18. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. pp. 129–146.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404589

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určete všechny dvojice racionálních čísel x, y, pro které platí

$$(x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5}\,. \qquad (1)$$

ŘEŠENÍ. Budiž x, y dvojice racionálních čísel, pro kterou platí (1). Potom

$$x^2 + 5y^2 + 2xy\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5}\,,$$

takže

$$x^2 + 5y^2 - 7 = (3 - 2xy)\sqrt{5}\,.$$

Kdyby bylo $3 - 2xy \neq 0$, byla by

$$\sqrt{5} = \frac{x^2 + 5y^2 - 7}{3 - 2xy}$$

racionální číslo, což není. Máme tedy $2xy = 3$, tj.

$$xy = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

a ovšem také

$$x^2 + 5y^2 = 7\,. \qquad (3)$$

Umocníme rovnici (3) dvěma; vyjde

$$x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 = 49\,. \qquad (4)$$

Zároveň však podle (2) je

$$20x^2y^2 = 45\,. \qquad (5)$$

Odečteme (5) od (4) a dostaneme

$$x^4 - 10x^2y^2 + 25y^2 = 4\,,$$

tj.

$$(x^2 - 5y^2)^2 = 4\,.$$

Je tedy buď

$$x^2 - 5y^2 = 2\,, \tag{6}$$

anebo

$$x^2 - 5y^2 = -2\,. \tag{7}$$

Sečtením (3) a (6) dostáváme $2x^2 = 9$, tj.

$$x^2 = \frac{9}{2}\,,$$

což není možné, neboť x je racionální číslo.

Sečtením (3) a (7) dostaneme $2x^2 = 5$, tj.

$$x^2 = \frac{5}{2}\,,$$

což také není možné.

Poněvadž jsme z předpokladu existence dvojice racionálních čísel x, y vyhovujících (1) dostali vždy spor, žádná taková dvojice neexistuje.

2. V rovine leží päť bodov O, A, B, C, D. Pre ich vzdialenosti platí $OA \leqq OB \leqq OC \leqq OD$.

Dokážte, že pre obsah P konvexného štvoruholníka, ktorého vrcholmi sú body A, B, C, D, vždy platí

$$P \leqq \frac{1}{2}(OA + OD)(OB + OC)$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

RIEŠENIE. V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $KLMN$ nech je Q priesečníkom uhlopriečok KM a LN.

Pre obsah trojuholníka KLM zrejme platí

$$P_{KLM} \leqq \frac{1}{2} KM \,.\, LQ\,,$$

pretože úsečka LQ nie je kratšia než výška v trojuholníku KLM prislúchajúca strane KM. Pre trojuholník KMN analogicky platí

$$P_{KMN} \leqq \frac{1}{2} KM \,.\, NQ\,,$$

takže pre obsah štvoruholníka $KLMN$ vždy platí

$$P_{KLMN} \leqq \frac{1}{2} KM \,.\, LN\,,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď je $KM \perp LN$.

Nech je R ľubovoľným bodom roviny $KLMN$. Podľa trojuholníkovej nerovnosti platí $KM \leqq KR + MR$ a $LN \leqq LR + NR$, takže

$$P_{KLMN} \leqq \frac{1}{2} (KR + MR)(LR + NR)\,.$$

Rovnosť v tomto vzťahu nastane práve vtedy, keď leží R jednak medzi bodmi K a M a jednak medzi bodmi L a N čiže, ak je $R \equiv Q$, kde Q je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok KM a LN.

V konvexnom štvoruholníku s vrcholmi A, B, C, D sú uhlopriečkami buď AB a CD, alebo AC a BD, alebo AD a BC. Podľa predchádzajúcej úvahy platí potom v prvom prípade

$$P \leqq \frac{1}{2} (AO + BO)(CO + DO)\,,$$

v druhom prípade

$$P \leqq \frac{1}{2} (AO + CO)(BO + DO)$$

a v treťom prípade

$$P \leqq \frac{1}{2}(AO + DO)(BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď O je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok.

