčlennou aritmetickou posloupnost. Konečným úkolem je *najít největší číslo ze skupiny* **I**.

Předně je zřejmé, že všechna čísla $n < 6$ patří do skupiny **I**. Dále se pokusíme zjistit, do které skupiny patří čísla 6, 7, 8. Zkusmo snadno zjistíme, že patří do skupiny **I**. Je totiž

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 4\} \cup \{3, 5, 6\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 6, 7\},$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 3, 6, 8\} \cup \{2, 4, 5, 7\}.$$

Dalším podnětem pro řešení úlohy může být tato otázka: *Zdá se, že čím větší bude n, tím bude nesnadnější najít takový rozklad množiny* 1, 2, ..., *n ve dvě části tak, aby žádná z nich neobsahovala žádnou trojčlennou aritmetickou posloupnost.* Ptáme se tedy: **Když číslo** n **náleží do skupiny II, náleží tam také** $n + 1$?

Odpověď je kladná; tvrzení se dokáže „skrytou“ matematickou indukcí. Vyjdeme z množiny $\{1, 2, \ldots, n, n + 1\}$ (to je velmi podstatné, v tom asi budeme chybovat!); předpokládáme, že $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ je její libovolný rozklad ve dvě části, tedy

$$\{1, 2, \ldots, n, n + 1\} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset .$$

Číslo $n + 1$ se vyskytuje v jediné z částí $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$; zvolme označení množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ tak, aby bylo $n + 1 \in \mathbf{M}_2$. Pak množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2 \setminus \{n + 1\}$ tvoří rozklad množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Protože číslo n patří do skupiny **II**, obsahuje aspoň jedna z množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2 \setminus \{n + 1\}$ trojčlennou aritmetickou posloupnost; totéž tedy platí i o množinách $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, a tím je tvrzení dokázáno.

Tato část řešení je obtížná a vyžaduje vydatnou pomoc.

Zbývá vyšetřit případ $n = 9$. Ukáže se, že 9 patří do skupiny **II**, a že tedy 8 *je největší číslo ze skupiny* **I**. Fakt, že 9 náleží do skupiny **II**, se dokáže experimentálně. Nechť je

$$\{1, 2, \ldots, 9\} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2, \qquad \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset .$$

Nejprve zkoumáme případy, kdy $\mathbf{M}_2$ je množina o jednom nebo dvou prvcích; pak najdeme v $\mathbf{M}_1$ vždy trojčlennou aritmetickou posloupnost s diferencí 1, neboť $\mathbf{M}_1$ vznikne z $\mathbf{M}_2$ vynecháním jednoho nebo dvou čísel.

Dále zkoumáme případy, kdy $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ obsahují aspoň tři prvky; označení množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ zvolíme tak, aby $\mathbf{M}_1$ obsahovalo více prvků než $\mathbf{M}_2$; $\mathbf{M}_1$ tedy obsahuje 6 nebo 5 prvků.*)

Zabývejme se nejprve případem, kdy $\mathbf{M}_1$ obsahuje 6 prvků. Uspořádáme těchto 6 čísel vzestupně a dostaneme sled s **kladnými** diferencemi:

$$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. \tag{4}$$

---

*) Zde je jiná volba označení $\mathbf{M}_1$ $\mathbf{M}_2$ než při předchozím důkazu indukcí.

Probereme případy, kdy největší z čísel (4) je postupně 4, 3, 2, 1, a vždy dokážeme, že existuje v $\mathbf{M}_1$ trojčlenná aritmetická posloupnost. Bylo by sice možné prozkoumat experimentálně všechny možné rozklady množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$ ve dvě části, z nichž každá obsahuje 3 až 6 prvků ($3 + 6$ nebo $4 + 5$), avšak těchto rozkladů je $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = (12 + 18) \,.\, 7 = 210$; toto primitivní řešení by bylo úmorné. Takovéto situace ospravedlňují deduktivní přístup.

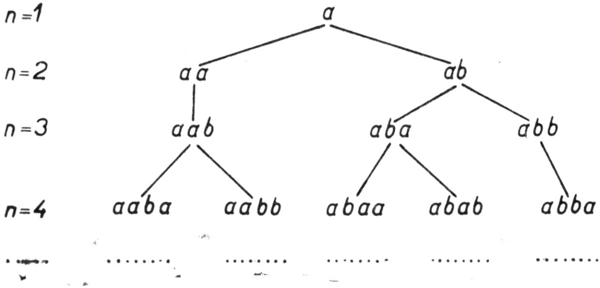
Vraťme se ke zkoumání sledu (4). Platí $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \leqq 8$ (proč?); proto každé z čísel d_i je rovno nejvýše čtyřem. Je-li některé z čísel d_i rovno čtyřem, jsou ostatní čtyři rovna jedné a žádaná posloupnost (s diferencí 1) je nalezena. Stačí totiž, aby dvě sousední diference byly sobě rovny. Je-li největší z čísel d_i rovno třem, je nejvýše jedno ze zbývajících rovno dvěma a ostatní tři jsou rovna jedné. Pak je třeba zkoumat možnosti sledu (4) a dokázat, že vždycky dostaneme trojčlennou aritmetickou posloupnost. Zařadění členů této posloupnosti ukazují znaky $\bullet$, např. v těchto případech:

$\bullet$ 1 $\bullet$ 1 $\bullet$ 3, 1, 2   1 $\bullet$ 2, 1 $\bullet$ 3 $\bullet$ 1.

Obdobně probíhá zkoumání, jsou-li všechna d_i sledu (4) rovna jedné nebo dvěma a v případě, kdy množina $\mathbf{M}_1$ je jen pětiprvková, tj. kdy sled (4) obsahuje jen čtyři kladné diference.

Úloha **3** vlastně nepředpokládá žádné matematické znalosti. Je těžká, ale jejím řešením získáme mnoho užitečných matematických dovedností.

