II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 + px + p} + \sqrt{x^2 - px + p} = x\,,$$

kde p je reálný parametr.

ŘEŠENÍ. Číslo x je reálný kořen dané rovnice tehdy a jenom tehdy, platí-li tyto vztahy:

$$x \geqq 0\,, \tag{1}$$

$$x^2 + px + p \geqq 0; \quad x^2 - px + p \geqq 0\,, \tag{2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + px + p} + \sqrt{x^2 - px + p}\right)^2 = x^2\,. \tag{3}$$

Rovnici (3) upravíme na ekvivalentní tvar

$$2\sqrt{x^2 + px + p}\,.\,\sqrt{x^2 - px + p} = -x^2 - 2p\,. \tag{3'}$$

Číslo x je reálný kořen dané rovnice tehdy a jenom tehdy, platí-li vztahy (1), (2) a dále

$$-x^2 - 2p \geqq 0\,, \quad \text{tj.} \quad x^2 + 2p \leqq 0\,, \tag{4}$$

$$\left(2\sqrt{x^2 + px + p}\,.\,\sqrt{x^2 - px + p}\right)^2 = \\ = (-x^2 - 2p)^2\,. \tag{5}$$

Rovnici (5) upravíme na ekvivalentní tvar

$$x^2[3x^2 - 4p(p - 1)] = 0\,. \tag{4'}$$

Z dané rovnice vidíme, že má kořen $x = 0$ tehdy a jenom tehdy, je-li parametr $p = 0$.

Nechť tedy v dalším je $p \neq 0$. Potom x je reálný kořen dané rovnice tehdy a jenom tehdy, platí-li vztahy (1), (2), (4) a rovnice

$$3x^2 - 4p(p-1) = 0\,,$$

tj.

$$x^2 = \frac{4}{3}p(p-1).$$

Vidíme, že musí být $p(p-1) \geqq 0$, tj.

$$p < 0 \quad \text{anebo} \quad p \geqq 1$$

($p = 0$ nyní neuvažujeme). Z (4) je ovšem vidět, že p nemůže být kladné, a tedy zbývá $p < 0$.

Tedy: Je-li $p \neq 0$, musí být $p < 0$ (jinak by rovnice neměla řešení) a x je reálný kořen právě když platí (1), (2), (4) a

$$x = 2\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}}\,. \tag{6}$$

Reálné číslo (6) splňuje nerovnost (1). Musíme tedy dále prozkoumat nerovnosti (2) a (4); dosadíme do nich za x číslo (6) (které jediné může být hledaným řešením). Přitom víme, že je $p < 0$. Z nerovnosti (4) plyne

$$\frac{4p(p-1)}{3} + 2p \leqq 0\,, \text{ tj. } \frac{2(p-1)}{3} + 1 \geqq 0\,,$$

dostáváme tedy omezení

$$-\frac{1}{2} \leqq p < 0\,.$$

Dále zkoumejme nerovnosti (2):

a) $x^2 + px + p \geqq 0$,

$$\frac{4p(p-1)}{3} + 2p\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + p \geqq 0\,,$$

$$\frac{4(p-1)}{3} + 2\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + 1 \leqq 0,$$

$$\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} \leqq \frac{1-4p}{6},$$

toto je ekv. s nerovnostmi

$$\frac{p(p-1)}{3} \leqq \left(\frac{1-4p}{6}\right)^2,$$

$$0 \leqq (2p+1)^2, \text{ a to platí.}$$

b) Druhá nerovnost (2) je $\qquad x^2 - px + p \geqq 0,$

$$\frac{4p(p-1)}{3} - 2p\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + p \geqq 0,$$

$$\frac{4(p-1)}{3} - 2\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} + 1 \leqq 0,$$

$$-\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}} \leqq \frac{1-4p}{6},$$

toto je splněno, neboť pro $-\frac{1}{2} \leqq p < 0$ je levá strana záporná, pravá kladná.

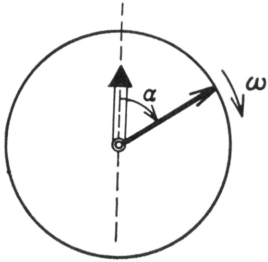
ZÁVĚR. Daná rovnice má reálný kořen tehdy a jenom tehdy, je-li $-\frac{1}{2} \leqq p \leqq 0$. Kořen x je jediný a platí

$$x = 2\sqrt{\frac{p(p-1)}{3}}.$$

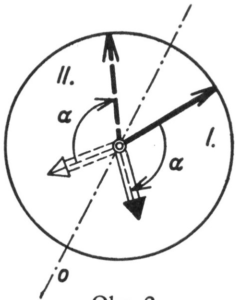
2. Zrkadlením na priemere ciferníka hodín prejdú ručičky do nových polôh, ktoré budú vo všeobecnosti v rozpore s mechanizmom hodín, t. j. nebudú ukazovať možný čas. (Napr. v okamžiku, keď je presne jedna hodina, bude zrkadlová poloha ručičiek vzhľadom na priemer 9—3 takáto: malá ručička je presne na 5-ke, veľká na 6-ke čiže neukazujú možný čas.)

