19. ročník matematické olympiády

VI. Zpráva o XII. mezinárodní matematické olympiádě

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 19. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1969/1970. 12. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. pp. 143–161.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404602

VI. Zpráva o XII. mezinárodní matematické olympiádě

1. ORGANIZACE A PRŮBĚH SOUTĚŽE

Tato soutěž pro žáky středních škol se konala ve dnech 9. až 21. července 1970 z větší části v městě *Keszthely* u Balatonu v MLR. Zúčastnilo se jí z pozvaných 17 států jen 14; *Itálie* odřekla pro nevyhovující časový termín, *Belgie* a *Finsko* pro nepřipravenost. Vedoucí delegací, kteří s pracovníky pořadatelské země tvoří mezinárodní jury, se sjeli dne 8. 7. 1970 v Budapešti, odkud příští den ráno odjeli autobusem do lázeňského městečka *Hévizu*; zde se po čtyři dni věnovali vybírání soutěžních úloh a přípravě soutěže. Mezinárodní jury předsedal na těchto jednáních *akademik G. Hajós*, který se však pro nemoc neúčastnil závěru soutěže; zastupoval jej *prof. J. Surányi*, který byl předsedou přípravného výboru. Řízení schůzí se zúčastnil i dlouholetý pracovník mezinárodních matematických olympiád a hlavní sekretář přípravného výboru *prof. E. Hódi*.

Soutěžní úlohy se vybíraly z 12 úloh, které ze zaslaných návrhů předem připravil přípravný výbor a ke kterým připojil i stručná řešení. Jednání začalo oficiálně 9. 7. o 16. hodině.

Akademik G. Hajós vzpomněl zesnulého spoluzakladatele mezinárodních matematických olympiád *Rudolfa*

Zelinky. Pak byly rozdány návrhy soutěžních úloh; jako obvykle měli delegáti poměrně málo času na prostudování úloh (možností různých řešení) a tak se stalo, že vybrané úlohy nebyly právě nejvhodnější a také jejich ohodnocení body nebylo zcela přiléhavé. Témata úloh byla z tradiční středoškolské matematiky, což nevyhovovalo zejména západním státům. Nesmírné potíže působila formulace textů. Když byl konečně stanoven definitivní text ve čtyřech jednacích jazycích (angličtina, francouzština, němčina a ruština), přeložili jej delegáti do národních jazyků a připravili jako obvykle obálky s texty úloh pro oba dny soutěže (viz přílohu).

Na vypracování každé práce byly stanoveny jako obvykle 4 hodiny čistého času. Delegátům ani žákům nebyly předem oznámeny zásady a požadavky, které budou uplatňovat maďarští koordinátoři při sjednocování klasifikace řešení, což se stalo později předmětem řady nedorozumění. Žáci také neznali bodové hodnocení úloh.

Družstva jednotlivých států se sjížděla se zástupci vedoucích v Budapešti během 10. července. Po přenocování v internátu — hotelu Universitas odcestovali 11. 7. do Keszthely, kde byli ubytováni v internátě — hotelu Juventus a měli téměř dva dni volné na rekreaci a koupání v Balatonu; počasí bylo překrásné.

Vlastní soutěž probíhala v *Keszthely* dne 13. a 14. července. *Slavnostní zahájení* se konalo v aule *Vysoké školy zemědělské* (nejstarší v Evropě, založené r. 1779). Promluvil vedoucí odboru ministerstva školství MLR *Miklósvary Sándor* a *prof. J. Surányi*. Zahájení se zúčastnili vedoucí delegací, kteří přijeli ráno autobusem z *Hévizu* (vzdálenost je jen asi 6 km). Také druhý den soutěže byli přítomni vedoucí delegací na začátku soutěže; po oba dni jim byl povolen asi na 5 minut vstup do sálů, kde žáci pracovali; proti tomu vznášela jak maďarská strana, tak i někteří členové jury námitky. Teprve dne 14. 7. se přestěhovali delegáti z *Hévizu* do *Keszthely*, kde byli ubytováni v témž internátě jako žáci. Tím skončila izolace delegátů od žáků i jejich pedagogických průvodců. Toto řešení se ukázalo nevýhodné, neboť delegáti tu neměli dosti klidu pro opravování úloh a pro koordinování. Proti původnímu plánu byl na korektury vyhrazen jen jeden půlden (!), takže se opravovalo 14. 7. až do 2. hodiny noční. Naproti tomu pro koordinaci oprav byly stanoveny dva dni (15. a 16. 7.).