ŘEŠENÍ. Znázorníme všechny možné rozklady množiny čísel $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ na dvě části tak, aby žádná z nich neobsahovala trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí. Při řešení naší úlohy se zřejmě můžeme zabývat jen disjunktními rozklady. Písmeno a, resp. b, napsané na i-tém místě zleva v příslušné n-členné posloupnosti (viz níže), bude znamenat, že číslo i patří do prvé, resp. druhé skupiny rozkladu, který tato posloupnost znázorňuje. Můžeme ještě předpokládat, že číslo 1 bude patřit vždy do prvé skupiny. Sestavíme si nyní schéma (obr. 10), v jehož n-tém řádku shora jsou



Obr. 10

vypsány všechny možné přípustné rozklady množiny čísel $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Tyto rozklady se vždy najdou užitím předchozího $(n - 1)$-ho řádku: má-li se totiž množina čísel $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dát rozdělit na dvě (disjunktní) části, z nichž žádná neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost, pak totéž pochopitelně musí platit i pro podmnožinu $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$; poslední číslo n pak přidáváme buď k prvé, nebo k druhé skupině každého rozkladu uvedeného v $(n - 1)$-ém řádku, přičemž ovšem dbáme na to, aby ze žádné z nově vznikajících skupin nebylo možno vybrat trojčlennou aritmetickou posloupnost s nenulovou diferencí. Tak se ukazuje, že v osmém řádku našeho schématu vyjdou právě tři možnosti: *aabbaabb*, *ababbaba*, *abbaabba*; z nich už však nelze pokračovat na devátém řádku.

ODPOVĚĎ: Hledané číslo je $n = 8$.

POZNÁMKA: Řešení úlohy **3** bylo v komentáři podrobně naznačeno; uvádíme zde proto další možné řešení.

4. Ze všech čtyřúhelníků, které mají daný obvod, má největší obsah čtverec; dokažte.

KOMENTÁŘ. a) Jako průpravu pro řešení čtvrté úlohy by bylo vhodné řešit tzv. izoperimetrický problém pro pravoúhelník. Označme s poloviční obvod pravoúhelníka, x délku jedné strany. Pro jeho obsah y platí

$$y = x(s - x) = sx - x^2 = \frac{s^2}{4} - \left(x - \frac{s}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

Funkce y (obsah) nabývá svého maxima, právě když je $x - \frac{s}{2} = 0$, tj. $x = \frac{s}{2}$. Pravoúhelník je pak čtverec.

b) Druhá část řešení je zkoumání libovolného čtyřúhelníka $ABCD$. Úvodem by měla být úvaha, že ke každému *nekonvexnímu* čtyřúhelníku existuje *konvexní* čtyřúhelník *téhož obvodu* a *většího obsahu*. Stačí tedy zabývat se konvexními čtyřúhelníky. To je druhá přípravná úvaha.

c) Třetí přípravný krok je tento: Zkoumejme obsah trojúhelníka, jehož dvě strany mají **konstantní** délky p, q a úhel jimi sevřený má **proměnnou velikost** ω. Bez trigonometrie je patrné, že obsah je maximální, právě když je maximální výška na stranu p, tj. když je $p \perp q$.

d) Následuje vlastní řešení úlohy. Impuls je ve výzvě: odhadněte pomocí délek stran čtyřúhelníka $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) obsahy trojúhelníků ABC, ADC, ABD, CBD; vyjde

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\leqq \frac{1}{2} ab\,, & \triangle ADC &\leqq \frac{1}{2} cd\,, \\ \triangle ABD &\leqq \frac{1}{2} ad\,, & \triangle CBD &\leqq \frac{1}{2} bc\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Sečtením vyjde pro obsah P čtyřúhelníka $ABCD$:

$$2P \leqq \frac{1}{2} a(b + d) + \frac{1}{2} c(b + d) = \frac{1}{2} (a + c)(b + d)\,.$$

Označíme-li $2s$ obvod (délku obvodu), $a + c = x$, dostaneme

$$4P \leqq x(2s - x) = s^2 - (s - x)^2\,. \tag{7}$$

Maximum funkce (7) dostaneme (viz odst. a)) pro $x = s$, tj. $a + c = b + d$. Spojíme-li tento výsledek se skutečností, že v (6) platí rovnost, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ pravoúhelník, dostaneme $a = b = c = d$. Ostatně pak shledáme, že vztah (7) nebylo třeba odvozovat, neboť je to repríza odvození a využití vztahu (5). Obě úvahy se ztotožní, jakmile si uvědomíme, že čtyřúhelník $ABCD$ s maximálním obsahem musíme hledat mezi pravoúhelníky.

ŘEŠENÍ. Buď $ABCD$ libovolný čtyřúhelník se stranami $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Pak platí

$$\text{obsah } \triangle ABC \leqq \frac{1}{2} ab\,,$$

$$\text{obsah } \triangle BCD \leqq \frac{1}{2} bc\,,$$

$$\text{obsah } \triangle CDA \leqq \frac{1}{2} cd\,,$$

$$\text{obsah } \triangle DAB \leqq \frac{1}{2} da\,.$$

Sečtením dostaneme

$$2\,.\,\text{obsah}\ ABCD \leqq \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da) = $$
$$= \frac{1}{2}(a + c)(b + d),$$

tedy

$$\text{obsah}\ ABCD \leqq \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}. \qquad (1)$$

Přitom je jasné, že rovnost v (1) platí právě když $ABCD$ je pravoúhelník. Dále máme

$$\sqrt{\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}} \leqq \frac{\dfrac{a + c}{2} + \dfrac{b + d}{2}}{2} = \frac{a + b + c + d}{4},$$

čili

$$\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2} \leqq \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^2 \qquad (2)$$

s rovností právě když $a + c = b + d$. Z (1), (2) konečně dostáváme

$$\text{obsah}\ ABCD \leqq \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^2$$

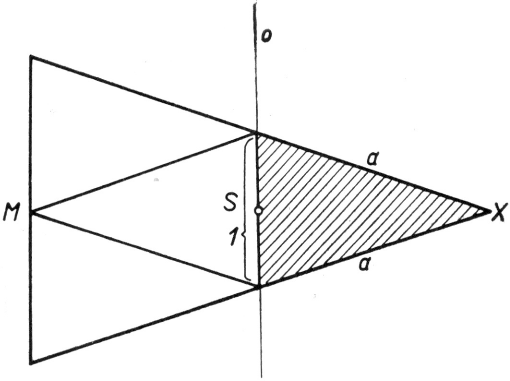
s rovností právě když $ABCD$ je čtverec. Tím je věta dokázána.