Pretože $AO \leqq BO \leqq CO \leqq DO$, platí

$$\begin{aligned}(AO + DO)(BO + CO) - (AO + BO)(CO + DO) &= \\ = AO \,.\, BO + BO \,.\, DO + AO \,.\, CO + CO \,.\, DO &- \\ - AO \,.\, CO - AO \,.\, DO - BO \,.\, CO - BO \,.\, DO &= \\ = AO \,.\, BO + CO \,.\, DO - AO \,.\, DO - BO \,.\, CO &= \\ = (DO - BO)(CO - AO) \geqq 0,\end{aligned}$$

takže

$$(AO + BO)(CO + DO) \leqq (AO + DO)(BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď $DO = BO$ alebo $CO = AO$.

Analogicky tiež

$$\begin{aligned}(AO + DO)(BO + CO) - (AO + CO)(BO + DO) &= \\ = AO \,.\, BO + AO \,.\, CO + BO \,.\, DO + CO \,.\, DO &- \\ - AO \,.\, BO - AO \,.\, DO - BO \,.\, CO - CO \,.\, DO &= \\ = AO \,.\, CO + BO \,.\, DO - AO \,.\, DO - BO \,.\, CO &= \\ = (DO - CO)(BO - AO) \geqq 0,\end{aligned}$$

takže

$$(AO + CO)(BO + DO) \leqq (AO + DO)(BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď $DO = CO$ alebo $BO = AO$.

Platí teda vždy

$$P \leqq \frac{1}{2}(AO + DO)(BO + CO).$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď O je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok štvoruholníka $XYZV$, kde X, Y, Z, V je taká usporiadaná štvorica bodov A, B, C, D, že $OX = OA$ a $OZ = OD$.

3. Nechť p je prvočíslo. Kolik existuje různých posloupností přirozených čísel

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

takových, že pro každé přirozené $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1 ? \qquad (1)$$

ŘEŠENÍ. Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ je posloupnost vyhovující podmínkám úlohy. Vztah (1) si napíšeme pro $n = m + 1$ a $n = m$ a pak odečteme:

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \ldots + \frac{a_0}{a_{m+1}} + \frac{p}{a_{m+2}} = 1\,,$$

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \ldots + \frac{a_0}{a_m} + \frac{p}{a_{m+1}} = 1,$$

$$\frac{p}{a_{m+2}} + \frac{a_0 - p}{a_{m+1}} = 0,$$

takže

$$a_{m+2} = \frac{p}{p - a_0}\, a_{m+1}. \qquad (2)$$

Tento vztah platí pro všechna $m = 1, 2, 3, \ldots$. Vynásobíme (2) pro $m = 1, 2, \ldots, k$

$$a_3 a_4 \ldots a_{k+2} = \left(\frac{p}{p - a_0}\right)^k . \, a_2 a_3 \ldots a_{k+1}$$

a po zkrácení

$$a_{k+2} = \left(\frac{p}{p - a_0}\right)^k a_2 \qquad (3)$$

pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ Poněvadž všechna čísla a_n jsou přirozená, musí být $p - a_0 > 0$, tedy $0 < a_0 < \mathrm{p}$. Zároveň musí být buď p dělitelné číslem $p - a_0$, anebo musí být a_2 dělitelné libovolnou mocninou čísla $p - a_0$; obojí je však možné jen v tom případě, že

$$a_0 = p - 1\,. \tag{4}$$

Napíšeme si nyní vztah (1) pro $n = 1$ s použitím (4):

$$\frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1\,,$$

tj.

$$p(a_1 + a_2) = (a_1 + 1)a_2\,. \tag{5}$$

Vidíme odtud, že buď číslo $a_1 + 1$, anebo číslo a_2 musí být násobkem prvočísla p.

I. Nechť tedy za prvé $a_1 + 1 = kp$ (k přirozené číslo). Dosadíme do (5); vyjde

$$p(kp - 1 + a_2) = kpa_2\,,$$
$$kp - 1 + a_2 = ka_2\,,$$

takže

$$(kp - 1) = (k - 1)a_2\,.$$

Poněvadž k je přirozené a $p \geqq 2$, je $kp > 1$, takže nemůže být $k = 1$; a můžeme dělit číslem $k - 1$. Dostaneme tak

$$a_2 = \frac{kp-1}{k-1} = p + \frac{p-1}{k-1}\,. \tag{6}$$

Poněvadž a_2 je přirozené, musí být číslo $p - 1$ dělitelné číslem $k - 1$. Zároveň vidíme, že takovéto číslo a_2 není dělitelné číslem p.