Koordinace byla značně ostrá; nejvíce se ohrazovali delegáti proti tomu, že žákům byly ubírány až dva body za to, že výslovně neuvedli triviální úsudky a věty a že o tomto požadavku nebyli předem informováni ani oni, ani opravující delegáti. Večer 15. 7. uspořádal župní výbor v Keszthely *recepci* pro delegáty i žáky, promluvil na ní předseda župního výboru *Bask Sándor*. Dne 16. 7. byla dokončena koordinace oprav zbývajících úloh; čs. delegát mimoto musel koordinovat 4. úlohu domácího maďarského družstva a byl přizván ke koordinování 4. úlohy (čs. původu) k jiným družstvům, kde vznikly rozpory. Žáci byli bez programu, neboť počasí se velmi zhoršilo a plánované koupání v Balatonu i hry odpadly. V pátek 17. 7. za chladného, větrného a deštivého počasí podnikli všichni účastníci XII. MMO dvěma motorovými loďmi po rozbouřeném Balatonu výlet do *Badacsony*, který se přesto celkem vydařil. V těchto dnech si vyměnily delegace tradiční upomínkové dárky.

Mimo společné exkurze se žáky měli delegáti samostatnou exkurzi dne 13. 7. Prohlédli si krásný kostel v *Sümegu* i zříceniny stejnojmenného hradu. Po silnici pocházející z římských dob dojeli do *Sarvaly*, kde v krásném prostředí v myslivně poobědvali. Pak navštívili krasovou jeskyni v *Tapolce* a po koupání v Balatoně se vrátili do *Hévizu*.

Bouřlivá a dlouhá byla obě poslední zasedání jury dne 18. 7.; závěrečné zasedání skončilo až ve 23.15 h. Obtížné bylo zejména stanovit hranice pro I., II. a III. cenu (nakonec se určily hranice 37, 30 a 19 z dosažitelných 40 bodů pro žáka). Dále byla obtížná úloha rozhodnout o udělení zvláštních cen za vynikající řešení. Byly ustaveny zvláštní komise, ale při rozhodování se návrhy komise pro 4. úlohu znovu přezkoumávaly. Ukázalo se nakonec, že 1., 2. a 5. úloha neposkytovaly žádnou příležitost k elegantnímu řešení, 3. úloha byla příliš obtížná a nevhodná. 6. úloha obtížná, ale vhodná. Nejvíce bylo diskusí kolem 4. úlohy. Výsledek jednání byl tento: byla udělena jedna zvláštní cena za 3. úlohu, 4 zvláštní ceny za 4. úlohu (mezi nimi jedna čs. účastníku Černému) a 2 zvláštní ceny za 6. úlohu. V *závěru* zasedání přednesl čs. delegát na základě písemného příslibu obou ministerstev školství ČSSR *pozvání* na XIII. MMO do ČSSR na rok 1971. Zároveň rozdal všem přítomným delegátům *návrh nového statutu*, podle kterého má být XIII. MMO organizována. V živé diskusi, která se rozvinula v nočních hodinách, se ukázalo, že bude třeba poslat všem účastnickým zemím XII. MMO, ale i Belgii, Finsku a Itálii nový, podrobnější vysvětlující dopis o nové koncepci olympiád, zejména o volitelnosti úloh. Je třeba podotknout, že mezinárodní jury jednohlasně přijala *pozvání ČSSR* a celkem se vyslovila kladně k chystaným změnám; definitivní stanovisko k návrhu statutu měly sdělit jednotlivé země pořadatelské zemi (tj. ČSSR) do 31. 10. 1970.

Dne 19. 7. se přemístili všichni účastníci vlakem (Balaton-expresem) do *Budapešti* a ubytovali se všichni v internátě — hotelu Universitas. 20. 7. ráno byla prohlídka města pro delegáty, jejich zástupce i žáky, večer byla velmi působivá projížďka osvětlenou Budapeští (zejména *Margitin ostrov* s vodotryskem, *Buda*, královský zámek a citadela se sochou Svobody). Jinak bylo dne 20. 7. i 21. 7. (až do 16 h) volno na procházky a nákupy.