5. Stěny čtyřstěnu jsou čtyři navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky; nejkratší hrana má délku 1. Určete všechny takové čtyřstěny.

KOMENTÁŘ. Tato úloha je v podstatě zkoumání sítí hledaného čtyřstěnu. Je třeba rozlišit dva případy:

Nejkratší hrana*) je a) základnou rovnoramenného trojúhelníka, b) jeho ramenem.

V případě a) vychází zkoumání z rovnoramenného trojúhelníka o stranách $(1, a, a)$, kde $a \geqq 1$. S použitím podobnosti snadno dokážeme shodnost všech čtyř stěn, síť čtyřstěnu je nakreslena na obr. 11. Je pak ještě třeba

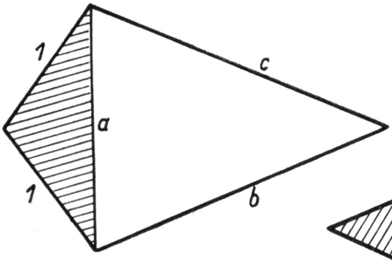


Obr. 11

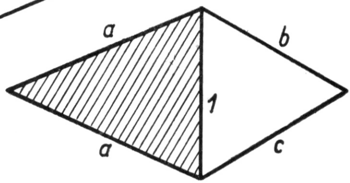
dokázat existenci čtyřstěnu, což je ryze stereometrická úvaha; užije se tu otáčení bodu X kolem osy o, bod X vyplní kružnici k se středem S a poloměrem $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$ a na ní leží vrchol V čtyřstěnu ve vzdálenosti $MV = 1$. Obdobně se postupuje v případě b): Zde je však třeba rozlišit dvě možnosti (viz obr. 12). Předpokládáme $a > 1$, neboť případ, kdy všechny stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, je zahrnut v a): A) $b = c = 1$, B) $b = a$,

*) Vysvětlíme si i termín „nejkratší“: znamená to, že žádná jiná hrana nemá *menší* délku.

$c = a^2$. Případ B) se přivede ke sporu ($a = 1 \wedge a > 1$), případ A) dá čtyřstěn, jehož síť tvoří čtyři shodné tupoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. V případě A) je ovšem také třeba dokázat existenci čtyřstěnu jako v odst. a).



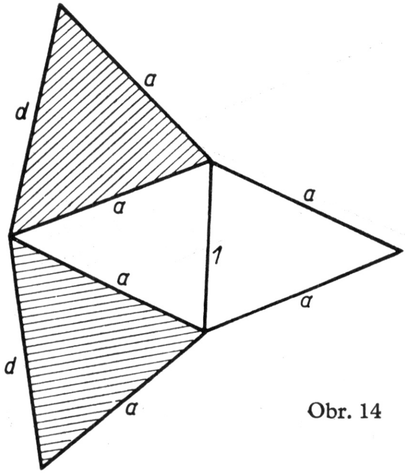
Obr. 12



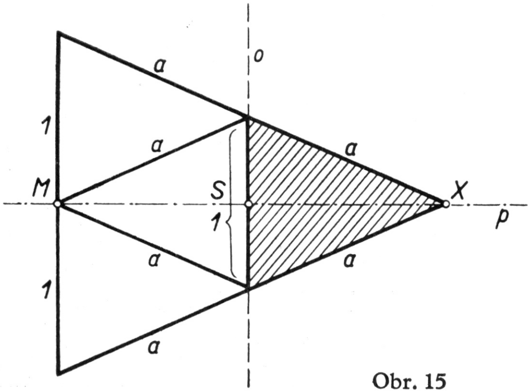
Obr. 13

ŘEŠENÍ. Rozlišíme dva typy čtyřstěnů: I. Nejkratší hrana je základnou některé stěny (tj. rovnoramenného trojúhelníka); II. nejkratší hrana je ramenem některé stěny.

Ad I. Stěna, která je rovnoramenným trojúhelníkem se základnou délky 1, nechť má rameno délky a; podle textu úlohy je $a \geqq 1$. Začněme rýsovat síť čtyřstěnu (obr. 13). Vycházíme z vyšrafované stěny a k ní připojíme trojúhelník o stranách délek 1, b, c. Tento nevyšrafovaný trojúhelník má buď za základnu základnu vyšrafovaného trojúhelníka, a pak je vzhledem k jejich podobnosti $b = c = a$, nebo má za základnu např. stranu c, a pak je $\frac{1}{c} = \frac{b}{c} = \frac{a}{1}$. Odtud plyne $b = 1$, $c = \frac{1}{a} \leqq 1$. Protože nejkratší hrana má délku 1, je $c = 1$, $a = 1$ a oba trojúhelníky z obr. 13 jsou tedy opět rovnoramenné se společnou základnou délky 1; vzhledem k své podobnosti jsou shodné (obr. 14). Připojíme další dva trojúhelníky (vyšrafované) o stranách délek a, a, d. Vzhledem k podobnosti všech stěn je $d = 1$ a definitivní tvar sítě je na obr. 15.



