17. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); František Zítek (editor): 17. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1967-1968. 10. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969. pp. 120–133.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404577

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$ jsou reálná čísla, z nichž nejvýše jedno je rovno nule. Řešte v reálném oboru soustavu

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= a_1\,, \\ x_2x_3 &= a_2\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}x_n &= a_{n-1}\,, \\ x_nx_1 &\geqq a_n\,. \end{aligned}$$

[8 bodů]

ŘEŠENÍ. **A.** Zabývejme se řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= a_1\,, \\ x_2x_3 &= a_2\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_lx_{l+1} &= a_l\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $a_i \neq 0$ pro $1, 2, \ldots, l$; $l \geqq 1$.

Na pravých stranách těchto rovnic jsou čísla různá od nuly, a proto musí být $x_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, l + 1$. Chceme-li ze soustavy (1) vypočítat x_i, $i = 2, 3, \ldots, l + 1$, je nutno rozlišit zda i je číslo sudé nebo liché.

1. Nechť i je číslo sudé. Pro $i = 2$ dostáváme z první rovnice

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}\,.$$

Nechť $i = 2k$, kde k je přirozené číslo splňující nerovnosti $2 < 2k \leqq l + 1$. Vezměme prvních $2k - 1$ rovnic soustavy (1) a přepišme je následujícím způsobem

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= a_1\,, \\ a_2 &= x_2x_3\,, \\ x_3x_4 &= a_3\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_{2k-2} &= x_{2k-2}x_{2k-1}\,, \\ x_{2k-1}x_{2k} &= a_{2k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnice (2) spolu znásobme. Dostáváme

$(x_1x_2 \dots x_{2k})(a_2a_4 \dots a_{2k-2}) = (x_2x_3 \dots x_{2k-1})(a_1a_3 \dots a_{2k-1})$.

Po úpravě

$(x_2x_3 \dots x_{2k-1})[x_1x_{2k}(a_2a_4 \dots a_{2k-2}) - (a_1a_3 \dots a_{2k-1})] = 0$,
odkud již plyne

$$x_{2k} = \frac{a_1a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2a_4 \dots a_{2k-2} \cdot x_1}. \tag{3}$$

Poznámka. Vztah (3) platí i pro $i = 2$, tj. $k = 1$, klademe-li $a_2a_4 \dots a_{2k-2} = 1$ pro $k = 1$.

2. Nechť $i = 2k + 1$, kde k je přirozené číslo splňující nerovnosti $3 \leqq 2k + 1 \leqq l + 1$. Z $2k$-rovnice soustavy (1) plyne

$$x_{2k+1} = \frac{a_{2k}}{x_{2k}},$$

tj. podle (3)

$$x_{2k+1} = \frac{a_2a_4 \dots a_{2k}}{a_1a_3 \dots a_{2k-1}} x_1. \tag{4}$$

Z tvaru vzorců (3) a (4) je zřejmé, že x_{2k} a x_{2k+1} dané (3) a (4) vyhovují $2k$-rovnici soustavy (1) pro $2 \leqq 2k \leqq l$ a libovolné $x_1 \neq 0$; $(2k + 1)$-rovnici soustavy (1), (kde $3 \leqq 2k + 1 \leqq l$) splňují x_{2k+1} dané (4) a $x_{2(k+1)}$ určené pomocí (3) pro libovolné $x_1 \neq 0$. První rovnici soustavy (1) splňuje x_2 dané vztahem (3) pro $k = 1$ při libovolném $x_1 \neq 0$.

Soustava (1) má tedy nekonečně mnoho řešení daných vztahy $x_1 = t$ a (3) a (4) pro $x_2, x_3, \dots, x_{l+1}$, kde t je libovolné reálné číslo různé od nuly.