V 16 hod. uspořádal v technické universitě náměstek ministra školství *Lugossy Jenö* malou recepci pro delegáty a pak následovala závěrečná slavnost za přítomnosti všech účastníků (anglické družstvo se však nezúčastnilo, neboť předčasně odjelo) XII. MMO a dalších hostí. Zahájil ji *prof. Surányi*, promluvil náměstek ministra, který zdůraznil společenský význam olympiád pro porozumění mezi národy a upevňování míru. Pak osobně rozdal *diplomy* (ceny) vítězům; každý účastník dostal upomínkovou obrazovou publikaci. Za delegáty pak poděkoval vedoucí čs. družstva, připomněl význam vědecké analýzy matematického nadání pro současnou společnost i pokrokové ideje *J. Á. Komenského* o demokratizaci vzdělání, které realizují zejména socialistické státy. V závěru opakoval pozvání všech účastnických zemí do ČSSR na XIII. MMO.

Večer 21. 7. se konala *společná večeře* všech účastníků, která vyzněla v opravdu přátelskou besedu mezi delegáty, jejich zástupci i žáky.

Ráno dne 22. 7. se počaly delegace rozjíždět. Jako jedna z prvních odjela v 7.50 h. rychlíkem Hungaria čs. delegace; 22. 7. večer byli už všichni čs. účastníci XII. MMO ve svých domovech.

Při celkovém hodnocení je třeba uznat, že soutěž byla dobře připravena, a to po stránce odborné i společenské. Zároveň se však ukázalo, že mají-li se MMO udržet, bude asi třeba připustit volitelné úlohy, neboť koncepce školské matematiky se v mnoha zemích velmi rozcházejí.

Pokud jde o výsledky družstev, dává neoficiální „žebříček“ toto *pořadí zemí* (v závorce jsou počty dosažených bodů):

1. Maďarsko (233), 2. a 3. SSSR a NDR (221), 4. Jugoslávie (209), 5. Rumunsko (208), 6. Velká Británie (180),

7. a 8. Bulharsko a ČSSR (145), 9. Francie (141), 10. Švédsko (110), 11. Polsko (105), 12. Rakousko (104), 13. Holandsko (87), 14. Mongolsko (58).

Celkem bylo uděleno 65 cen, a to 7 prvních, 11 druhých, 40 třetích a 7 zvláštních. Rozdělení cen mezi jednotlivé státy ukazuje tabulka 1 (státy jsou označeny mezinárodními zkratkami a uvedeny abecedně):

Tabulka č. 1

Stát Cena	A	BG	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
I.	–	–	–	1	–	1	3	–	–	–	–	–	2	–
II.	–	–	–	2	1	–	1	–	–	–	3	–	1	3
III.	1	3	4	4	4	6	3	1	1	1	4	2	3	3

Z bývalé „silné pětky“ se stala „silná šestka“: patří do ní tyto státy: NDR, GB, H, R, SU, YU. Československo vede s Bulharskem slabší skupinu (všimněte si rozdílu počtu bodů mezi V. Británií a ČSSR!). Státy silné šestky mají lépe připravené žáky. Z rozhovoru s delegáty je patrné, že významnou roli hrají matematické školy (nikoli *třídy*), kde v učebním plánu je 10 hodin matematiky i více a kde vyučují hlavně vysokoškolští učitelé. Takovéto školy už zavádí i Bulharsko. Pro nás z toho vyplývá jednoznačné poučení: zřídit v ČSR i SSR aspoň po jedné matematické škole, a to co nejdříve.

Tabulka 2 výsledků našeho družstva ukazuje jasně, že máme nadějné talenty mezi mladšími žáky, ale že se tito žáci nemohou rozvinout, neboť úroveň vyučování je i v tzv. speciálních třídách poměrně nízká.