Ke každému přirozenému číslu $k - 1$, jež je dělitelem čísla $p - 1$, dostaneme ze vzorce (6) a z $a_1 = kp - 1$ dvojici čísel

$$a_1 = kp - 1\,, \qquad a_2 = \frac{a_1}{k-1}\,;$$

poněvadž však a_0 je určeno v (4) a a_m pro $m > 2$ vzorcem (3), odpovídá každému přirozenému děliteli čísla $p - 1$ právě jedna posloupnost vyhovující úloze.

II. Nechť $a_2 = kp$, k přirozené. Dosadíme do (5); vyjde

$$p(a_1 + kp) = (a_1 + 1)kp\,,$$
$$a_1 + kp = ka_1 + k\,,$$
$$a_1(k - 1) = k(p - 1)\,.$$

Poněvadž $k \geqq 1$ a $p \geqq 2$, nemůže být $k = 1$; můžeme tedy dělit číslem $k - 1$:

$$a_1 = \frac{k(p-1)}{k-1} = p - 1 + \frac{p-1}{k-1}\,. \tag{7}$$

Poněvadž a_1 je přirozené číslo a $p \geqq 2$, vidíme opět, že je číslo $p - 1$ dělitelné číslem $k - 1$.

Ke každému přirozenému číslu $k - 1$, jež je dělitelem čísla $p - 1$, dostaneme podle předchozího dvojici čísel

$$a_1 = p - 1 + \frac{p-1}{k-1},\ a_2 = kp\ ;$$

poněvadž však čísla a_0 a $a_m (m > 2)$ jsou pak plně určena vzorci (3) a (4), odpovídá každému přirozenému děliteli čísla $p - 1$ právě jedna posloupnost vyhovující úloze.

Zároveň je vidět, že posloupnosti, které dostaneme podle I a podle II jsou různé, neboť v případě II je a_2 dělitelné číslem p, kdežto v případě I tomu tak není.

Celkem tedy je počet různých posloupností vyhovujících úloze roven právě dvojnásobku počtu přirozených dělitelů čísla $p - 1$.

4. Určite všetky komplexné čísla z, ktoré vyhovujú nerovnosti

$$\big|z - |z + |z||\big| - |z|\sqrt{3} \geqq 0 \tag{1}$$

a zobrazte ich v rovine komplexných čísel.

RIEŠENIE. Nerovnosť (1) je zrejme ekvivalentná s nerovnosťou

$$\left|z - \left|z + |z|\right|\right|^2 \geqq 3\,|z|^2\,, \qquad (2)$$

ktorej evidentne vyhovuje číslo $z = 0$. Nech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r > 0$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ sú reálne čísla, je riešením nerovnosti (2). Potom zrejme platí

$$\left|r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) - |r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + r|\right|^2 \geqq 3r^2\,,$$

skadiaľ po vynásobení číslom $\frac{1}{r^2}$ a vyjadrení absolútnej hodnoty vo vnútri výrazu na ľavej strane dostaneme

$$|\cos\varphi - \sqrt{2(1 + \cos\varphi)} + i\sin\varphi|^2 \geqq 3\,,$$

čiže

$$\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sqrt{2\,(1 + \cos\varphi)} + 2(1 + \cos\varphi) + \sin^2\varphi \geqq 3.$$

Po jednoduchej úprave máme

$$\cos\varphi \geqq \cos\varphi\,\sqrt{2\,(1 + \cos\varphi)}\,. \qquad (3)$$

Z prevedených úprav je zrejmé, že číslo $z \neq 0$ vyhovuje nerovnosti (1) práve vtedy, keď jeho amplitúda $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ splňuje vzťah (3).

Nerovnosti (3) vyhovujú zrejme všetky tie čísla φ, pre ktoré $\cos\varphi = 0$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Nech $\cos\varphi > 0$. Potom z (3) máme $1 \geqq \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}$, z čoho po umocnení na druhú a jednoduchej úprave dostávame nerovnosť $\cos\varphi \leqq -\frac{1}{2}$, ktorá je v spore s predpokladom, čo znamená, že uhly φ, pre ktoré $\cos\varphi > 0$ nerovnosti (3) nevyhovujú.