B. Výsledků získaných v odstavci **A.** využijeme pro řešení soustavy dané v úloze. Je třeba rozlišovat několik případů.

1 Nechť $a_1 . a_2 . \ldots . a_{n-1} \neq 0$. Potom řešení z odstavce **A.**, položíme-li $l = n - 1$, musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geqq a_n. \tag{5}$$

1.1 Je-li n sudé, pak podle (3) má platit

$$\frac{a_1 a_3 \ldots a_{n-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{n-2}} \geqq a_n . \tag{5α}$$

Označme zlomek na levé straně nerovnosti (5α) písmenem a. Jestliže $a \geqq a_n$, má soustava nekonečně mnoho řešení; v případě, že $a < a_n$, soustava řešení nemá.

1.2 Jestliže je n liché, potom ze vztahů (5) a (4) plyne, že má platit

$$\frac{a_2 a_4 \ldots a_{n-1}}{a_1 a_3 \ldots a_{n-2}} . x_1^2 \geqq a_n . \tag{5β}$$

Označme zlomek na levé straně nerovnosti (5β) písmenem b. Zřejmě tedy $b \neq 0$.

1.21 Jestliže $b > 0$, potom

$$x_1^2 \geqq \frac{a_n}{b}$$

a čísel $x_1 \neq 0$ splňujících tuto nerovnost je nekonečně mnoho a soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž a_n je libovolné reálné číslo.

1.22 Jestliže $b < 0$, potom

$$x_1^2 \leqq \frac{a_n}{b} .$$

Vzhledem k tomu, že musí být $x_1 \neq 0$, má soustava řešení, a to nekonečně mnoho, právě když $\frac{a_n}{b} > 0$, tj. $a_n < 0$.

2 Nechť $a_1 = 0$. Potom z prvních dvou rovnic soustavy plyne, že $x_1 = 0$, neboť $a_2 \neq 0$. Lze opět využít výsledků z odstavce **A.**, ovšem nyní jde o soustavu

$$\begin{aligned} x_2x_3 &= a_2, \\ x_3x_4 &= a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1}x_n &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

takže je třeba nejdříve x_i a a_i přečíslovat (snížit indexy o jedničku).

Řešení ovšem musí splňovat podmínku

$$x_nx_1 \geqq a_n,$$

tj.

$$x_n \,.\, 0 \geqq a_n.$$

Soustava má tedy pro $a_n < 0$ nekonečně mnoho řešení a pro $a_n > 0$ nemá žádné řešení ($a_n \neq 0$, neboť $a_1 = 0$).

3 Nechť $a_i = 0$, kde $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$, přičemž $n > 3$. Potom $x_i = 0$ nebo $x_{i+1} = 0$, což však není možné, neboť $a_{i-1} \neq 0$ a $a_{i+1} \neq 0$. Soustava nemá tedy v tomto případě řešení.

4 Nechť $a_{n-1} = 0$. Potom zřejmě $x_n = 0$ ($x_{n-1} \neq 0$, neboť $a_{n-2} \neq 0$). Řešení opět získáme pomocí výsledků z odstavce **A.**, položíme-li $l = n - 2$.

Řešení ovšem musí splňovat podmínku

$$x_nx_1 \geqq a_n,$$

tj.

$$0 \,.\, x_1 \geqq a_n.$$

Jestliže $a_n < 0$, má soustava nekonečně mnoho řešení; pro $a_n > 0$ žádné řešení ($a_n \neq 0$, neboť $a_{n-1} = 0$).

Závěr:

Soustava má nekonečně mnoho řešení, právě když nastane jeden z těchto případů:

$a_1 \,.\, a_2 \dots a_{n-1} \neq 0$, n je sudé číslo, $a \geqq a_n$	[viz **1.1**]
$a_1 \,.\, a_2 \dots a_{n-1} \neq 0$, n je liché číslo, $b > 0$	[viz **1.21**]
$a_1 \,.\, a_2 \dots a_{n-1} \neq 0$, n je liché číslo, $b < 0$, $a_n < 0$	[viz **1.22**]
$a_1 = 0$, $a_n < 0$	[viz **2**]
$a_{n-1} = 0$, $a_n < 0$	[viz **4**].