Obr. 14



Obr. 15

Existenci čtyřstěnu, jehož síť je na obr. 15, dokážeme pro $a \geqq 1$ snadno. Otáčíme-li vyšrafovaný trojúhelník kolem osy o, opisuje bod X kružnici k, která leží v rovině kolmé k nákresně a vedené přímkou p, která má střed S a poloměr $r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$. Na kružnici k leží dva body, které mají od bodu M vzdálenost 1, neboť platí

$$1 < \sqrt{3} \leqq \sqrt{4a^2 - 1} = 2 \,.\, \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},$$

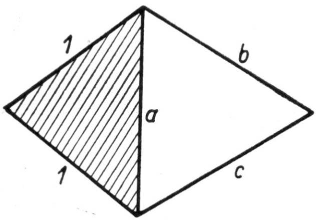
což je průměr kružnice k. Tyto dva body jsou vrcholy hledaných čtyřstěnů.

Ad II. Stěna, která je rovnoramenným trojúhelníkem, má ramena délky 1 a základnu délky a, pro kterou platí

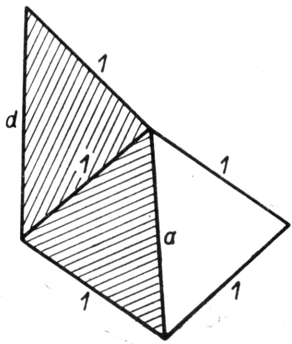
$$1 < a < 2 \qquad (1)$$

(nerovnost $a < 2$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti). Jako v případě I. začneme sestrojovat síť (obr. 16). Buď je strana délky a základnou nevyšrafovaného trojúhelníka, a pak je $b = c = 1$ (případ A), nebo je např. strana c základnou nevyšrafovaného trojúhelníka, a pak je $b = a$, $c = a^2$ (případ B).

V případě A pokračujeme dále podle obr. 17. Vzhledem



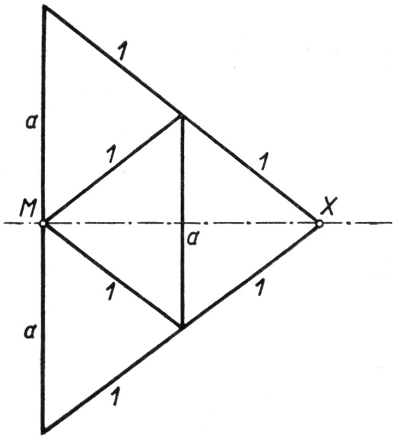
Obr. 16



Obr. 17

k podobnosti obou vyšrafovaných trojúhelníků je $d = a$ a definitivní tvar sítě ukazuje obr. 18.

Existenci čtyřstěnu, jehož síť je na obr. 18, vyšetříme jako v případě I. Čtyřstěn vznikne právě tehdy, leží-li



Obr. 18

na kružnici k sestrojené nad průměrem MX bod Y, pro který platí $MY = a$, tj. platí-li

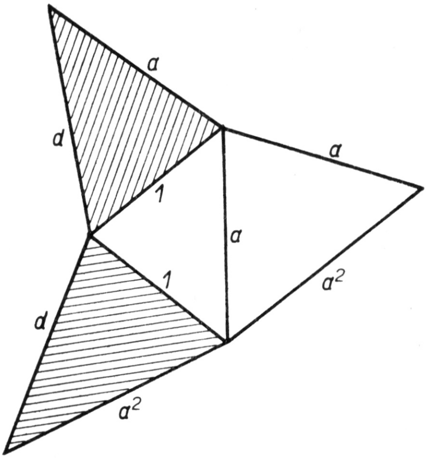
$$a < 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{4 - a^2}\,. \qquad (2)$$

Úpravou nerovnice (2) je

$$1 < a < \sqrt{2}, \qquad (3)$$

což je zúžení podmínky 1.

Případ B. Doplníme začátek sítě z obr. 16. Žádný z vyšrafovaných trojúhelníků na obr. 19 nemůže mít základnu 1 (jinak by měl vzhledem k podobnosti stěn rameno délky $r < 1$, což není možné, protože nejkratší hrana má délku 1). Proto je $d = 1$, $a^2 = d = 1$, tj. $a = 1$; to je však ve sporu s předpokladem $a > 1$. Případ B nemůže tedy nastat.



Obr. 19

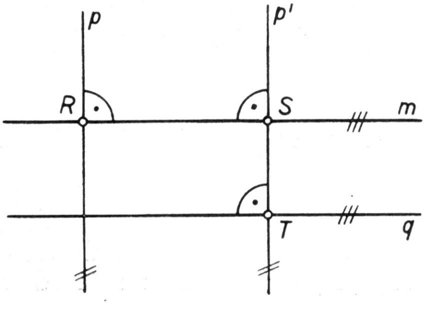
ZÁVĚR. Existuje jen jediný typ hledaných čtyřstěnů. Jeho síť je na obr. 15, kde je $a \geqq 1$, nebo na obr. 18, kde je $1 < a < \sqrt{2}$. V obou případech jsou všechny čtyři stěny čtyřstěnu shodné trojúhelníky.

6. V rovině jsou dány dvě navzájem kolmé přímky p, q a bod S, který neleží na žádné z nich. K libovolnému trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník $A_1B_1C_1$ s ním sdružený podle přímky p, k trojúhelníku $A_1B_1C_1$ sestrojíme trojúhelník $A_2B_2C_2$ s ním sdružený podle středu S a k trojúhelníku $A_2B_2C_2$ trojúhelník s ním sdružený podle přímky q. Dokažte, že trojúhelník $A_3B_3C_3$ můžeme dostat posunutím trojúhelníka ABC.