Nájdite všetky tie časy (polohy ručičiek) a polohy osi súmernosti, kedy po zrkadlení vzniká možný čas.

RIEŠENIE. Problém sa zjednoduší, ak budeme sledovať pohyb veľkej ručičky vzhľadom na malú ručičku (obr. 1). Veľká ručička sa vzhľadom na malú otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou ω radiánov za hodinu (v zmysle pohybu hodinových ručičiek, ktorý sa väčšinou označuje ako záporný zmysel). Veľkosť tejto rýchlosti možno ľahko vypočítať — je to $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ radiánov za hodinu — ale pri ďalších výpočtoch nepotrebujeme túto jej veľkosť poznať. Ak sa ručičky na ciferníku budú kryť, potom sa budú kryť aj na obr. 1. Ak je na ciferníku uhlová vzdialenosť veľkej ručičky od malej meraná v zápornom zmysle α, potom bude tomu tak aj na obr. 1.

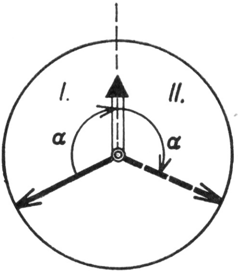


Obr. 1



Obr. 2

Nech sú I a II také stavy na ciferníku hodín (obr. 2), že existuje priemer ciferníka, podľa ktorého je stav I osove súmerný so stavom II (resp. stav II osove súmerný so stavom I). Pozorovateľovi, ktorý predpokladá, že malá ručička je v kľude, sa táto skutočnosť bude javiť tak ako na obr. 3. Obrátene platí: situácia z obr. 3 znamená, že existuje aspoň jeden priemer ciferníka, ktorý je osou súmernosti prevádzajúcej stav I do stavu II (resp. stav II do stavu I). Možno teda urobiť tento čiastkový záver: Ku každému stavu I na ciferníku hodín existuje aspoň jeden taký stav II na ciferníku, že existuje osová súmernosť podľa priemeru ciferníka, ktorá prevádza stav I do stavu II.



Obr. 3

Ak boli hodiny v čase t_1 hodín v stave I, potom v stave II sú v čase

$$t_{2k} = t_1 + \frac{2\alpha + 2k\pi}{\omega} \qquad (1)$$

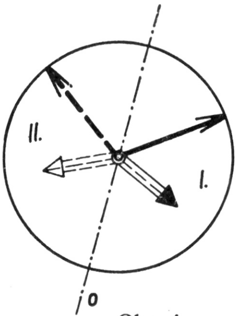
hodín, kde k je celé číslo, pretože do stavu II musí prejsť veľká ručička (pozri obr. 3) uhlovú dráhu $(2\alpha + 2k\pi)$ radiánov. Doby t_{2k} dané vzťahom (1), kde k je celé číslo, sú práve všetky doby, kedy existuje osová súmernosť požadovaná v texte úlohy. Príslušná os súmernosti sa určí ako priemer ciferníka, v ktorom je veľká ručička v čase

$$t_k = \frac{t_1 + t_{2k}}{2} = t_1 + \frac{\alpha + k\pi}{\omega},$$

čo sú, ako vidno z obr. 3, práve tie okamžiky, keď obe ručičky zvierajú uhol 0 alebo π radiánov, t. j. ležia v tom istom priemere ciferníka.

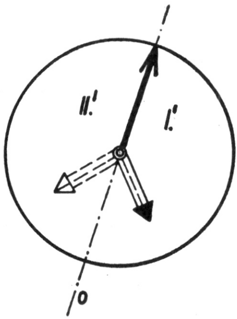
ZÁVER. Možný čas vzniká vždy práve vtedy, keď osou zrkadlenia je ciferníkový priemer, ktorý má tú vlastnosť, že mechanizmus hodín pripúšťa, aby obe ručičky súčasne ležali v tomto priemere.

JINÉ ŘEŠENÍ. Předpokládejme, že existují dva stavy I a II které jsou souměrně sdružené podle nějakého průměru o ciferníku (obr. 4). Představme si, že velká ručička, která je ve stavu I, se otočí o úhel α v kladném smyslu tak, aby ležela v ose o, a že velká ručička, která je ve stavu II, se otočí také o úhel α, ale v opačném smyslu (tj. v záporném). Malé ručičky se přitom pohybují v souhlase s mechanismem hodin. Potom dostaneme stavy I′ a II′, při nichž velké ručičky splývají na našem průměru o a polohy malých ručiček jsou opět souměrně sdruženy podle osy o (obr. 5).