Soustava nemá řešení, právě když nastane jeden z těchto případů:

$a_1 a_2 \dots a_{n-1} \neq 0$, n je sudé číslo, $a < a_n$ [viz **1.1**]
$a_1 a_2 \dots a_{n-1} \neq 0$, n je liché číslo,
$b < 0$, $a_n \geqq 0$ [viz **1.22**]
$a_1 = 0$, $a_n > 0$ [viz **2**]
$a_i = 0$, $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$, $n > 3$ [viz **3**]
$a_{n-1} = 0$, $a_n > 0$ [viz **4**]

2. Je-li n celé číslo, potom číslo

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

je celé. Dokažte a vyšetřete, pro která n je a_n dělitelné třemi. [5 bodů]

ŘEŠENÍ. a) Nechť n je číslo přirozené. Použijeme binomické věty. Potom

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k} . 2^{n-k} . (\sqrt{3})^k - (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} . (\sqrt{3})^k\right]}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\left[\binom{n}{1} 2^{n-1} . \sqrt{3} + \binom{n}{3} 2^{n-3} (\sqrt{3})^3 + \binom{n}{5} . 2^{n-5} (\sqrt{3})^5 + \dots\right]}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \binom{n}{1} . 2^{n-1} + \binom{n}{3} 2^{n-3} . 3 + \binom{n}{5} . 2^{n-5} . 3^2 + \dots,$$

tj. a_n je celé číslo. Všechny členy této řady s možnou výjimkou prvního jsou dělitelné třemi. Z tohoto důvodu číslo a_n je dělitelné třemi právě tehdy, jestliže je $\binom{n}{1} . 2^{n-1} = n . 2^{n-1}$ dělitelné třemi, tj. když n je dělitelné třemi (neboť 2^{n-1} není dělitelné 3).

b) Pro $n = 0$ platí:

$$a_0 = \frac{1-1}{2\sqrt{3}} = 0.$$

Číslo a_0 je tedy celé a dělitelné 3.

c) Je-li n celé záporné číslo, pak užijeme rovnosti

$$2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}};$$

proto

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})^{-n} - (2+\sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}} = -a_{-n}.$$

Číslo $(-n)$ je přirozené, a proto podle a) je číslo $-a_{-n} = a_n$ celé. Z a) dále plyne, že a_n je dělitelné 3, právě když je $-n$, tj. také n, dělitelné třemi.

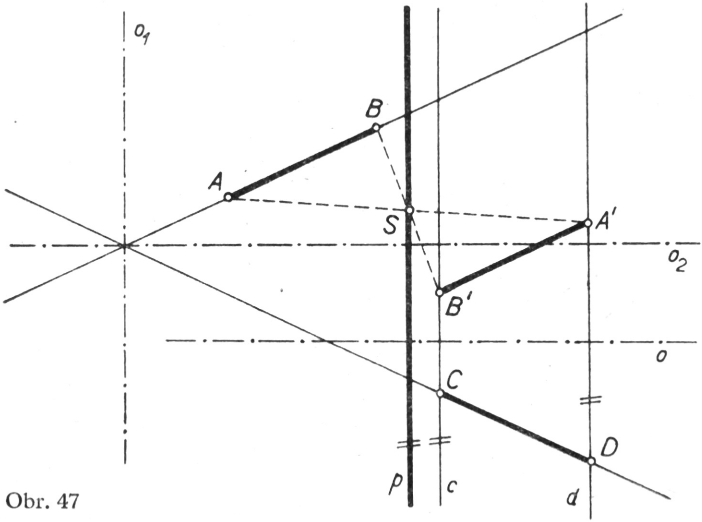
Závěr: Dokázali jsme, že pro každé celé číslo n je číslo a_n celé a že číslo a_n je dělitelné 3, právě když je n dělitelné 3.