KOMENTÁŘ. Úloha je snadným příkladem na skládání zobrazení. Impuls: V podstatě lze postupovat dvojím způsobem: 1. „*ryze geometricky*“ tak, že rozložíme souměrnost podle středu S ve dvě souměrnosti podle os rovnoběžných s přímkami p, q; 2. *analyticky* — metodou souřadnic — tak, že zvolíme přímky p, q za osy souřadnic, vyjádříme analyticky všechna tři zobrazení a jejich složení provedeme výpočtem. Při prvním způsobu řešení je třeba dokázat rozklad středové souměrnosti ve dvě osové souměrnosti s osami navzájem kolmými. Tato věta a věta o skládání dvou souměrností s rovnoběžnými osami v translaci je vám snad známa. Je ovšem také třeba zdůraznit, že obráceně složením každých dvou souměrností s navzájem kolmými osami vznikne souměrnost podle středu. Pak už jde řešení hladce. Metoda souřadnic (p je osa y, q je osa x) vede k tomuto analytickému vyjádření souměrnosti:

$$x_1 = -x_0, \quad y_1 = y_0; \quad x_2 = 2k - x_1, \quad y_2 = 2m - y_1; \quad x_3 = x_2, \quad y_3 = -y_2. \tag{8}$$

Přitom x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 jsou *proměnné* souřadnice vzorů a obrazů; k, m jsou *konstantní* souřadnice bodu

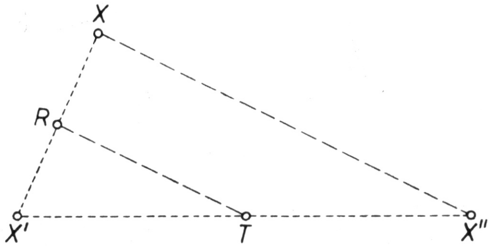


Obr. 20

S. Složením všech tří zobrazení (postupným dosazením v (8)) vyjde $x_3 = x_0 + 2k$, $y_3 = y_0 - 2m$, což je analytické vyjádření posunutí čili vektoru $(2k; -2m)$.

ŘEŠENÍ. a) Souměrnost podle středu S se dá složit ze souměrnosti podle přímky m kolmé k p vedené bodem S a přímky p' rovnoběžné s p vedené bodem S (obr. 20). Ale souměrnosti podle přímek p, m navzájem kolmých skládají souměrnost podle středu R, který je průsečíkem přímek p, m. Souměrnost podle přímky p' a souměrnost podle přímky q ($p' \perp q$) však skládají souměrnost podle středu T, který je průsečíkem přímek p, q.

b) Trojúhelník $A_3B_3C_3$ můžeme tedy sestrojit takto: Sestrojíme nejprve trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle středu R a pak trojúhelník $A''B''C''$ souměrně sdružený s $\triangle A'B'C'$ podle středu T; zřejmě trojúhelníky $A''B''C''$ a $A_3B_3C_3$ splynou.

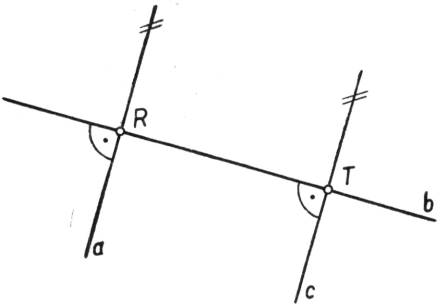


Obr. 21

Je-li X' bod souměrně sdružený s libovolným bodem X podle středu R a X'' bod souměrně sdružený s X' podle středu T, vznikne X'' posunutím bodu X ve směru RT, ve smyslu RT; velikost posunutí XX'' je $2RT$. Toto tvrzení je zřejmé z vlastnosti střední příčky trojúhelníka $XX'X''$, jak ukazuje obr. 21, ale dá se snadno dokázat i v případě, že body R, T, X, X', X'' leží v přímce (viz např. obr. 22, $XX'' = XX' + X'X'' = 2RX' + 2TX' =$

Obr. 22

$= 2RT$). Jinak se dá toto tvrzení dokázat rozložením souměrností podle středů R, T v souměrnosti podle os a, b, b, c (viz obr. 23).

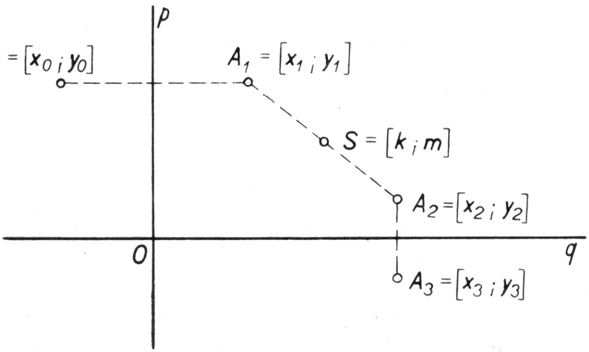


Obr. 23

JINÉ ŘEŠENÍ. Zvolme p, q přímky za osy kartézských souřadnic. Bod S nechť má souřadnice $[k, m]$, bod A souřadnice $[x, y]$, bod A_1 souřadnice $[x_1; y_1]$, bod A_2 souřadnice $[x_2; y_2]$, bod A_3 souřadnice $[x_3; y_3]$ (obr. 24). Podle formule pro souřadnice středu úsečky je $x_1 = -x_0$, $y_1 = y_0$; $x_2 = 2k - x_1$, $y_2 = 2m - y_1$; $x_3 = x_2$, $y_3 = -y_2$. Postupným dosazením dostaneme

$$x_3 = x_0 + 2k, \quad y_3 = y_0 - 2m.$$

Bod A_3 vznikne z A posunutím daným počátkem souřadnic a bodem $[2k, -2m]$. Totéž platí pro body B_3, B a C_3, C.



Obr. 24

3. KOMENTÁŘE A ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Je dán zlomek

$$V = \frac{a^2 - ab - ac + bc}{a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd}.$$

Určete, pro která čísla a, b, c, d

a) ztrácí tento zlomek smysl, a pak ho zkraťte;
b) je daný zlomek rovný nule;
c) je daný zlomek kladný, popř. záporný.

KOMENTÁŘ. První soutěžní úloha je typická rutinní úloha. První její otázka se týká určení tzv. maximálního definičního oboru dané funkce V o čtyřech proměnných a zjednodušení dané funkce; je to úloha na **postupné vytýkání.** Připomeňme si, že každý zápis rovnosti dvou výrazů *s proměnnými* je třeba doplnit údajem, pro které hodnoty proměnných rovnost platí (jde tedy vlastně o rovnici); např.