Nech $\cos\varphi < 0$, potom z (3) dostaneme

$$1 \leqq \sqrt{2\,(1 + \cos\varphi)},$$

z čoho rovnakým postupom ako v predchádzajúcom prípade dostaneme nerovnosť

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\varphi < 0\,, \tag{4}$$

ktorej vyhovujú práve tie čísla φ z uvažovaného intervalu, pre ktoré platí jeden zo vzťahov

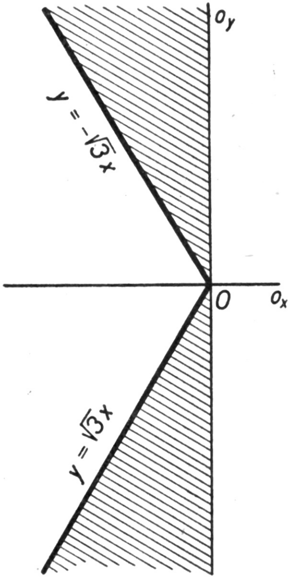
$$\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{2\pi}{3}\,, \qquad \frac{4\pi}{3} \leqq \varphi < \frac{3\pi}{2}\,. \tag{5}$$

Pre riešenia nerovnosti (4) však zrejme platí:

$2(1+\cos\varphi) \geqq 1$ čiže $\sqrt{2(1+\cos\varphi)} \geqq 1$ a

$\cos\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)} \leqq \cos\varphi$, t. j. vyhovujú nerovnosti (3).

Obr. 46



ZÁVER. Nerovnosti (1) vyhovuje číslo $z = 0$ a tie čísla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, pre ktorých amplitúdy platí:

$$\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{3}\,, \text{ resp.}$$

$$\frac{4\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{2} \text{ (pozri obr. 46).}$$

INÉ RIEŠENIE. Ak použijeme vzťah $|z|^2 = z\bar{z}$, z nerovnosti (2) dostaneme

$$(z - |z + |z||)\ (\bar{z} - |z + |z||) \geqq 3z\bar{z},$$

$$z\bar{z} - (z + \bar{z})\,|z + |z|| + |z + |z||^2 \geqq 3z\bar{z},$$

$$-(z + \bar{z})\,|z + |z|| + (z + |z|)\,(\bar{z} + |z|) \geqq 2z\bar{z},$$

z čoho po jednoduchej úprave vyplýva

$$(z + \bar{z})\,(|z| - |z + |z||) \geqq 0\,, \tag{6}$$

pričom je zrejmé, že nerovnosť (6) je ekvivalentná s nerovnosťou (2) a teda aj s nerovnosťou (1).

Nerovnosti (6) vyhovujú však len tie komplexné čísla z, pre ktoré platí buď

$$z + \bar{z} \geqq 0\,,\ |z| - |z + |z|| \geqq 0\,, \tag{7}$$

alebo

$$z + \bar{z} \leqq 0,\ |z| - |z + |z|| \leqq 0\,. \tag{8}$$

Nech platia nerovnosti (7). Z druhej z nich máme $|z| \geqq |z + |z||$, z čoho po umocnení na druhú dostaneme $|z|^2 \geqq (z + |z|)\,(\bar{z} + |z|)$ čiže $|z|^2 \geqq z\bar{z} + (z + \bar{z})\,|z| + |z|^2$, skadiaľ

$$(z + \bar{z})\,|z| \leqq -|z|^2\,. \tag{9}$$

Vzhľadom na prvú z nerovností (7) vyhovuje však nerovnosti (9) zrejme len číslo $z = 0$, ktoré splňuje sústavu (7).

Ak platia nerovnosti (8), potom z druhej z nich analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostaneme postupne

$|z| \leqq |z + |z||,\ |z|^2 \leqq (z + |z|)\,(\bar{z} + |z|),$

$|z|^2 \leqq z\bar{z} + (z + \bar{z})\,|z| + |z|^2,$ tj.