Řešil *Tomáš Mašek*,
žák třídy 2. f SVVŠ, W. Piecka,
Praha 2

3. V rovine sú dané dve zhodné úsečky AB, CD; priamky AB, CD sú rôznobežné. Vyšetrite množinu všetkých bodov S, ktoré majú túto vlastnosť: súmernosť podľa stredu S prevedie úsečku AB na úsečku súmerne združenú s úsečkou CD podľa vhodnej osi o. [6 bodov]

RIEŠENIE. Označme $A'B'$ úsečku súmerne združenú s úsečkou AB podľa stredu S (obr. 47). Zrejme platí

$A'B' \parallel AB$. Rôznobežné priamky AB a CD majú dve osi súmernosti; označme ich o_1 a o_2. Pretože $A'B' \parallel AB$, platí buď $o \parallel o_1$ alebo $o \parallel o_2$.



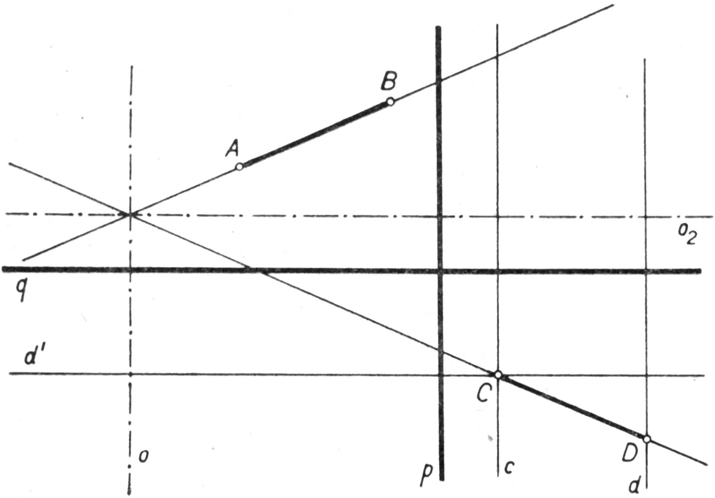
Obr. 47

1. Ak je $o \parallel o_2$, potom body súmerne združené s bodmi C, D podľa osi o ležia na priamke c, resp. d, ktoré sú kolmé na os o a teda aj na os o_2, pričom bod C leží na priamke c, bod D leží na priamke d. Všetky úsečky $A'B'$ sú zrejme navzájom rovnobežné (pretože $A'B' \parallel AB$) a ich koncové body ležia na priamkach c a d (pretože sú súmerne združené s úsečkou CD podľa osi o). Bod S je stredom úsečky $A'A$. Keďže bod A' prebieha priamku d, prebieha bod S priamku $p \parallel d$, ktorá má rovnakú vzdialenosť od bodu A a priamky d.

Ak je $o \parallel o_1$, dokáže sa analogickou úvahou, že bod S prebieha priamku q rovnobežnú s priamkou d' (d' je priamka rovnobežná s osou o_2 prechádzajúca bodom C) a rovnako vzdialenú od bodu A a priamky d'.

2. Teraz dokážeme, že každý bod priamky p i každý bod priamky q patrí k hľadanej množine. Nech S je bod priamky p. Potom bod A' súmerne združený s bodom A podľa stredu S leží na priamke $d \parallel o_1$, bod B' súmerne združený s bodom B podľa stredu S leží na priamke $c \parallel o_1$ a platí $AB \parallel A'B'$. Osou súmernosti úsečiek $A'B'$ a CD je priamka o, ktorá je osou súmernosti úsečky $A'D$, resp. $B'C$.