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \text{pro všechna } x \neq 1.$$

Postupné vytýkání připomene třeba ukázka:

$$a^2 + ab - ac - bc = a(a + b) - c(a + b) = \\ = (a + b)(a - c). \tag{1}$$

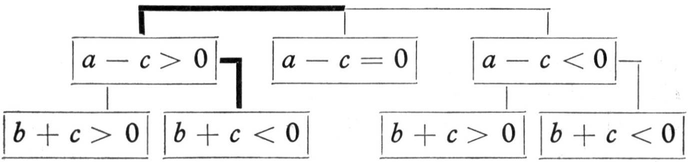
Vztah (1) platí pro všechna reálná čísla a, b, c.

Úlohy b) a c) se mohou řešit současně. Jde přitom o užití vět: Součin (podíl) je kladný, právě když oba činitelé (dělenec a dělitel) jsou oba čísla kladná nebo oba čísla záporná — a obdobných dalších vět. Připomeňme si, že zde zlomková čára je znakem pro dělení — nejde o zlomky ve smyslu aritmetickém (uspořádané dvojice celých čísel), neboť a, b, c, d mohou být racionální a iracionální.

Podnětná ukázka pro vyšetřování je tato:

$$V = \frac{a^2 + ab - ac - bc}{ab + b^2 + ac + bc} = \frac{(a - c)(a + b)}{(b + c)(a + b)} = \frac{a - c}{b + c}. \tag{2}$$

Vztah (2) platí právě když $b \neq -c$, $a \neq -b$. Při vyšetřování, zda $V > 0$, $V = 0$, $V < 0$, tedy předpokládáme, že jsou tyto podmínky splněny, a užijeme schématu zvaného **strom:**



(3)

Ve schématu (3) je tlustě zakreslena jedna z pěti možných cest. Zkoumání zapíšeme přehledně takto:

- $a - c > 0,\ b + c > 0$ . . . . $V > 0$
- $a - c > 0,\ b + c < 0$ . . . . $V < 0$
- $a - c = 0$ . . . . $V = 0$
- $a - c < 0,\ b + c > 0$ . . . . $V < 0$
- $a - c < 0,\ b + c < 0$ . . . . $V > 0$

ŘEŠENÍ. Čitatele i jmenovatele daného zlomku vhodným vytýkáním rozložme v činitele:

$$a^2 - ab - ac + bc = a(a - b) - c(a - b) = (a - b) \,.\, (a - c)$$

$$\begin{aligned} a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd &= \\ = a^3 - a^2b - a^2c + abc - a^2d + abd + acd - bcd &= \\ = a^2(a - b) - ac(a - b) - ad(a - b) + cd(a - b) &= \\ = (a - b)[a^2 - ac - ad + cd] = (a - b)[a(a - c) &- \\ - d(a - c)] = (a - b)(a - c)(a - d) \,. \end{aligned}$$

Pro zlomek V tedy platí

$$V = \frac{(a - b)(a - c)}{(a - b)(a - c)(a - d)},$$

takže má smysl pro všechna taková čísla a, b, c, d, pro která je jmenovatel různý od nuly, tj. a musí být různé od každého z čísel b, c, d.

Za tohoto předpokladu lze daný zlomek V psát ve tvaru

$$V = \frac{1}{a - d}.$$

Odtud vidíme, že daný zlomek se nikdy nerovná nule; v případě $a > d$ je kladný, v případě $a < d$ záporný.

2. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou označeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtu ok na dvou protějších stěnách je vždy týž.

K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok byl a) maximální; b) minimální? (Za viditelné považujeme všechny stěny slepence, které nepřiléhají ke stolu.)

KOMENTÁŘ. Druhá úloha nepotřebuje téměř žádné matematické znalosti; je snadnou kombinací představivosti, jednoduchých úsudků, např. systematického výčtu všech možností apod. Je možno ji uvést jednodušší obměnou (dvě hrací kostky) a případ tří kostek řešit jako druhý.

Postup řešení se skládá asi z těchto částí:

zjištění, že součet počtů ok na dvou protějších stěnách je $7[1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, 21 : 3 = 7]$;

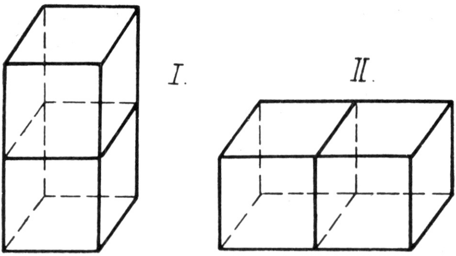
zjištění tvarů všech možných slepenců a jejich postavení;

roztřídění dvojic stěn krychlí slepence na dvojice, kde vidíme

α) obě stěny,

β) jedinou stěnu,

γ) žádnou stěnu.



Obr. 25

Úvodní úlohu s dvěma hracími kostkami řešíme takto: O součtu viditelných ok rozhodují jen dvojice stěn α, β. Dvě krychle tvoří vždy slepenec tvaru pravidelného hranolu čtyřbokého. Je-li kvádr položen na jednom čtverci, existují čtyři dvojice čtverců druhu α a jediný čtverec druhu β, je-li kvádr položen na dvou čtvercích, jsou čtyři čtverce druhu β. Celkem jsou tedy možné tyto případy (obr. 25):

	Počet dvojic stěn α	Součet ok	Počet dvojic stěn β	Součet ok
I. Kvádr spočívá na jednom čtverci	4	28	1	x
II. Kvádr spočívá na dvou čtvercích	2	14	4	y