Obr. 4

Poněvadž stavy I′ a II′ představují možné časy, musí po určité době, uplynulé od stavu I′, nastat stav II′. Z toho, že polohy velkých ručiček v I′ a II′ splývají, plyne, že tato doba je celý počet h hodin. Přitom ze symetrie I′ a II′ je vidět, že přesně za $\frac{h}{2}$ hodin od stavu I′ bude malá ručička na ose o. Jelikož $\frac{h}{2}$ je číslo buď celé, anebo celé $+ \frac{1}{2}$, bude velká ručička v té chvíli opět na ose o (buď se bude krýt s malou, anebo bude na opačné straně od ní).



Obr. 5

Tak jsme dokázali, že průměr o má tuto vlastnost: Existuje časový okamžik, v němž obě ručičky leží v ose o. Z předchozí úvahy však také plyne, že zrcadlový obraz každého možného stavu ručiček na hodinách podle takové osy o je opět stav, který mechanismus hodin připouští.

Nyní ještě můžeme určit počet os souměrnosti, které mají vlastnost požadovanou textem úlohy. Stačí jen najít ty průměry ciferníku, v nichž v souhlase s mechanismem hodin se ručičky v jistém okamžiku kryjí. Jestliže se totiž obě ručičky v některém okamžiku na jistém průměru kryjí, pak za 6 hodin budou ležet v témž průměru a svírat úhel π radiánů (a obráceně).

Jestliže se ručičky na ciferníku kryjí, pak se budou znovu krýt za

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi - \frac{\pi}{6}} = \frac{12}{11}\,(\mathrm{h}).$$

Podle obr. 1 je zřejmé, že uvažujeme-li pohyb velké ručičky vzhledem k malé, musí velká ručička od okamžiku, kdy se kryla s malou ručičkou ($\alpha = 0$), urazit úhlovou dráhu 2π radiánů, aby se za nejkratší možnou dobu opět kryly. Za 12 hodin nastane tedy krytí ručiček $\left(12 : \frac{12}{11}\right)$ krát, tj. 11 krát. Hledaných os je tedy 11.

3. V rovině ϱ jsou dány dvě neshodné úsečky AB, CD. Sestrojte všecky takové body X roviny ϱ, pro které platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$.

ŘEŠENÍ. Podle textu úlohy platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$, tj.

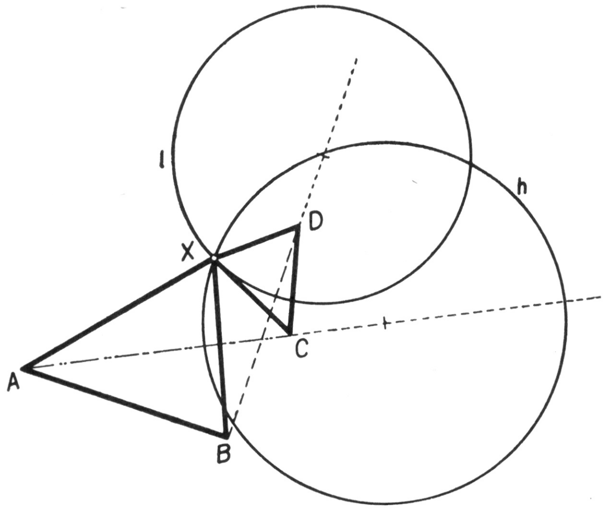
$$\frac{AX}{CX} = \frac{BX}{DX} = \frac{AB}{CD} \neq 1, \tag{1}$$

neboť úsečky AB a CD jsou neshodné. Ze vztahu (1) plyne, že bod X leží

(a) na Apolloniově kružnici h, která je množinou všech bodů Y roviny ϱ, pro něž platí $\dfrac{AY}{CY} = k$, kde $k = \dfrac{AB}{CD}$,

(b) na Apolloniově kružnici l, která je množinou všech bodů Z roviny ϱ, pro které platí $\dfrac{BZ}{DZ} = k$, kde $k = \dfrac{AB}{CD}$.

Z (a) a (b) plyne KONSTRUKCE: Bod X, existuje-li, je společným bodem kružnic h a l (obr. 6).



Obr. 6

Provedeme ZKOUŠKU. Z konstrukce vyplývá, že

$$\frac{AX}{CX} = k\,, \quad \frac{BX}{DX} = k\,, \quad \frac{AB}{CD} = k\,,$$

tj. skutečně $\triangle ABX \sim \triangle CDX$.

DISKUSE. Kružnice h a l lze sestrojit, právě když $A \neq C$ a $B \neq D$.

1. Je-li $A = C$ nebo $B = D$, potom nelze pro žádné X splnit (1), tj. úloha nemá řešení.

2. V případě $A \neq C$ a $B \neq D$ jsou řešením úlohy všechny takové body X, společné kružnicím h, l, pro které platí $X \notin AB$ a $X \notin CD$. (Pro $X \in AB$ nebo $X \in CD$ nevznikne $\triangle ABX$ nebo $\triangle CDX$.)