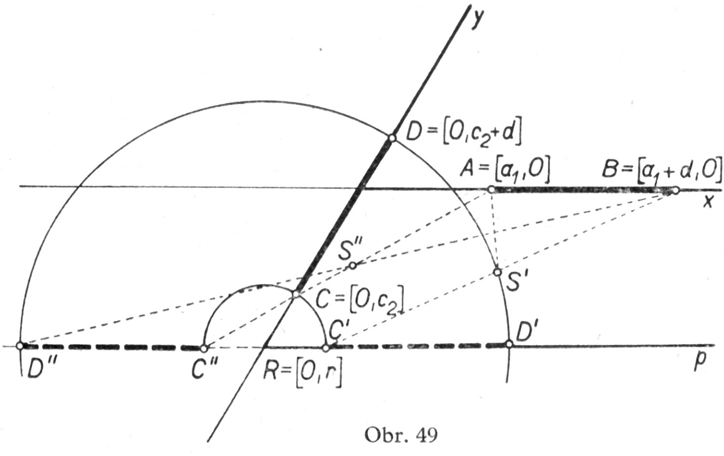
Ak S je bod priamky q, sa analogicky ukáže, že osou súmernosti úsečky $A'B'$ súmerne združenej s úsečkou AB podľa stredu S a úsečky CD je priamka o, ktorá je osou súmernosti úsečky $B'D$, resp. $A'C$.



Obr. 48

Záver: Ukázali sme, že hľadanou množinou bodov S je zjednotenie priamok p a q, ktoré majú tieto vlastnosti: Priamka $p \parallel d$ je rovnako vzdialená od bodu A a priamky d, kde priamka d je rovnobežka s osou o_1 vedená bodom D. Priamka $q \parallel d'$ je rovnako vzdialená od bodu A a priamky d', kde d' je rovnobežka s osou o_2 vedená bodom C (obr. 48).

Riešil *Marián Dénéš*,
žiak 9c ZDŠ, Košická, Bratislava



Obr. 49

JINÉ ŘEŠENÍ. V rovině (obr. 49) zvolme rovnoběžkovou soustavu souřadnou tak, aby $A \equiv [a_1; 0]$, $B \equiv \equiv [a_1 + d; 0]$, $C \equiv [0; c_2]$; $D \equiv [0, c_2 + d]$, kde $d > 0$. Při středové souměrnosti je obraz přímky rovnoběžný se vzorem, to znamená, že úsečka $C'D'$ souměrně sdružená s úsečkou CD dle nějaké osy o leží na přímce rovnoběžné s AB. Označme tuto přímku p; nechť má rovnici

$$y = r.$$

Na této přímce p sestrojíme otočením úsečky CD kolem průsečíku $R = p \cap CD$ dvě úsečky $C'D'$ a $C''D''$. Označme S, S' středy souměrnosti úseček AB, $C'D'$ a AB, $C''D''$. Platí

$$C' \equiv [c_2 - r; r], \quad D' \equiv [c_2 + d - r; r],$$
$$C'' \equiv [r - c_2; r], \quad D'' \equiv [r - c_2 - d; r],$$

čili

$$S' = \frac{A + B + C' + D'}{4} = \left[\frac{a_1 + c_2 + d - r}{2}; \frac{r}{2}\right],$$
$$S'' = \frac{A + B + C'' + D''}{4} = \left[\frac{a_1 + r - c_2}{2}; \frac{r}{2}\right].$$

Protože bod R probíhá celou přímku CD, probíhá parametr r množinu všech reálných čísel. Označme $\frac{r}{2} = t$. Potom parametrické vyjádření množiny bodů S' je

$$x = \frac{a_1 + c_2 + d}{2} - t,$$
$$y = t,$$
$$t \in (-\infty, \infty);$$

parametrické vyjádření množiny bodů S'' je

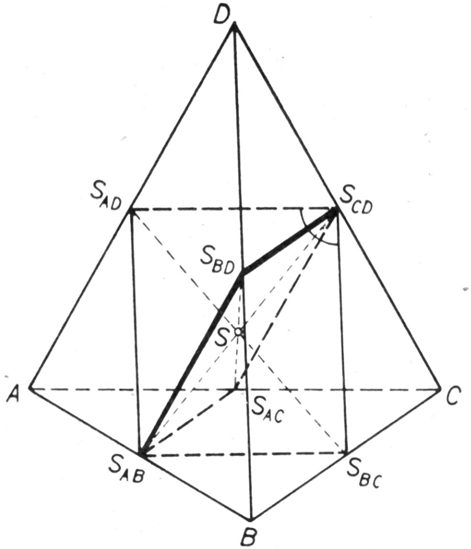
$$x = \frac{a_1 - c_2}{2} + t,$$
$$y = t,$$
$$t \in (-\infty, \infty).$$