Snadno zjistíme meze pro x a y. Je totiž $1 \leqq x \leqq 6$, $6 \leqq y \leqq 22$; viditelné stěny obsahují totiž v případě II **aspoň** $2 \,.\, 1 + 2 \,.\, 2 = 6$ ok a **nejvýše** $2 \,.\, 5 + 2 \,.\, 6 = 22$ ok. Pro celkový součet ok tedy platí:
v případě I

$$29 \leqq 28 + x \leqq 34\,, \tag{1}$$

v případě II

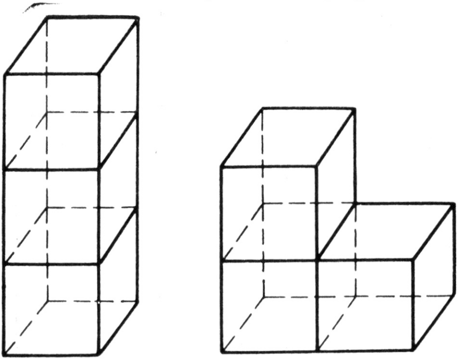
$$20 \leqq 14 + y \leqq 36\,. \tag{2}$$

Z nerovnic (1) a (2) vyplývá, že minima i maxima dosáhneme v případě II; počty ok jsou 20 a 36.

Je samozřejmé, že nemusíme zapisovat odhady nerovnicemi (1) a (2), ale můžeme prostě v každém z případů I, II stanovit výpočtem horní a dolní mez počtu viditelných ok.

V případě tří kostek vzniknou **dva tvary** slepenců (obr. 26), u každého z nich je třeba uvážit různé jeho polohy.

ŘEŠENÍ. Jsou možné dva různé tvary slepence a celkem pět možností, jak tyto útvary postavit na stůl;

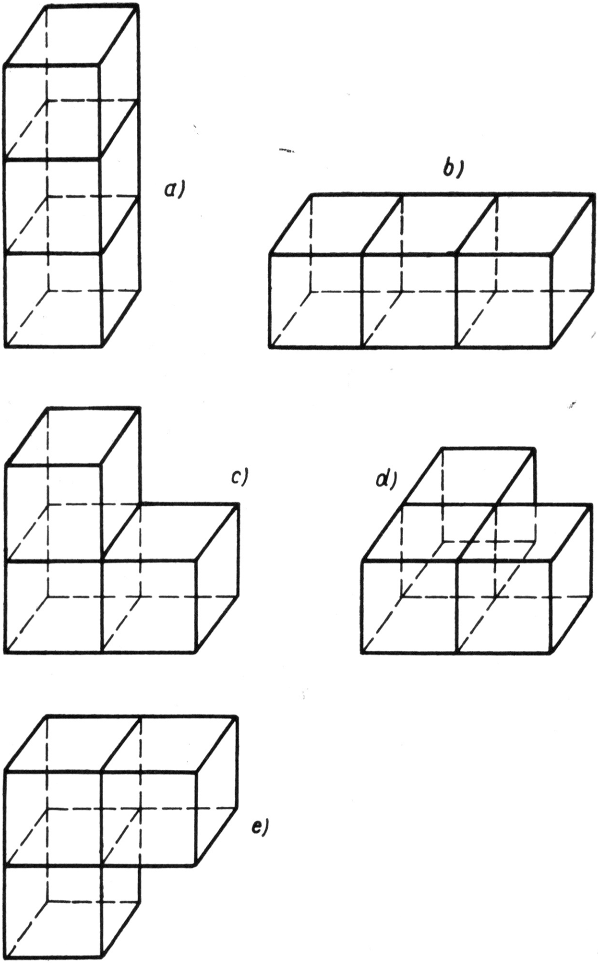


Obr. 26

těchto pět možností je znázorněno na obr. 27. Prozkoumáme-li největší, resp. nejmenší možný počet viditelných ok u jednotlivých soustav, docházíme k závěru, že největší počet viditelných ok může být 52 (u sestavy podle obr. 27e) a nejmenší 26 (podle obr. 27d).

3. Je dán trojúhelník ABC o stranách $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 8$ cm. Vepište mu kružnici k a na kružnici k sestrojte všechny body X této vlastnosti: Přímka p rovnoběžná s AC vedená bodem X protíná strany AB, BC po řadě v takových bodech Y a Z, že X je středem úsečky YZ.

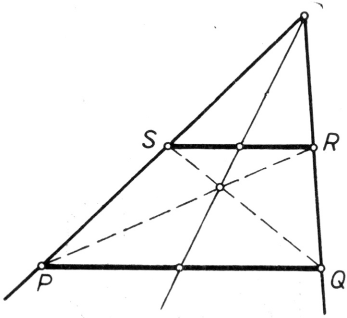
KOMENTÁŘ. Třetí úloha je snadná typová konstrukční úloha. Hledaný bod X náleží dvěma množinám bodů:



Obr. 27

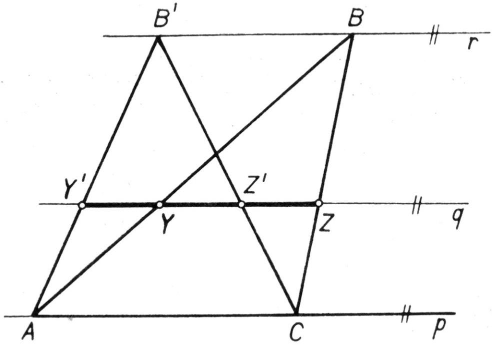
kružnici k a množině **M** středů všech úseček $YZ \parallel AC$, jejichž krajní body Y, Z leží po řadě na stranách AB, BC. Úvodem do této úlohy by mohlo být, že bychom kružnici k nahradili přímkou, úsečkou nebo jinou kružnicí. Takto obměněná úloha může být složitější než úloha soutěžní, neboť při diskusi se může objevit i případ s jediným řešením nebo případ neřešitelný. Naproti tomu soutěžní úloha má vždy právě dvě řešení, což je třeba ovšem dokázat.