4. Určite všetky hodnoty parametra a, pre ktoré nemá rovnica

$$\sin^2 x = a \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \tag{1}$$

žiadny koreň.

RIEŠENIE. Podľa vzorca

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta$$

dostaneme

$$\sin^2 x = -\frac{a}{2}\left(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

čiže

$$\sin^2 x = -\frac{a}{2}\left(1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)$$

čiže

$$(a - 1)\sin^2 x = \frac{3a}{4}. \tag{2}$$

Rovnice (1) a (2) sú ekvivalentné. Ak je $a = 1$, je rovnica (2) neriešiteľná. Ak je $a \neq 1$, vyplýva z (2)

$$\sin^2 x = \frac{3a}{4(a-1)}. \tag{3}$$

Rovnica (3) je neriešiteľná práve vtedy, keď buď

a) čitateľ a menovateľ zlomku na pravej strane majú opačné znamienka, t. j. keď platí buď

$$a > 0\,, \quad a - 1 < 0 \tag{4}$$

alebo

$$a < 0\,, \quad a - 1 > 0 \tag{5}$$

alebo

b) čitateľ a menovateľ sú súhlasných znamienok, ale zlomok na pravej strane rovnice (3) je väčší než 1, t. j. práve vtedy keď

$$1 < a < 4\,.$$

Z nerovnosti (4) vyplýva $0 < a < 1$, nerovnosti (5) si odporujú.

ZÁVER. Daná rovnica je neriešiteľná práve vtedy, keď platí: $0 < a < 4$.

2. *KATEGORIE B*

1. Rok 1967 začal i končil nedělí. Která příští léta 20. století budou mít tutéž vlastnost?

ŘEŠENÍ. Nechť žádaná událost nastane r. $1967 + x$.

Rok 1968 je přestupný. V x letech, která následují po roce 1967 je y roků přestupných a $3y + z$ roků obyčejných; přitom z znamená některé z čísel 0, -1, -2, -3. Táž úvaha platí i pro záporné x. Je tedy

$$x = y + 3y + z = 4y + z\,.$$

V těchto letech je $366y + 365(3y + z) = 1461y + 365z$ dnů a toto číslo musí být násobek sedmi, takže

$$1461y + 365z = 7k\,,$$

kde k je celé číslo. Vynecháme-li násobky sedmi, dostaneme

$$5y + z = 7h\,,$$

kde h je opět celé číslo.

a) Pro $z = 0$ dostaneme $5y = 7h$ a tomu vyhovuje každé $y = 7u$, kde u je celé číslo. Pak je $x = 28u$.

b) Pro $z = -1$ vychází $5y - 1 = 7h$, odtud plyne $y = 7u + 3$, takže $x = 4(7u + 3) - 1 = 28u + 11$.

c) Pro $z = -2$ máme $5y - 2 = 7h$, z toho dostaneme $y = 7u + 6$ a $x = 4(7u + 6) - 2 = 28u + 22$.

d) Pro $z = -3$ je $5y - 3 = 7h$, takže $y = 7u + 2$, $x = 4(7u + 2) - 3 = 28u + 5$.

Řešení dávají formule a), b), c); formule d) řešení nedává, neboť vede k přestupným rokům, které sice končí nedělí, ale začínají sobotou. Nedělí začínají a končí následující roky tohoto století:

1905, 1911, 1922, 1933, 1939, 1950, 1961, 1967, 1978, 1989, 1995; řešením úlohy jsou tedy léta 1978, 1989 a 1995.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úlohu lze řešit postupem, který je vhodný i pro kategorii Z. Z rovností

$$365 = 7 \,.\, 52 + 1\,,$$
$$366 = 7 \,.\, 52 + 2$$

plyne, že nepřestupný rok končí týmž dnem v týdnu jako začal (např. začne-li nedělí, pak nedělí také skončí) a že přestupný rok končí dnem v týdnu bezprostředně následujícím po dni, kterým začal (např. začne-li nedělí, pak skončí v pondělí). K řešení si stačí sestavit tabulku tohoto typu:

Rok	1. I.	31. XII.
$\boxed{1967}$	Ne	Ne
1968	Po	Ú
1969	St	St
1970	Č	Č
1971	Pá	Pá
1972	So	Ne
1973	Po	Po
1974	Ú	Ú
1975	St	St
1976	Č	Pá
1977	So	So
$\boxed{1978}$	Ne	Ne
1979	Po	Po
⋮	⋮	⋮

Dokončíme-li tabulku až do roku 2 000, nalezneme další řešení a zjistíme, že vlastnost požadovanou v úloze mají jen roky 1978, 1989 a 1995.

Použitá metoda se však zřejmě příliš nehodí k řešení úloh tohoto typu, jestliže počet v úvahu přicházejících roků je dost velký.

2. Ak sú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladné čísla, potom platí

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n; \qquad (1)$$

dokážte.