$(z + \bar{z})\,|z| \geqq -|z|^2$, z čoho pre $z \neq 0$ dostaneme

$$-|z| \leqq z + \bar{z} \leqq 0\,. \tag{10}$$

Číslo $z = 0$ vyhovuje však tiež nerovnosti (10) i predchádzajúcej nerovnosti. Nech $z = x + iy$, kde x, y sú reál. čísla, je riešením nerovnosti (10). Potom je táto ekvivalentná s nerovnosťou

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \leqq 2x \leqq 0\,, \tag{11}$$

ktorej vyhovujú len tie dvojice reálnych čísel $[x, y]$, pre ktoré platí: $x \leqq 0$, $x^2 + y^2 \geqq 4x^2$ čiže $y^2 \geqq 3x^2$, tj. $|y| \geqq \sqrt{3}\,|x| = -\sqrt{3}\,x$. Z posledného vzťahu pre $y \geqq 0$ vyplýva $y \geqq -\sqrt{3}\,.\,x$ a pre $y \leqq 0$: zasa $y \leqq \sqrt{3}\,.\,x$. Obrátením postupu sa ľahko presvedčíme, že dvojice $[x, y]$, pre ktoré $x \leqq 0$ a $y \geqq -\sqrt{3}\,x \geqq 0$, resp. $y \leqq \leqq \sqrt{3}\,x \leqq 0$ vyhovujú nerovnosti (11).

ZÁVER: Nerovnosti (1) vyhovujú všetky tie komplexné čísla z, ktorých obrazy ležia v spoločnej časti polrovín $x \leqq 0$, $y \leqq \sqrt{3}\,x$, a polrovín $x \leqq 0$, $y \geqq -\sqrt{3}\,x$ (pozri obr. 46).

INÉ RIEŠENIE. Nech $z = x + iy$, kde x, y sú reál. čísla, je riešením nerovnosti (1). Po dosadení do nerovnosti (2), ktorá je s ňou ekvivalentná, dostaneme

$$|x + iy - |x + iy + \sqrt{x^2 + y^2}||^2 \geqq 3(x^2 + y^2),$$

$$|x + iy - \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)}|^2 \geqq 3(x^2 + y^2),$$

$$x^2 - 2x\sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)} +$$
$$+ 2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2) + y^2 \geqq 3(x^2 + y^2),$$

z čoho po jednoduchej úprave vyplýva

$$x\sqrt{x^2 + y^2} \geqq x\sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)}\,. \tag{12}$$

Nerovnosti (12) vyhovujú zrejme všetky dvojice $[x, y]$ reál. čísel, kde $x = 0$, y je ľubovoľné.

Nech $x > 0$. Potom z (12) dostaneme

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geqq \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)},$$

z čoho postupne vyplýva

$$x^2 + y^2 \geqq 2(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$x^2 + y^2 + 2x\sqrt{x^2 + y^2} \leqq 0\,,$$

čo však neplatí pre žiadnu dvojicu $[x, y]$, kde $x > 0$, pretože na ľavej strane je súčet dvoch kladných a jedného nezáporného čísla.

Nech $x < 0$, potom

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqq \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)},$$

z čoho postupne máme

$$x^2 + y^2 \leqq 2(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$x^2 + y^2 \geqq -\,2x\sqrt{x^2 + y^2} > 0\,, \qquad (13)$$

a pretože pre $x < 0$ je $\sqrt{x^2 + y^2} > 0$, je nerovnosť (13) ekvivalentná s nerovnosťou

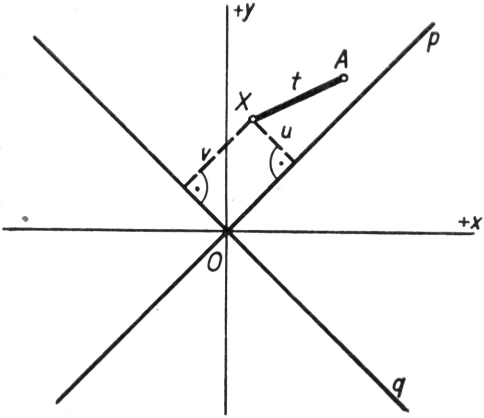
$$\sqrt{x^2 + y^2} \geqq -2x > 0\,,$$

ktorej vyhovujú všetky dvojice $[x, y]$, pre ktoré $x < 0$ a $y \geqq -\sqrt{3}\,x$, resp. $y \leqq \sqrt{3}\,x$, o čom sa presvedčíme podobne ako pri riešení nerovnosti (11).

5. Jsou dány dvě kolmice p, q a bod A jejich roviny, který neleží na žádné z nich. Označme vzdálenosti bodu X roviny přímek p, q od přímek p, q a bodu A po řadě u, v, t. Určete množinu všech takových bodů X, pro něž platí $t = \sqrt{uv}$.