Tabulka č. 2

Číslo	Žák	Ročník Místo	Počet bodů dosažených v úloze						Součet počtu bodů	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1	Anton Černý	2 Bratislava	5	7	0	6	0	0	18	zvláštní
2	Miroslav Hradil	3 Praha	0	7	0	5	6	0	18	—
3	Helena Husová	2 Praha	1	7	0	4	4	5	21	III.
4	Pavel Pudlák	3 Praha	0	3	0	1	5	1	10	—
5	Štefan Sakáloš	2 Prievidza	5	7	0	4	6	0	22	III.
6	Rudolf Švarc	3 Plzeň	5	7	0	6	2	0	20	III.
7	Jiří Tůma	3 Písek	5	7	0	5	6	0	23	III.
8	Belo Zorkovský	Košice	5	3	0	5	0	0	13	—
Součet počtu bodů			26	48	0	36	29	6	145	

Pro úplnost uvádíme ještě seznam členů mezinárodní jury, tj. seznam těch účastníků, kteří měli právo hlasovací (bohužel se příliš často hlasovalo):

1. Akademik Hajós György, předseda
2. Prof. Surányi János, doktor Akademie, místopředseda

Vedoucí delegací účastnických států:

3. Thomas Mühlgassner, prof. reál. gymnasia Eisenstadt, A
4. Kiril Dočev, docent mat. fakulty university v Sofii, BG
5. Jan Vyšín, docent mat.-fyz. fakulty UK v Praze, CS
6. Dr. hab. Helmut Bausch, Něm. akademie věd, NDR
7. André Warusfel, profesor lyceé Louis le Grand, Paříž, F
8. Dr. Bryan Twaites, Westfield College, London, GB
9. Hódi Endre, technický poradce Maď. optických závodů v Budapešti, H
10. Uržincerendijn Sanžimjatov, Mongolská státní universita v Ulánbátoru, M
11. Ary van Tooren, inspektor středních škol, Haag, NL
12. Andrzej Mąkowski, lektor Matematického ústavu university ve Varšavě, PL
13. Gleb Simionescu, ústřední inspektor min. školství v Bukurešti, R
14. Ake H. Samuelsoon, Matematický ústav university v Göteborgu, S
15. Michail Iljič Serov, Karelský pedagogický institut v Petrozavodsku, SU
16. Dr. Milenko Stekovic, profesor strojní fakulty university v Sarajevu, YU

2. *ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH*

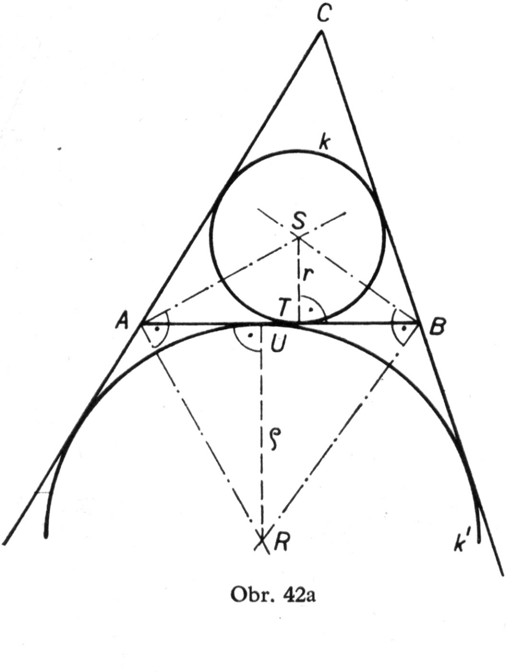
První den soutěže (13. července 1970)
(Doba určená pro vypracování jsou 4 hodiny)

1. Uvnitř strany AB trojúhelníka ABC je dán bod M. Označme r_1, r_2, r poloměry kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ACM, BCM, ABC. Označme dále ϱ_1, ϱ_2, ϱ poloměry kružnic, které jsou po řadě vně vepsány týmž trojúhelníkům a které leží v úhlu $\sphericalangle ACB$. Dokažte, že platí