RIEŠENIE. Pre $n = 1$ je veta evidentná. Ak je $n > 1$, rozlišujme dva prípady: a) n párne, b) n nepárne. V oboch prípadoch použijeme pomocnú vetu P.

P. Ak sú a, b dve kladné čísla, potom je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$.

DÔKAZ. Pre čísla a, b zrejme platí $(a - b)^2 \geqq 0$, z čoho máme $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$ čiže $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ a z toho vzhľadom na to, že čísla a, b sú podľa predpokladu kladné, vyplýva $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geqq 2$ čiže $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$, čo sme mali dokázať.

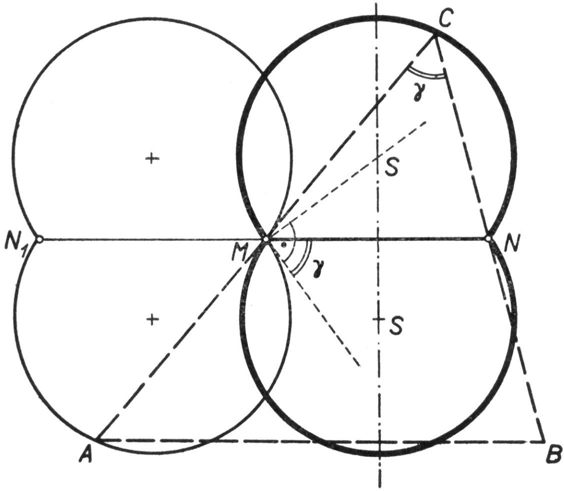
a) Ak je $n = 2m$ (m prirodzené), zoskupíme v (1) prvý a posledný člen, druhý a predposledný člen, atď. Dostaneme tak m dvojíc zlomkov takých, že súčet každej dvojice je podľa vety P väčší alebo rovný dvom. Súčet ľavej strany (1) je teda väčší alebo rovný číslu $2m = n$.

b) Ak je $n = 2m + 1$ (m prirodzené), postupujeme analogicky. Dostaneme tak m dvojíc zlomkov, z ktorých každá má súčet väčší alebo rovný dvom a okrem toho ešte jeden člen $\frac{x_{m+1}}{x_{m+1}} = 1$. Súčet ľavej strany (1) je teda v tomto prípade väčší alebo rovný číslu $2m + 1 = n$.

3. V rovine sú dané dva rôzne body M, N a veľkosť uhla γ ($0° < \gamma < 180°$). Trojuholník ABC má bod M za stred strany AC a bod N za stred strany BC. Ďalej platí $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Určite: a) množinu vrcholov C; b) množinu vrcholov A všetkých takých trojuholníkov ABC.

RIEŠENIE. a) Uhol $\sphericalangle MCN = \gamma$, t. j. podľa vety o obvodových uhloch ležia body C na dvoch kruhových oblúkoch, ktoré majú krajné body M, N a ktoré sú súmerne združené podľa priamky MN. Obrátene sa ľahko presvedčíme, že ku každému bodu C týchto dvoch oblúkov s výnimkou bodov M, N možno zostrojiť dva body A, B tak, že vznikne trojuholník ABC s uhlom $\sphericalangle ACB = \gamma$ a so strednou priečkou $MN \parallel AB$. Množina bodov C je na obr. 7 hrubo vytiahnutá. Body M, N do nej nepatria.



Obr. 7

b) Bod M je stred strany AC. Z časti a) vyplýva, že množinou všetkých bodov A je útvar súmerne združený podľa stredu M k útvaru, ktorý je množinou bodov C (pozri obr. 7. Body N_1 a M do tejto množiny nepatria).

4. Jsou dána dvě kladná čísla a, b $(a > b)$.

a) Určete všechny hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro něž lze sestrojit trojúhelník ABC se stranami délek a, b, $c = \sqrt{ab}$.

b) Určete všechny hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro které bude trojúhelník ABC z odst. a) ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý).

ŘEŠENÍ. K tomu, aby existoval trojúhelník se stranami délek a, b, c, je nutné a stačí, aby byly splněny nerovnosti

$$b < a + \sqrt{ab}\,, \quad \sqrt{ab} < a + b\,, \quad a < b + \sqrt{ab}\,.$$

Jelikož předpokládáme $a > b$, je první nerovnost jistě splněna. Totéž platí pro druhou nerovnost, což uvidíme, povýšíme-li ji na druhou. Zbývá tedy poslední nerovnost; tu můžeme psát

$$a - b < \sqrt{ab}\,.$$

Odtud dostaneme

$$a^2 + b^2 - 3ab < 0$$

a po dělení b^2 dostaneme nerovnost, které má vyhovovat poměr $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 < 0\,.$$

Jejím řešením je (vzhledem k $a > b$)

$$1 < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\,.$$

Jelikož a je zřejmě nejdelší z úseček a, b, c, může být pravý nebo tupý jenom úhel proti ní. Podle kosinové věty máme pro kosinus tohoto úhlu výraz