[Návod: zvolte za osy souřadnic osy daných dvou různoběžek.]

ŘEŠENÍ. Zvolme osy souměrnosti přímek p, q za osy soustavy ortonormálních souřadnic. Orientaci os zvolme tak, aby bod A náležel 1. kvadrantu (obr. 47). Označme souřadnice $A = [x_0, y_0]$, $x_0 \geqq 0$, $y_0 \geqq 0$, $X = [x, y]$.



Obr. 47

Rovnice přímek p, q jsou pak $x \pm y = 0$. Podmínka pro body X hledané množiny zní

$$t^2 = uv. \tag{1}$$

Použijeme vzorců:

$$t^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad u = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}},$$

$$v = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Po dosazení z (2) do (1) dostaneme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{|x^2 - y^2|}{2}. \tag{3}$$

Z (3) plynou dvě rovnice — buď

$$2(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2) = x^2 - y^2\,, \quad (4)$$

nebo

$$2(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2) = y^2 - x^2\,. \quad (5)$$

Po úpravě (4) dostaneme

$$(x - 2x_0)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}y_0\right)^2 = 4x_0^2 + \frac{4}{3}y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2\,. \quad (6)$$

Po úpravě (5) dostaneme

$$3\left(x - \frac{2}{3}x_0\right)^2 + (y - 2y_0)^2 = \frac{4}{3}x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2\,. \quad (7)$$

Obráceně z (6) a (7) plyne (4) a (5), odtud (3), a tedy podle (2) i (1). Analytické vyjádření vyšetřované množiny je tedy dáno rovnicemi (6) a (7).

Označme $P_6(P_7)$ pravou stranu rovnice (6), (7) po dělení dvěma.

Pak je

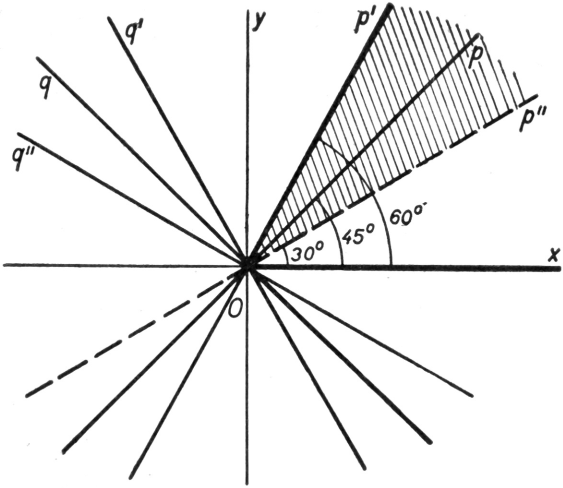
$$P_6 = x_0^2 - \frac{1}{3}y_0^2\,, \quad P_7 = y_0^2 - \frac{1}{3}x_0^2\,.$$

Upravíme

$$3P_6 = (x_0\sqrt{3} - y_0)\,(x_0\sqrt{3} + y_0)\,, \quad (6')$$

$$P_7 = \left(y_0 - \frac{x_0}{\sqrt{3}}\right)\left(y_0 + \frac{x_0}{\sqrt{3}}\right). \quad (7')$$

$P_6 = 0$ je analytickým vyjádřením dvou přímek p', q', které mají od osy x odchylku $60°$. $P_7 = 0$ je analytickým vyjádřením dvou přímek p'', q'', které mají od osy x odchylku $30°$ (obr. 48). Nerovnost $P_6 \geqq 0$ vyjadřuje v 1. kvadrantě úhel s tlustě vytaženými rameny, nerovnost $P_7 \geqq 0$ vyjadřuje v 1. kvadrantě úhel sevřený čárkovaným ramenem a polopřímkou $+y$.