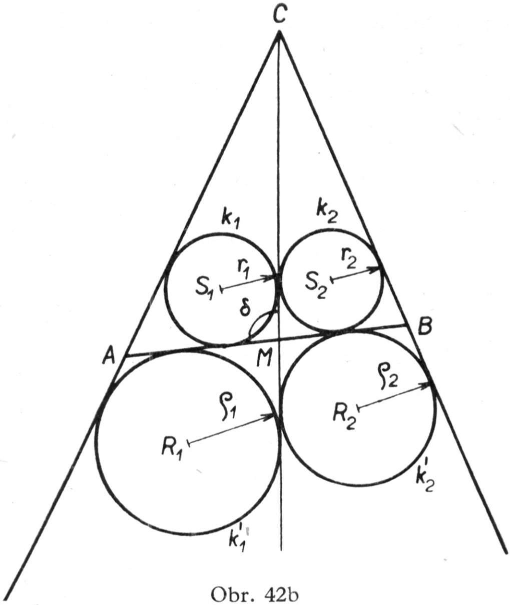
$$\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}.$$

(*Polsko*, 5 bodů)

ŘEŠENÍ. Situace je znázorněna na obr. 42 a,b. Při označení z obr. 42a dostaneme



Obr. 42a



Obr. 42b

$$AT = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \qquad BT = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2},$$

$$AU = \varrho \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \varrho \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$BU = \varrho \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \varrho \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Protože $AB = AT + BT = AU + BU$, je

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}}. \tag{1}$$

Vzorec (1) upravíme podle součtových vzorců pro sinus

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (2)$$

Označíme-li $\sphericalangle AMC = \delta$, je $\sphericalangle BMC = \pi - \delta$ a podle (2) vyjde

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \quad \frac{r_2}{\varrho_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\delta}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\,.\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}. \qquad (3)$$

Vynásobíme-li podle (3) a přihlédneme k (2), dostaneme výslednou formuli.

2. Buďte a, b, n přirozená čísla větší než 1. Čísla a, b jsou základy dvou číselných soustav. Čísla A_n, B_n mají totéž vyjádření

$$x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$$

v obou číselných soustavách o základech a, b; přitom
číslice
$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ jsou cifry a platí $x_{n-1} \neq 0$, $x_n \neq 0$. Čísla, která dostaneme z A_n, B_n vynecháním cifry x_n, označíme po řadě A_{n-1}, B_{n-1}.
číslice

Dokažte, že je $a > b$ právě tehdy, když platí

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}. \qquad (\textit{Rumunsko}, \text{7 bodů})$$

ŘEŠENÍ. K zapsání čísel A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1} užijeme polynomických funkcí. Označme

$$f(t) = x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \ldots + x_1 t + x_0\,,$$
$$g(t) = x_{n-1} t^{n-1} + x_{n-2} t^{n-2} + \ldots + x_1 t + x_0\,.$$

Je tedy

$$A_n = f(a), \quad B_n = f(b), \quad A_{n-1} = g(a),$$
$$B_{n-1} = g(b) \,. \tag{1}$$

Máme dokázat oboustrannou implikaci

$$a > b \Leftrightarrow \frac{g(a)}{f(a)} < \frac{g(b)}{f(b)} \,. \tag{2}$$

Protože pro $t > 0$ je $f(t) > 0$ a $g(t) > 0$, je i $f(a) > 0$, $g(a) > 0$. Důkaz implikace (2) je tedy ekvivalentní s důkazem implikace

$$a > b \Leftrightarrow g(a) f(b) - f(a) g(b) < 0 \,. \tag{3}$$

Důkaz může pokračovat takto:

Protože je $f(t) = g(t) + x_n t^n$, je

$$g(a) f(b) - f(a) g(b) = x_n(g(a) \,.\, b^n - g(b) \,.\, a^n) \,. \tag{4}$$

Dokážeme snadno, že pro každé $k < n$ platí pro $a > b > 0$

$$a^k b^n - b^k a^n < 0 \,.$$

Skutečně

$$a^k b^n - b^k a^n = a^k b^k (b^{n-k} - a^{n-k}) < 0 \,.$$

Z toho plyne, že $g(a) b^n - g(b) a^n < 0$ a podle (4) je věta dokázána.

3. Posloupnost reálných čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ splňuje podmínky

$$1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots \,. \tag{1}$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je definována vzorcem

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) . \frac{1}{\sqrt{a_k}} . \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

I. Dokažte, že pro všecka přirozená čísla n platí

$$0 \leqq b_n < 2 \,.$$

II. Je-li c číslo z intervalu $0 \leqq c < 2$, pak lze najít takovou posloupnost $\{a_n\}$ splňující podmínky (1), že v odpovídající posloupnosti $\{b_n\}$ platí $b_n > c$ pro nekonečně mnoho indexů n. Dokažte. (*Švédsko*, 8 bodů)

ŘEŠENÍ. I. Protože $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} \leqq 1$, je $b_n \geqq 0$ pro všecka n.