Klíčem k řešení úlohy je vyšetření množiny **M**. Experimentálně se zjistí, že **M** je těžnice BB_0, kde B_0 značí střed strany AC. Tento experimentálně zjištěný fakt se musí dokázat. Jde v podstatě o tzv. **harmonickou vlastnost lichoběžníka:** Je-li $PQRS$ lichoběžník se základnami PQ, RS, pak spojnice průsečíků $PR \cap QS$ a $PS \cap QR$ půlí každou z obou základen (obr. 28). Známe-li tuto větu, můžeme z ní vyjít. Jinak si ji můžeme dokázat takto:



Obr. 28

Harmonická vlastnost lichoběžníka se dokazuje obyčejně pomocí stejnolehlosti, ale je obecně známo, že každý důkaz opírající se o podobnost lze převést na důkaz založený na obsazích obrazců (trojúhelníků); tato druhá cesta je intuitivnější a přístupnější. V našem případě by mohla být východiskem věta o situaci načrtnutá na obr. 29. Zde jsou p, q, r tři rovnoběžky, $\triangle ACB'$ je rovnoramenný se základnou AC. Pomocí obsahů nejprve dokážeme sporem, že platí



Obr. 29

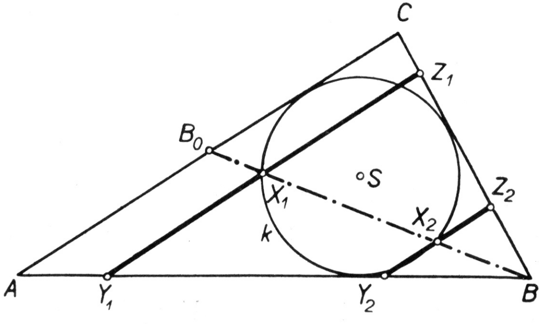
$$YZ = Y'Z'. \tag{1}$$

Předpokládejme, že je např. $Y'Z' > YZ$; pak platí pro obsahy trojúhelníků a lichoběžníků:

$$⏢ ACZY < ⏢ ACZ'Y',$$

$$\triangle YZB < \triangle Y'Z'B'.$$

Sečtením předchozích vztahů vyplyne



Obr. 30

$$\triangle ACB < \triangle ACB',$$

což je ve sporu s předpokladem $r \| p$.

Nyní stačí na obr. 29 přikreslit body X, X' jako průsečíky přímky q a těžnic BB_0, $B'B_0$ (B_0 je střed strany AC). Použitím předchozí věty, tj. vztahu (1), dostaneme

$$XY = X'Y' = X'Z' = XZ.$$

ŘEŠENÍ (obr. 30). Množina středů všech úseček rovnoběžných se stranou AC, jejichž krajní body leží na stranách AB, BC, je vnitřek těžnice BB_0 a bod B_0. Hledané body X jsou dva: jsou to průsečíky kružnice k s těžnicí BB_0.

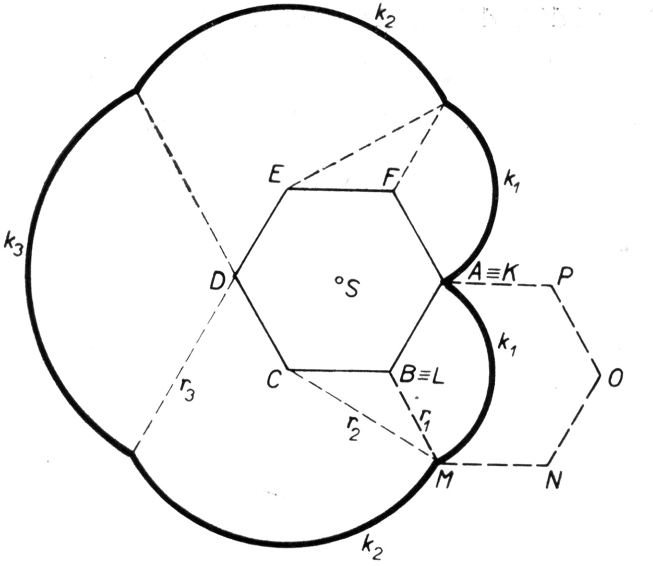
4. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky $ABCDEF$ a $KLMNOP$, které mají společnou stranu ($A = K$, $B = L$).

a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol K šestiúhelníka $KLMNOP$, který se kotálí vně po obvodu šestiúhelníka $ABCDEF$.

b) Vypočtěte délku této dráhy.

KOMENTÁŘ. Čtvrtá úloha v podstatě nepotřebuje návod. Navazuje na přípravnou úlohu 3 kategorie Z. Je to konstrukčně početní úloha. Dráha bodu K se skládá z pěti oblouků kružnic tří různých poloměrů. Nanejvýš snad je třeba připomenout, že musíme určit středy i poloměry kružnic, po nichž se bod K pohybuje, a dále velikosti středových úhlů pro příslušné oblouky. Narýsujeme si opět šestiúhelník $ABCDEF$, vystřihneme si z kreslicí čtvrtky šestiúhelník $KLMNOP$ a na tomto modelu si skutečně provedeme kotálení druhého šestiúhelníka.

ŘEŠENÍ. Dráha bodu K se skládá z pěti kružnicových oblouků, jak je naznačeno na obr. 31; k_1, k_2, k_3 značí délky příslušných oblouků. Každému z pěti oblouků odpovídá středový úhel velikosti 120°. Označíme-li a



Obr. 31

délku strany daného šestiúhelníka, budou příslušné poloměry

$$r_1 = a\,, \quad r_2 = a\sqrt{3}\,, \quad r_3 = 2a\,.$$

Je tedy

$$k_1 = \frac{2\pi r_1}{3} = \frac{2}{3}\pi a\,,$$

$$k_2 = \frac{2\pi r_2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.\,\pi a\,,$$

$$k_3 = \frac{2\pi r_3}{3} = \frac{4}{3}\pi a\,.$$

Celková délka dráhy bodu K je tedy

$$d = 2k_1 + 2k_2 + k_3 = \frac{4}{3}\pi a(2 + \sqrt{3})\,.$$

Je-li např. $a = 4$ cm, vychází $d \doteq 62{,}3$ cm.