Množinou středů souměrnosti je dvojice navzájem kolmých přímek, které jsou rovnoběžné s osami úhlů přímek AB, CD a prochází bodem, jenž ve výše zvolené soustavě souřadnic má souřadnice $\left[\frac{2a_1 + d}{4}; \frac{2c_2 + d}{4}\right]$.

Řešil *Jan Mašek*, žák 3f SVVŠ,
Praha 2, W. Piecka

4. V priestore sú dané štyri rôzne body A, B, C, D také, že $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$. Potom existuje guľová plocha, ktorá prechádza stredmi všetkých úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD. Dokážte. [7 bodov]

RIEŠENIE. Označme stredy úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD v uvedenom poradí S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD} (obr. 50). Nech je S stred úsečky $S_{AB}S_{CD}$ (o prí-



Obr. 50

pade $S_{AB} \equiv S_{CD}$ budeme uvažovať zvlášť; zatiaľ predpokladajme, že body S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD} sú navzájom rôzne). Podľa známej planimetrickej vety je $S_{AB}S_{AD} \parallel BD$ a tiež $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, z čoho vyplýva, že $S_{AB}S_{AD} \parallel S_{BC}S_{CD}$. Analogicky sa ukáže, že $S_{AD}S_{CD} \parallel$

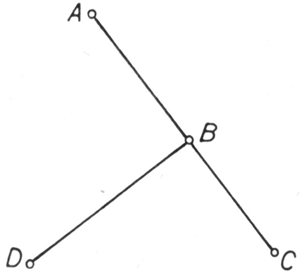
$\parallel S_{AB}S_{BC}$. Štvoruholník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je teda rovnobežník a bod S je súčasne stredom úsečky $S_{AD}S_{BC}$. Platí preto: $SS_{AB} = SS_{BC} = SS_{CD} = SS_{AD}$ a keďže $AC \perp BD$ a $S_{AB}S_{BC} \parallel AC$, $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, je $S_{AB}S_{BC} \perp S_{BC}S_{CD}$ a rovnobežník je zrejme obdĺžnikom, čo znamená, že tiež $SS_{BC} = SS_{CD}$.

Analogicky sa dokáže, že $S_{AB}S_{BD}S_{CD}S_{AC}$ je obdĺžnik a teda platí: $SS_{AB} = SS_{BD} = SS_{AC} = SS_{CD}$. Bod S je teda rovnako vzdialený od všetkých bodov S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD} čiže existuje guľová plocha so stredom S, ktorá všetkými týmito bodmi prechádza.

Zostáva nám ešte uvažovať o prípade $S_{AB} \equiv S_{CD}$. Ak by tento prípad nastal, boli by body A, B, C, D vrcholmi rovnobežníka $ACBD$, v ktorom $AD \parallel BC$. Vzhľadom na predpoklad $AD \perp BC$ nemôže však tento prípad nastať. Analogicky se vylúčia prípady: $S_{AC} \equiv S_{BD}$, $S_{AD} \equiv S_{BC}$.