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{(b^2 + ab - a^2)}{2b\sqrt{ab}}\,,$$

takže stačí vyšetřit znaménko výrazu $(b^2 + ab - a^2)$ vyjádřeného jako funkce poměru (a/b):

$$f(a/b) = 1 + (a/b) - (a/b)^2 .$$

Funkce $f(x) = 1 + x - x^2$ (kvadratický trojčlen) má kladný kořen $k = (1/2)\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1{,}618\ldots$, takže

trojúhelník ABC je ostroúhlý, když $f(a/b) > 0$,
trojúhelník ABC je pravoúhlý, když $f(a/b) = 0$,
trojúhelník ABC je tupoúhlý, když $f(a/b) < 0$.

Vzhledem k tomu, že $1 < (a/b) < (1/2)(3 + \sqrt{5})$, vidíme, že ABC je ostroúhlý pro $(a/b) \in \left(1, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$,

pravoúhlý pro $(a/b) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

tupoúhlý pro $(a/b) \in \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

3. *KATEGORIE Z*

1. Zdeněk krátil při výpočtech zlomky takto:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}; \quad \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}; \quad \frac{1\cancel{9}\cancel{9}}{\cancel{9}\cancel{9}5} = \frac{1}{5}.$$

Učitel tento způsob „krácení“ pochopitelně neschvaluje, ale Zdeněk se hájí tím, že výsledek je správný.

Najděte všechny zlomky a) s dvojcifernými, b) s trojcifernými čitateli i jmenovateli, které mohl Zdeněk svým způsobem „krátit“ a přitom dostal správný výsledek.

ŘEŠENÍ. a) Čitatel i jmenovatel zlomku, který je možno podle Zdeňka „krátit“, jsou dvojciferná čísla, a proto můžeme takový zlomek psát ve tvaru

$$\frac{10a + b}{10b + c}.$$

V případech, kdy má Zdeněk pravdu, platí

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}, \tag{1}$$

přičemž čísla a, b, c jsou přirozená menší než 10.

Z rovnice (1) plyne

$$c = \frac{10ab}{9a + b}. \tag{2}$$

O číslech a, b, c víme, že jsou přirozená menší než 10, přičemž číslo c splňuje vztah (2). Čísla a, b, c těchto vlastností vyhledáme tak, že a, b budeme volit a číslo c počítat pomocí vzorce (2). Chceme-li nalézt všechny zlomky, kde je možno „krátit“ Zdeňkovým způsobem, musíme při volbě čísel a, b postupovat tak, abychom vystřídali všechny možnosti.

1. Zvolme $a = 1$. Pro b a c sestavme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\mathbf{\frac{10}{10}}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\mathbf{\frac{60}{15}}$	$\frac{70}{16}$	$\frac{80}{17}$	$\mathbf{\frac{90}{18}}$

Obdrželi jsme řešení: $a = b = c = 1$, tj. $\frac{11}{11} = \frac{1}{1}$,

$a = 1$, $b = 6$, $c = 4$, tj. $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$,

$a = 1$, $b = 9$, $c = 5$, tj. $\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$.

2. Zvolme $a = 2$. Pro b a c sestavme tabulku:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	$\frac{20}{19}$	$\mathbf{\frac{40}{20}}$	$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\mathbf{\frac{120}{24}}$	$\frac{140}{25}$	$\frac{160}{26}$	$\frac{180}{27}$

Nalezli jsme další řešení: $a = b = c = 2$, tj.

$$\frac{22}{22} = \frac{2}{2},$$

$$a = 2, \quad b = 6, \quad c = 5, \quad \text{tj.} \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}.$$

3.—9. Volíme-li postupně $a = 3, 4, \ldots, 9$, najdeme další zlomky, pro něž platí $a = b = c$, tj.

$$\frac{33}{33} = \frac{3}{3}, \quad \frac{44}{44} = \frac{4}{4}, \ldots, \frac{99}{99} = \frac{9}{9},$$

a ještě případ

$$a = 4, \quad b = 9, \quad c = 8, \quad \text{tj.} \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}.$$

ZÁVĚR. Zlomky $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \ldots, \frac{99}{99}, \frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}$

jsou všechny zlomky vyhovující úloze.

b) Postupujeme obdobně jako v části a). V tomto případě jde o nalezení přirozených čísel a, b, c menších než 10, které splňují rovnost

$$\frac{100a + 10b + b}{100b + 10b + c} = \frac{a}{c}.$$

Snadnou úpravou zjistíme, že pro c platí

$$c = \frac{10ab}{9a + b},$$

tj. vzorec (2). Je tedy možno využít výsledků z části a). Všechny zlomky, které splňují část b) naší úlohy, jsou:

$$\frac{111}{111}, \frac{222}{222}, \ldots, \frac{999}{999}, \frac{166}{664}, \frac{199}{995}, \frac{266}{665}, \frac{499}{998}.$$

POZNÁMKA.