Označme $\sqrt{a_k} = \alpha_k$ a proveďme tuto úpravu

$$\left(1 - \frac{\alpha^2_{k-1}}{\alpha^2_k}\right) \frac{1}{\alpha_k} = \frac{\alpha^2_{k-1}}{\alpha_k} \left(\frac{1}{\alpha^2_{k-1}} - \frac{1}{\alpha^2_k}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2_{k-1}}{\alpha_k} \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\alpha_k}\right) . \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} + \frac{\alpha^2_{k-1}}{\alpha^2_k}\right) . \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) \leqq 2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right),$$

tedy pro každé přirozené číslo k platí

$$\left(1 - \frac{\alpha^2_{k-1}}{\alpha^2_k}\right) \frac{1}{\alpha_k} \leqq 2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $k = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme

$$b_n \leqq 2 . \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_n}\right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2 .$$

II. Zkusme zvolit za a_n rostoucí geometrickou posloupnost.

Zvolme číslo d, pro které platí $0 < d < 1$ a položme $\alpha_k = d^{-k}$, neboli $a_k = d^{-2k}$. Pak je

$$\left(1 - \frac{\alpha^2_{k-1}}{\alpha^2_k}\right) \frac{1}{\alpha_k} = \left(1 - \frac{d^{2-2k}}{d^{-2k}}\right) . \frac{1}{d^{-k}} = (1 - d^2) . d^k$$

a tedy

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - d^2)d^k = (1 - d^2) \sum_{k=1}^{n} d^k =$$

$$= (1 - d^2) \,.\, d \,.\, \frac{1 - d^n}{1 - d}$$

neboli

$$b_n = d(1 + d)(1 - d^n) \,. \qquad (1)$$

Je-li $0 \leqq c < 2$ a má-li platit $b_n > c$, musí být

$$d(1 + d)(1 - d^n) > c \,,$$

tj.

$$1 - d^n > \frac{c}{d(1 + d)} \,,$$

tj.

$$d^n < 1 - \frac{c}{d(1 + d)} \,. \qquad (2)$$

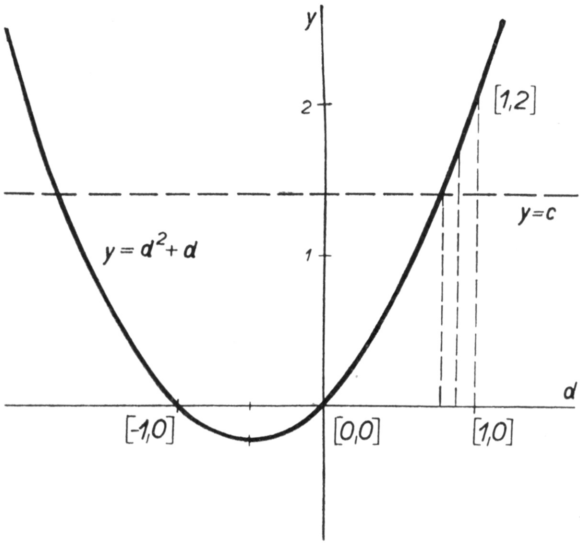
Je ještě třeba dokázat, že ke každému c z intervalu $0 \leqq c < 2$ lze zvolit takové d z intervalu $0 < d < 1$, že číslo $1 - \dfrac{c}{d(1 + d)}$ je kladné.

Podmínka $1 - \dfrac{c}{d(1 + d)} > 0$ je ekvivalentní s podmínkou $\dfrac{c}{d(1 + d)} < 1$ neboli s podmínkou

$$d^2 + d > c \,. \qquad (3)$$

Funkce $y = d^2 + d$ je znázorněna grafem na obr. 43. Tento graf je parabola, která protíná osu d v bodech $[-1; 0]$, $[0,0]$ a prochází bodem $[1; 2]$.