Obr. 48

Vyšetřovaná množina bodů je tedy dána touto tabulkou

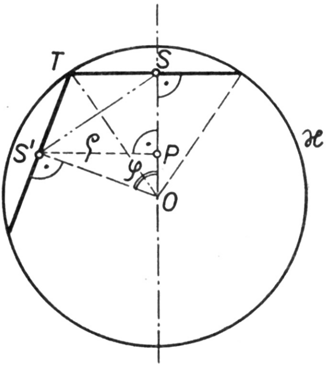
Bod A leží	Vyšetřovaná množina bodů je
Uvnitř úhlu $\sphericalangle\, p'y$ nebo na rameni y	Elipsa (7)
Na rameni p'	Elipsa (7) a bod $\left[2x_0\,,\ \frac{2}{3}y_0\right]$
Uvnitř úhlu $\sphericalangle\, p'p''$	Elipsa (6) a elipsa (7)
Na rameni p''	Elipsa (6) a bod $\left[\frac{2}{3}x_0\,,\ 2y_0\right]$
Uvnitř úhlu $\sphericalangle\, p''x$ nebo na rameni x	Elipsa (6)

Symetriemi podle os a počátku dostaneme situaci v ostatních kvadrantech.

6. Je dána kulová plocha o poloměru délky 1. Na této kulové ploše jsou umístěny shodné kružnice k_0, k_1, k_2, . . ., $k_n (n \geqq 3)$ o poloměru r. Kružnice k_0 se dotýká [*]) každé z kružnic $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Dále se dotýkají [*]) každé dvě kružnice k_i, k_{i+1}, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, přičemž kružnice k_{n+1} a k_1 jsou totožné.

a) Najděte vztah, který platí mezi čísly r, n.

b) Zjistěte, pro která n může nastat popsaná situace a vypočtěte příslušný poloměr r.



Obr. 49

ŘEŠENÍ. a) Nechť kružnice k, k' o poloměru r leží na dané kulové ploše a mají dotyk. Jejich středy S, S' a středem O kulové plochy je určena rovina σ, která protne kulovou plochu v hlavní kružnici $\varkappa$; situaci v rovině σ znázorňuje obr. 49. Označíme T bod dotyku kružnic k, k'; bod T leží zřejmě v rovině σ. Protože je $TS = TS' = r$, $OT = 1$, dostaneme z pravoúhlého trojúhelníka OST $(OS'T)$

$$OS = OS' = \sqrt{1 - r^2}\,. \tag{1}$$

Pro vzdálenost $a = SS'$ vyjde z deltoidu $OSTS'$ (po-

*) „*Dotykem*" dvou kružnic (neležících v rovině) rozumíme případ, kdy obě kružnice mají jediný společný bod a v něm společnou tečnu.

rovnáním dvojího vyjádření obsahu)

$$\frac{1}{2}a = r\sqrt{1 - r^2}\,,$$

neboli

$$a = 2r\sqrt{1 - r^2}\,. \tag{2}$$

Označme podle obr. 49 $\varphi = \sphericalangle SOS'$; z trojúhelníka $\triangle\, OST$ plyne

$$\sin\frac{\varphi}{2} = r\,. \tag{3}$$

Středy všech kružnic $k_0, k_1, \ldots, k_n$ jsou podle předchozího vrcholy pravidelného jehlanu n-bokého, jehož všecky hrany mají délku a. Poloměr ϱ kružnice opsané podstavě tohoto jehlanu (je to pravidelný n-úhelník o straně a) je roven délce úsečky $S'P \perp OS$ (obr. 49). Z pravoúhlého trojúhelníka $OS'P$ plyne

$$\varrho = S'P = OS'\sin\varphi = \sqrt{1 - r^2}\,.\,\sin\varphi \tag{4}$$

tj.

$$\varrho = \sqrt{1 - r^2}\,.\,2\,.\,\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

a podle (3)

$$\varrho = 2r(1 - r^2)\,. \tag{5}$$

Pro pravidelný n-úhelník o straně a a poloměru ϱ opsané kružnice dostaneme

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2\varrho}\,,$$

tj. podle (2) a (5)

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2}}\,. \tag{6}$$

Rovnice (6) je řešením úlohy a).

b) Z obr. 49 je patrné, že je $S'P < S'S$, neboli $\varrho < a$.

Protože je $r < 1$, je $\sqrt{1 - r^2} < 1$, a tedy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} >$
$> \frac{1}{2}$.

Podle (6) je

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

neboť $\frac{\pi}{n}$ je velikost ostrého úhlu. Z nerovností (7) dostáváme řešení $n = 3, 4, 5$. Sestavíme tabulku

n	3	4	5
$\sin \frac{\pi}{n}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 36°$
r	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 - \frac{1}{4 \sin^2 36°}$