Riešil *Bohuš Sivák*,
žiak 2a SVŠ, Zvolen

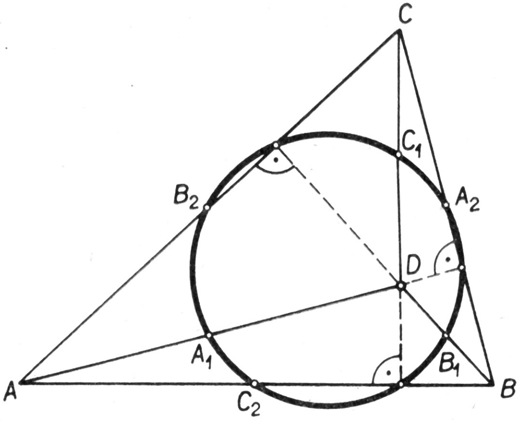
JINÉ ŘEŠENÍ. Žádné tři z těchto čtyř bodů nemohou ležet v přímce. Po označení podle obr. 51 by totiž musel být $\sphericalangle DAC = 90°$, takže body A, B by splývaly, což by



Obr. 51

byl spor s předpokladem. Při jiné poloze bodů dojdeme obdobným postupem opět ke sporu.

Budou-li body A, B, C, D ležet v rovině, budou body A, B, C tvořit vrcholy trojúhelníku a bod D bude ortocentrem $\triangle ABC$ (obr. 52). Středy zmíněných úseček označené A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 pak budou ležet na tzv. *Feuerbachově kružnici* devíti bodů.*) Touto kružnicí lze proložit nekonečně mnoho kulových ploch.

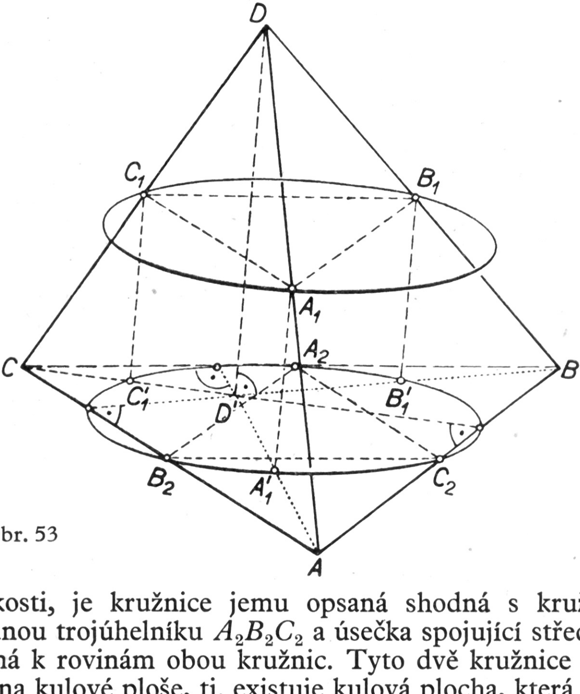


Obr. 52

Neleží-li tyto body v rovině, tvoří vrcholy čtyřstěnu. Středy úseček AB, AC, AD, BC, BD, CD označme podle obr. 53. Sestrojíme-li pravoúhlý průmět tohoto čtyřstěnu do roviny ABC, bude obrazem vrcholu D ortocentrum D' trojúhelníku ABC. Úsečky BC a CA jsou

*) *Poznámka.* Feuerbachova kružnice trojúhelníka ABC prochází těmito devíti body: a) středy stran A_2, B_2, C_2, b) středy A_1, B_1, C_1 úseček, určených vrcholy a průsečíkem výšek a c) (v úloze nepoužitými) patami výšek tohoto trojúhelníka.

totiž samodružné, a proto se úsečky AD a BD promítnou opět jako jejich kolmice. Průměty bodů A_1, B_1, C_1 označené na obr. 53 A_1', B_1', C_1' leží na kružnici devíti bodů $\triangle ABC$. Je to kružnice opsaná trojúhelníku $A_2B_2C_2$. Poněvadž trojúhelník $A_1B_1C_1$ se promítá ve skutečné



Obr. 53

velikosti, je kružnice jemu opsaná shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku $A_2B_2C_2$ a úsečka spojující středy je kolmá k rovinám obou kružnic. Tyto dvě kružnice tedy leží na kulové ploše, tj. existuje kulová plocha, která prochází středy všech úseček AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Řešil *Jiří Demel*,
žák 3a SVVŠ, Valašské Meziříčí