Úlohu lze dále různými způsoby zobecňovat, např. platí

$$\frac{1\,666}{666\,4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{4\,9999}{9999\,8} = \frac{4}{8}.$$

Dále je možno i uvažovat jiné typy „krácení". Označme krácenou číslicí a, nekrácené číslice x, y, potom by např. v úloze a) bylo možno celkem uvažovat zlomky těchto tvarů: $\frac{xa}{ay}$ (připuštěno úlohou); $\frac{ax}{ya}$; $\frac{ax}{ay}$; $\frac{xa}{ya}$.

2. Nákladným autom sa má previezť m ton stavebného materiálu do vzdialenosti d km (po vodorovnej ceste). Auto má hmotu V ton. Pri stálom výkone motora je rýchlosť auta nepriamo úmerná celkovej hmote auta a nákladu. Čas nakladania a skladania (približne rovnaký) je priamo úmerný hmote nákladu. Materiál nemožno naložiť na jeden raz, ale treba ísť niekoľkokrát.

Rozhodnite výpočtom, čo je časove výhodnejšie: Nakladať menej, chodiť teda rýchlejšie, ale samozrejme viackrát, alebo nakladať viac, chodiť pomalšie, ale zato menejkrát. (Na čas rozbiehania a zastavovania vozidla neprihliadame.)

RIEŠENIE. Predpokladajme, že auto išlo celkom n-krát ($n \geqq 2$). Nech $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sú hmoty jednotlivých nákladov v tonách, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ rýchlosti v km/h pri doprave týchto nákladov a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ doby v hodinách potrebné k naloženiu a k zloženiu týchto nákladov. Rýchlosť prázdneho auta v km/h označme c.

Celková doba T v hodinách potrebná na prevezenie všetkého materiálu je:

$$T = \left(t_1 + \frac{d}{v_1} + t_1 + \frac{d}{c}\right) + \left(t_2 + \frac{d}{v_2} + t_2 + \frac{d}{c}\right) + \\ + \ldots + \left(t_n + \frac{d}{v_n} + t_n + \frac{d}{c}\right) = 2\,(t_1 + t_2 + \ldots + \\ + t_n) + d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}\right) + \frac{nd}{c}. \qquad (1)$$

Podľa textu úlohy platí (q a k sú konštanty úmernosti):

$$t_1 = qm_1,\ t_2 = qm_2, \ldots, t_n = qm_n\,, \qquad (2)$$

$$c = \frac{k}{V},\quad v_1 = \frac{k}{V + m_1},\quad v_2 = \frac{k}{V + m_2}, \ldots, v_n = \\ = \frac{k}{V + m_n}. \qquad (3)$$

Po dosadení z (2) a (3) do (1) dostaneme

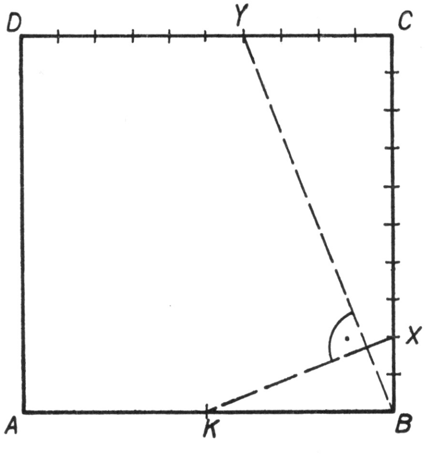
$$T = 2q(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + \\ + d\,\frac{n\,.\,V + (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)}{k} + \frac{ndV}{k}.$$

Zrejme platí $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$, a preto

$$T = n\,.\,\frac{2dV}{k} + 2qm + \frac{dm}{k} = A\,.\,n + B\,,$$

kde A a B sú konštanty. Celková doba T bude tým menšia, čím menšie bude n, t. j. časove výhodné je nakladať tak, aby počet ciest bol čo najmenší.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou $a = 10$ cm. Každá zo strán BC, CD je rozdelená deviatimi bodmi na desať zhodných úsečiek. Stred K strany AB je spojený s deliacim bodom X strany BC a vrchol B je spojený s deliacim bodom Y strany CD. Ktoré deliace body X, Y musíme vybrať, aby priamky KX, BY boli navzájom kolmé?



Obr. 8

RIEŠENIE. V zhode s obr. 8 označme hľadaný deliaci bod na strane BC X a deliaci bod na strane CD označme Y. K tomu, aby priamky KX, BY boli na seba kolmé, musí platiť

$$\triangle KBX \sim \triangle BCY .$$

Z toho máme

$$BX : BK = CY : BC . \tag{1}$$

Označme ďalej $BX = \alpha$, $CY = \beta$, kde pre prirodzené čísla α, β platí:

$$0 < \alpha < 10\,, \qquad 0 < \beta < 10\,.$$

Keďže $BK = \frac{a}{2} = 5$, $BC = a = 10$, po dosadení do (1) dostaneme

$$\alpha : \frac{a}{2} = \beta : a\,,$$

z čoho

$$\beta = 2\alpha\,.$$

Vyhovujú teda tieto hodnoty

α	1	2	3	4
β	2	4	6	8

Úloha má podľa toho štyri rôzne riešenia.