Z grafu je patrné, že pro každé $0 \leqq c < 2$ protíná přímka



Obr. 43

$y = c$ parabolu v bodě, jehož souřadnice d_1 je z intervalu $0 \leqq d < 1$. Je to číslo

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4c} - 1\right) < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4 \,.\, 2} - 1\right) = 1\,.$$

Zvolíme-li d tak, že $d_1 < d < 1$, je nerovnice (3) splněna a protože $\{d^n\}$ je nulová posloupnost, splňují všecky její členy od určitého počínaje nerovnost (2), tj. pro všecka příslušná n platí $b_n > c$.

Druhý den soutěže (14. července 1970)

(Doba určená pro vypracování je 4 hodiny)

4. Určete všecka přirozená čísla n, která mají tuto vlastnost: Množinu $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ lze rozložit ve dvě podmnožiny bez společného prvku tak, že součin všech prvků jedné z těchto podmnožin je roven součinu všech prvků druhé podmnožiny.

(ČSSR, 6 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme $\mathbf{E} = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ obě hledané podmnožiny. Zřejmě je $\mathbf{E}_1 \neq \emptyset$, $\mathbf{E}_2 \neq \emptyset$, $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \emptyset$, $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$. Žádná z podmnožin $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ není jednoprvková, neboť pro největší číslo z $\mathbf{E}$, tj. pro $n + 5$ platí

$$(n + 2)(n + 3) - (n + 5) =$$
$$= n^2 + 4n + 1 > 0 .$$

Lze tedy hovořit o součinu všech prvků $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$.

Budiž p prvočinitel čísla $a \in \mathbf{E}$; pak existuje aspoň jedno číslo $b \in \mathbf{E}$ $(b \neq a)$, jehož prvočinitelem je p. Protože $5 \geqq |a - b| = p \,.\, k$, je $p \leqq 5$, tj.

$$p \text{ je 2 nebo 3 nebo 5 .}$$

Je zřejmé, že 5 může být prvočinitelem jedině čísel n, $n + 5$ (jinak by $\mathbf{E}$ neobsahovala dva násobky pěti). Množina

$$\mathbf{F} = \{n+1, n+2, n+3, n+4\}$$

obsahuje tedy jedině čísla tvaru $2^\alpha 3^\beta$. Množina $\mathbf{F}$ však obsahuje zřejmě dvě čísla sudá a dvě lichá. Obě lichá čísla z $\mathbf{F}$ můžeme tedy napsat ve tvaru

$$3^\gamma, 3^\delta .$$

Avšak $|3^\gamma - 3^\delta| < 4$; protože $3^\gamma - 3^\delta$ je číslo sudé, je $|3^\gamma - 3^\delta| = 2$. Zvolíme-li označení tak, aby bylo $\gamma > \delta$, je

$$3^\gamma - 3^\delta = 3 \,.\, N = 2;$$

přitom N je přirozené číslo; to je však nemožné.

Úloha je tedy neřešitelná.

5. Pata E výšky DE čtyřstěnu $ABCD$ je průsečík výšek trojúhelníka ABC; dále je $BD \perp CD$.

Dokažte, že platí

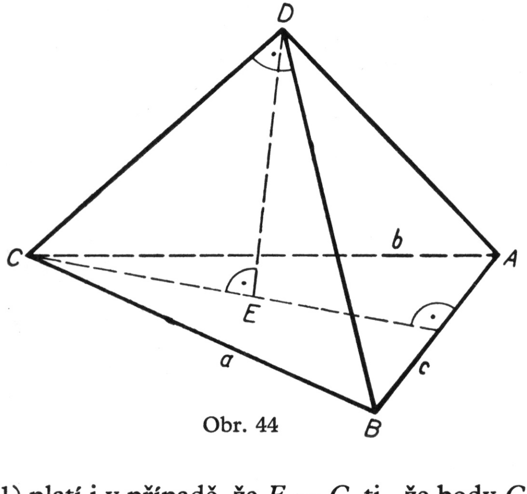
$$(AB + BC + CA)^2 \leqq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)\,.$$

Určete všecky čtyřstěny, pro které nastane v předchozím vztahu rovnost.