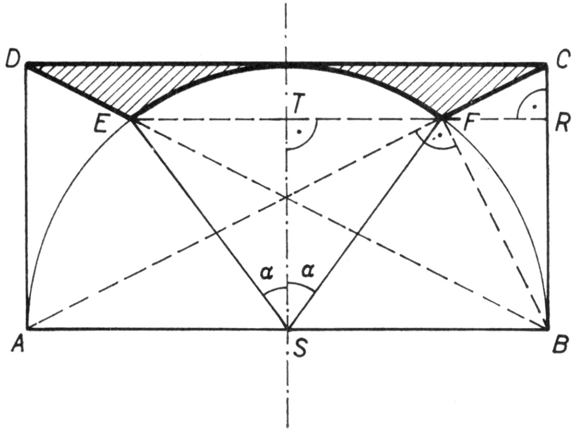
4. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany AB, BC jsou v poměru $2:1$. Do obdélníku je vepsána polokružnice k nad stranou AB jako průměrem. Úhlopříčky AC a BD protínají kružnici k po řadě v bodech F, E.

Určete obsah obrazce, který je omezen obloukem EF polokružnice k a úsečkami FC, CD, DE.

ŘEŠENÍ. Obrazec **O** popsaný v úloze dostaneme z rovnoramenného lichoběžníka $DCFE$ oddělením úseče nad tětivou EF (obr. 9). Označme P_1 obsah lichoběžníka $DCFE$, P_2 obsah výseče SFE a P_3 obsah $\triangle\ SFE$, kde S je střed strany AB. Je-li P obsah obrazce **O**, potom

$$P = P_1 + P_3 - P_2\,. \tag{1}$$

Označíme-li r poloměr vepsané polokružnice, potom



Obr. 9

$AB = 2r$ a $BC = r$. Označme R průsečík přímky EF a BC. K výpočtu P_1, P_2, P_3 potřebujeme znát velikosti úseček EF a CR.

Platí

$$EF = 2r - 2\,.\,FR\,. \tag{2}$$

Podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AFB = 90°$ a FB je tedy výška v $\triangle\, ABC$. Pro obsah tohoto trojúhelníka platí:

$$\frac{1}{2}\,AB\,.\,BC = \frac{1}{2}\,AC\,.\,FB\,,$$

tj.

$$FB = \frac{AB\,.\,BC}{AC} = \frac{2r\,.\,r}{\sqrt{4r^2 + r^2}} = \frac{2r}{\sqrt{5}}\,.$$

Protože je $\triangle\, BRF \sim \triangle\, ABC$ (věta *uu*), platí

$$\frac{FR}{FB} = \frac{CB}{CA}\,,$$

tj.

$$FR = \frac{r}{r\sqrt{5}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \cdot r\,.$$

Z rovnosti (2) potom dostáváme

$$EF = 2r - \frac{4}{5}\,r = \frac{6}{5}\,r\,. \tag{3}$$

Z podobnosti $\triangle\, FRC \sim \triangle\, ABC$ (věta *uu*) plyne

$$\frac{CR}{FR} = \frac{BC}{AB}\,,$$

tj.

$$CR = \frac{r}{2r} \cdot \frac{2}{5}\,r = \frac{1}{5}\,r\,. \tag{4}$$

Užijeme-li (3) a (4), máme

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot CR \cdot (DC + EF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\,r \cdot \left(2r + \frac{6}{5}\,r\right),$$

tj.

$$P_1 = \frac{8}{25}\,r^2\,. \tag{5}$$

Dále dostáváme

$$P_3 = \frac{1}{2}\,EF \cdot BR = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5}\,r \cdot \left(r - \frac{1}{5}\,r\right),$$

tj.

$$P_3 = \frac{12}{25}\,r^2\,. \tag{6}$$

Zbývá ještě určit P_2. Označme $\sphericalangle\, ESF = 2\alpha$. Potom platí

$$P_2 = \frac{\pi r^2 \alpha}{180}\,, \tag{7}$$

kde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2} EF}{BR} = \frac{3}{4}, \quad \text{tj.} \quad \alpha \doteq 37°. \qquad (7')$$

(Užito bylo tabulek *M5* z tabulek pro ZDŠ.)

Spojením (1), (5), (6) a (7′) dostáváme

$$P = \left(0{,}8 - \frac{\alpha\pi}{180}\right) . r^2 \doteq 0{,}154 r^2 .$$