(*Bulharsko*, 6 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 44). Platí $(DE \perp AB) \wedge (CE \perp AB)$; proto $(CDE) \perp AB$ a odtud dále

$$CD \perp AB\,. \tag{1}$$



Obr. 44

Vztah (1) platí i v případě, že $E = C$, tj., že body C, D, E neurčují rovinu, neboť pak je $CD = DE$.

Protože $AB \perp CD$ podle (1) a $BD \perp CD$ podle předpokladu, je $(ABD) \perp CD$. Odtud plyne

$$CD \perp AD\,. \tag{2}$$

Protože v (1) i v předpokladu lze vyměnit body B, C, platí to i v (2), tj.

$$BD \perp AD\,.$$

Čtyřstěn $ABCD$ má tedy všecky tři stěnové úhly při vrcholu D pravé. Podle Pythagorovy věty (pro $\triangle ABD$, BCD, CAD) dostaneme

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

nebo při obvyklém označení stran $\triangle ABC$

$$6(AD^2 + BD^2 + CD^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)\,. \qquad (3)$$

Dále $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + {} + (b - c^2) + (c - a)^2$, tj. podle (3)

$$6(AD^2 + BD^2 + CD^2) =$$
$$= (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Odtud plyne tvrzení obsažené v textu úlohy. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

6. V rovině je dáno 100 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Vyšetřujeme všecky trojúhelníky, jejichž všecky tři vrcholy jsou některé z daných bodů.

Dokažte, že nejvýše 70 % všech těchto trojúhelníků jsou trojúhelníky ostroúhlé.

(*SSSR*, 8 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme $\mathbf{T}_n$ počet všech trojúhelníků, daných systémem n nekolineárních bodů, $\mathbf{O}_n$ počet všech ostroúhlých trojúhelníků daných týmž systémem.

Dokážeme lemmu

$$\mathbf{O}_n \leqq a\mathbf{T}_n \Rightarrow \mathbf{O}_{n+1} \leqq a\mathbf{T}_{n+1}\,.$$

Ze systému $n + 1$ bodů vynecháme po řadě 1., 2. až $(n + 1)$-tý bod; příslušné počty všech trojúhelníků (ostroúhlých trojúhelníků) v těchto $n + 1$ systémech o n bodech označíme $\mathbf{T}_{nk}$, $\mathbf{O}_{nk}(k = 1, 2, \ldots, n + 1)$.

Pak platí

$$\mathbf{T}_{n+1} = \frac{\mathbf{T}_{n1} + \mathbf{T}_{n2} + \ldots + \mathbf{T}_{n,\, n+1}}{n-2},$$

$$\mathbf{O}_{n+1} = \frac{\mathbf{O}_{n1} + \mathbf{O}_{n2} + \ldots + \mathbf{O}_{n,\, n+1}}{n-2}, \tag{1}$$

neboť každý trojúhelník (ostroúhlý trojúhelník) je zahrnut do $(n + 1) - 3 = n - 2$ systémů. Podle předpokladu platí $\mathbf{O}_n \leqq a\mathbf{T}_n$, speciálně

$$\mathbf{O}_{nk} \leqq a\mathbf{T}_{nk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n + 1 . \tag{2}$$

Dosadíme z (2) do druhého vzorce (1) a dostaneme

$$\mathbf{O}_{n+1} \leqq a \frac{\mathbf{T}_{n1} + \mathbf{T}_{n2} + \ldots + \mathbf{T}_{n,\, n+1}}{n-2} = a\mathbf{T}_{n+1} .$$

Tím je lemma dokázáno.

Protože je $\mathbf{T}_4 = 4$, $\mathbf{O}_4 \leqq 3$, $\dfrac{\mathbf{O}_4}{\mathbf{T}_4} \leqq 0{,}75$ tj. $a = 0{,}75$. Dále je $\mathbf{T}_5 = 10$, a teda podle lemmy $\mathbf{O}_5 \leqq$ $\leqq 0{,}75 \,.\, 10 = 7{,}5$, neboli $\mathbf{O}_5 \leqq 7$, $\dfrac{\mathbf{O}_5}{\mathbf{T}_5} \leqq 0{,}7$ čili 70 %, tj. $a \leqq 70\ \%$.

Indukcí se dokáže pro libovolné n (tedy také $n = 100$).